

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД В КОЛЬЦЕВЫХ СОПЛАХ

А.Л. Карташев, М.А. Карташева

Рассмотрены течения многокомпонентных сред в кольцевых соплах управляемых газоструйных систем различных геометрических конфигураций на различных режимах работы. Предложен подход для моделирования течений многокомпонентных сред в кольцевых соплах со сложной ударно-волновой структурой. Получены результаты численных исследований динамики многокомпонентных сред в кольцевых соплах.

Ключевые слова: кольцевое сопло, управляемая газоструйная система, математическое моделирование, многокомпонентная среда.

В современных ракетных двигателях на твердом топливе нашли широкое применение металлизированные ракетные топлива, одним из компонентов которых являются металлы либо их соединения, при горении которых образуются окислы металлов в виде жидких капель или твердых частиц. Массовая доля конденсированных продуктов сгорания в общем расходе продуктов сгорания через сопло двигателя может достигать ~ 40 %. В этом случае течение продуктов сгорания в сопле ракетного двигателя с твердым металлизированным топливом представляет собой течение многокомпонентной среды.

При использовании ракетных топлив, в продуктах сгорания которых присутствуют конденсированные вещества, возникает ряд специфических проблем, без решения которых невозможно эффективное использование рассматриваемых топлив в реальных конструкциях. Во-первых, наличие в продуктах сгорания частиц конденсированной фазы приводит к тому, что в потоке имеет место скоростная и температурная неравновесность параметров газовой и конденсированной фазы, приводящая к снижению удельного импульса тяги. Во-вторых, различие в траекториях движения газа и частиц конденсированной фазы приводит к осаждению частиц на поверхности сопла, которое также приводит к потерям удельного импульса тяги вследствие передачи (частично или полностью) импульса частиц стенкам соплового блока. Кроме того, такое осаждение может вызвать интенсивную эрозию профилированных обтекаемых поверхностей сопла и привести к их значительному искажению, что приводит к нарушению расчетного режима течения в сопле, либо к полному или частичному его разрушению.

Движение конденсированной фазы в кольцевом сопле, в отличие от ее движения в традиционно применяемом сопле Лавала, имеет ряд существенных особенностей, определяемых геометрической конфигурацией проточного тракта сопла [1, 2]. Наличие минимального сечения в виде кольцевой щели и резких изменений площади проточного тракта вызывает возникновение значительных градиентов газодинамических параметров, приводящих к существенной неравновесности течения полидисперсного конденсата в кольцевом сопле. Более сложная геометрическая конфигурация кольцевого сопла приводит к значительному искривлению линий тока, как газа, так и частиц, вызывая сепарацию частиц в направлении, поперечном оси сопла. Сепарация, в свою очередь, приводит к интенсивному осаждению частиц из потока на центральное тело и внешнюю обечайку сопла.

В кольцевом сопле имеет место течение многофазной среды с полидисперсной конденсированной фазой, которую можно представить состоящей из нескольких фракций частиц (капель), имеющих одинаковые размеры внутри одной фракции. Поэтому для получения газодинамических и тяговых характеристик кольцевых сопел, в большей мере соответствующих действительным характеристикам, необходимо проведение математического моделирования течений многофазной среды с полидисперсным конденсатом в кольцевых соплах [1–3].

Рассмотрена задача определения зависимости тяговых характеристик кольцевых сопел от параметров конденсированной фазы. При этом полагалось, что все частицы конденсированной фазы состоят из одного вещества, а химические реакции в смеси и фазовые переходы между газом и конденсированной фазой отсутствуют.

Расчет и конструирование

Для проведения математического моделирования принят подход, предложенный в работе [4]. В настоящей работе такой подход применен для моделирования течений в кольцевых соплах ракетных двигателей, расчетная область которых обладает сложной геометрической конфигурацией, а поле течения характеризуется значительно большими градиентами параметров, чем в соплах Лавала, и сложностью ударно-волновой структуры потока.

Течение в кольцевом сопле является «смешанным» течением. Наличие в поле течения до-, транс-, сверхзвуковых областей характерно для большинства геометрических конфигураций кольцевых сопел, причем дозвуковые области могут возникать даже вблизи выходного сечения сопла. Таким образом, в различных подобластях решения задачи уравнения газовой фазы могут принадлежать к эллиптическому или гиперболическому типу, что приводит к необходимости применения различных методов для решения задачи в каждой из этих областей, при этом границы указанных подобластей заранее неизвестны. Поэтому для расчета параметров «смешанного» течения целесообразно применить метод установления.

Применение метода установления при рассмотрении течения с полидисперсным конденсатом в кольцевом сопле имеет некоторые особенности. Вследствие громоздкости уравнений двухфазного течения с учетом процессов коагуляции и дробления частиц и сложной геометрической конфигурации области решения численное интегрирование этих уравнений представляет собой довольно сложную алгоритмическую задачу, требующую для своего решения значительных затрат машинного времени. Поэтому в рамках предлагаемого подхода для математического моделирования использовались уравнения непрерывной модели, записанные для дискретной функции распределения (основные положения использованного дискретного подхода для сопел Лавала представлены в [4, 5]).

Система уравнений нестационарного осесимметричного течения многокомпонентной среды в кольцевом сопле имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u \bar{u} &= 0; \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u_i \bar{u} + \frac{\partial p}{\partial x} &= r \sum_{i=1}^l N_i C_{R_i} (u_{si} - u); \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v \bar{u} + \frac{\partial p}{\partial y} - p &= y \sum_{i=1}^l N_i C_{R_i} (v_{si} - v); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u \rho \left(H - \frac{p}{\rho} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho H \bar{u} &= y \sum_{i=1}^l N_i \left\{ c_{ai} (\theta_{si} - \theta) + C_R [u_{si} (u_{si} - u) + v_{si} (v_{si} - v)] \right\}; \\ \frac{p}{\rho} &= \frac{k-1}{k} \left(H - \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y N_i}{\partial t} + \nabla \cdot y N_i \bar{u}_{si} &= -y N_i \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j; \\ \frac{\partial y \rho_{si}}{\partial t} + \nabla \cdot y \rho_{si} \bar{u}_{si} &= y \left[N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} - \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j \right]; \\ \frac{\partial y \rho_{si} u_{si}}{\partial t} + \nabla \cdot y \rho_{si} u_{si} \bar{u}_{si} &= y \left[N_i C_{R_i} (u - u_{si}) + N_i \sum_{j=1}^l k_{ij} \rho_{sj} (u_{sj} - u_{si}) + \right. \\ &+ \rho_{si} \sum_{j=1}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (u_{sj} - u_{si}) N_j - u_{si} \left(\rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_j \sum_{j=1}^l k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{si} \right) \left. \right]; \\ \frac{\partial y \rho_{si} v_{si}}{\partial t} + \nabla \cdot y \rho_{si} v_{si} \bar{u}_{si} &= y \left[N_i C_{R_i} (v - v_{si}) + N_i \sum_{j=1}^l k_{ij} \rho_{sj} (v_{sj} - v_{si}) + \right. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho_{si} \sum_{j=1}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (v_{sj} - v_{si}) N_j - v_{si} \left(\rho_{si} \sum_{j=1}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} \right) \Bigg]; \\
 & \frac{\partial y c_s \theta_{si} \rho_{si}}{\partial t} + \nabla \cdot y \rho_{si} c_s \theta_{si} \vec{u}_{si} = y [N_i c_{\alpha i} (\theta - \theta_{si}) + N_i \sum_{i=1}^j k_{ij} \rho_{si} (E_j - E_i) + \\
 & + \rho_{si} \sum_{j=1}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) N_j (E_j - E_i) - c_s \theta_{si} \left(\rho_{si} \sum_{j=1}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} \right) \Bigg]; \\
 & i = 1, \dots, l,
 \end{aligned}$$

где $\vec{u}_{si} = (u_{si}, v_{si})$ – вектор скорости частиц i -й фракции в осесимметричной системе координат;

$\vec{u} = (u, v)$ – вектор скорости газа; H – энтальпия газа; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$; $E_j - E_i = c_s (\theta_{sj} - \theta_{si}) + \frac{|u_{sj} - u_{si}|^2}{2}$; c_s – теплоемкость частиц; θ_{si} и θ_{sj} – температуры частиц; k_{ij} – коэффициент коагуляции; Φ_{ij} – коэффициент эффективности соударений; N_i – число частиц i -й фазы; C_{Ri} и $c_{\alpha i}$ – коэффициенты взаимодействия между частицами и газом; l – число фракций.

Представленная система уравнений состоит из двух подсистем: подсистема, описывающая движение газа, состоит из пяти уравнений и обозначена (1), подсистема, описывающая движение частиц, также состоит из пяти уравнений и обозначена (2).

В случае учета дробления частиц за счет вращения к представленной системе уравнений необходимо добавить уравнение для квадрата среднего момента количества движения:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial y N_i M_i^2}{\partial t} + \nabla \cdot y N_i M_i^2 \vec{u}_{si} + \frac{2B_i M_i^2}{I_i} y N_i = y \left(\sum_{j=1}^i k_{ij} N_j (M_{1ij}^2 - M_i^2) + \right. \\
 & \left. + \sum_{i=j}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (M_{2ij}^2 - M_i^2) N_j - M_i^2 \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} N_j \right) N_i; \\
 & i = 1, \dots, l,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где M_i – моменты вращения частиц i -й и j -й фаз до столкновения; M'_{1ij} , M'_{2ij} – моменты вращения осколков, получающихся при столкновениях частиц i -й и j -й фаз; B_i – момент силы; I_i – момент инерции частицы i -й фазы.

Подсистемы (1) и (2) связаны друг с другом только через правые части, которые не содержат производных от параметров задачи, вследствие чего изучение характеристических свойств этих подсистем можно проводить независимо друг от друга.

Характеристики подсистем (1) и (2) в пространстве $\{x, y, t\}$ совпадают с траекториями частиц, вдоль которых выполняется столько уравнений совместности, сколько уравнений содержится в этих системах.

Дифференциальные уравнения газовой фазы отличаются от уравнений движения чистого газа только своими правыми частями, а, значит, они обладают такими же характеристическими свойствами, что и уравнения, описывающие движения чистого газа. Это означает, что граничные условия для подсистемы (1) должны задаваться точно так же, как при исследовании движения чистого газа в кольцевом сопле.

Граничные условия задаются следующим образом. Для интегрирования системы уравнений на части границы, через которую осуществляется ввод многофазной смеси, задаются энтальпия, энтропия и распределение скорости газа, на стенках сопла использовано условие непротекания газовой фазы $v = y'_x u$, на выходной сверхзвуковой границе граничных условий не требуется. В силу характеристических свойств уравнений (1) и (2) граничные условия необходимо задавать только на части границы, через которую осуществляется вдув многофазной смеси. На данной части границы течение предполагалось равновесным (скорости и температуры частиц приравнялись к соответствующим параметрам газа, а момент вращения частиц полагался равным нулю).

Расчет и конструирование

Для коэффициентов Φ_{ij} в расчетах использовались два вида функциональных зависимостей:

– экспериментальная зависимость, полученная А.А. Шрайбером и А.М. Подвысоцким, приведенная в работе [4]

$$\Phi_{ij} = 1 - 0,247 \operatorname{Re}_{ji}^{0,434} Lp_i^{-0,133} \gamma_{ji}^{-0,273}, \quad (4)$$

применение которой показало свою эффективность в приложениях к вопросам массообмена при многофазных течениях в соплах, и справедливая в области параметров

$$35 \leq \operatorname{Re}_{ji} \leq 385, \quad 5 \leq Lp_i \leq 600, \quad 2 \leq \gamma_{ji} \leq 12;$$

– обобщенная зависимость, полученная на основе экспериментальных данных и предложенная авторами работы [4]

$$\Phi_{ji} = 1,4 + 1,979\lambda + 0,507(2\lambda^2 - 1), \quad (5)$$

$$\text{где } \lambda = \left(\frac{\operatorname{Re}_{ji}}{\operatorname{Re}_0} \right)^{0,572} \left(\frac{Lp_i}{Lp_0} \right)^{-0,153} \left(\frac{\gamma_{ji}}{\gamma_0} \right)^{-0,597}, \quad \operatorname{Re}_0 = 383,6, \quad Lp_0 = 370,37, \quad \gamma_0 = 2,37.$$

Коэффициенты k_{ij} определялись в соответствии с подходом, принятым в [4].

Для оценки момента распада частиц конденсированной фазы использовался критерий Вебера (число Вебера) [5]

$$\operatorname{We} = \frac{2\rho_b V^2 r}{\sigma_b}, \quad (6)$$

где ρ_b – плотность вещества частицы, V – модуль скорости частицы, r – радиус частицы, σ_b – коэффициент поверхностного натяжения вещества частиц.

Одним из важнейших граничных условий, существенно влияющих на параметры течения смеси газа и полидисперсного конденсата, является начальное распределение частиц по массам (размерам). Такая функция распределения может быть получена либо экспериментально, либо получена в результате математического моделирования многофазных течений [4–7].

В рамках различных математических моделей часто полагают, что фракционный состав ансамбля частиц подчиняется нормально-логарифмической функции распределения [5]

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r \ln \sigma}} \exp \left[-\frac{(\ln r - \ln r_0)^2}{2(\ln \sigma)^2} \right], \quad (7)$$

где r_0 – математическое ожидание радиуса частиц, r – текущий радиус частицы, $\ln r_0$, $(\ln \sigma)^2$ – математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение логарифма радиусов частиц.

Для функции распределения частиц по массам в настоящем исследовании принято соотношение, приведенное в [4]

$$N_0(m) = \frac{c}{m} \cdot \exp \left[-\frac{(\ln m - \ln \langle m \rangle)^2}{18(\ln \sigma)^2} \right], \quad (8)$$

где m – масса частицы, $\ln \sigma$ – среднее квадратичное отклонение логарифма массы, c – константа.

Константа c вычислялась из условия нормировки $\sum_{i=1}^l \rho_{si} = \frac{z\rho}{1-z}$, где z – массовая доля конденсированной фазы в многофазной смеси.

При попадании частиц конденсированной фазы на стенки сопла использована гипотеза прилипания, в соответствии с которой при попадании на стенку частицы оседают на стенке, передавая последней весь свой импульс, и которая хорошо соответствует реальной картине течения многофазной среды в соплах.

Таким образом, предлагаемый для расчета многокомпонентных течений в кольцевых соплах вычислительный алгоритм основан на непрерывной модели взаимодействия частиц с учетом приведенных выше функции распределения частиц по размерам и коэффициента взаимодействия частиц при столкновениях.

Разностная сетка в рассматриваемой области течения построена с помощью процедуры конформного отображения расчетной области на область, близкую к прямоугольнику [4].

Как и в рассмотренных выше задачах для нахождения решения методом установления использован вычислительный алгоритм, основанный на разностной схеме Годунова – Колгана, с учетом особенностей течения в кольцевых соплах.

В ряде возможных случаев течения, например, в случае отсутствия в области течения замкнутых траекторий частиц, обусловленных вихревыми течениями, для решения рассматриваемой задачи целесообразно применять метод псевдоустановления, заключающийся в разделении системы уравнений на две подсистемы: для газа и для частиц, первая из которых решается методом установления, а для решения второй подсистемы – расчета параметров частиц – используются стационарные уравнения, интегрирование которых возможно различными способами, например, с помощью неявных разностных схем.

Соответствующая система уравнений для нестационарного осесимметричного течения в кольцевом сопле имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot y N_i \vec{u}_i &= -y N_i \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j; \\ \nabla \cdot y \rho_{si} \vec{u}_{si} &= y \left[N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} - \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j \right]; \\ \nabla \cdot y \rho_{si} u_{si} \vec{u}_{si} &= y \left[N_i C_{Ri} (u - u_{si}) + N_i \sum_{j=i}^l k_{ij} \rho_{si} (u_{sj} - u_{si}) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (u_{sj} - u_{si}) N_j - u_{si} \left(\rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} \right) \right]; \\ \nabla \cdot y \rho_{si} v_{si} \vec{u}_{si} &= y \left[N_i C_{Ri} (v - v_{si}) + N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \rho_{sj} (v_{sj} - v_{si}) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (v_{sj} - v_{si}) N_j - v_{si} \left(\rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} \right) \right]; \\ \nabla \cdot y \rho_{si} c \theta_{si} \vec{u}_{si} &= y \left[N_i c_{\theta i} (\theta - \theta_{si}) + N_i \sum_{j=i}^l k_{ij} \rho_{si} (E_j - E_i) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) N_j (E_j - E_i) - c \theta_{si} \left(\rho_{si} \sum_{i=j}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} \right) \right]; \\ \frac{\partial \rho y}{\partial t} + \nabla \cdot y \rho \vec{u} &= 0; \\ \frac{\partial y \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \left[y \left(\rho u \vec{u} + \sum_{i=1}^l \rho_{si} u_{si} \vec{u}_{si} \right) \right] + \frac{\partial y p}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial y \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot \left[y \left(\rho v \vec{u} + \sum_{i=1}^l \rho_{si} v_{si} \vec{u}_{si} \right) \right] + \frac{\partial y p}{\partial x} - p &= 0; \\ \frac{\partial y \rho \left(H - \frac{p}{\rho} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ y \left[\rho \vec{u} H + \sum_{i=1}^l \rho_{si} \vec{u}_{si} \left(c \theta_{si} + \frac{u_{si}^2 + v_{si}^2}{2} \right) \right] \right\} &= 0; \\ \frac{p}{\rho} &= \frac{k-1}{k} \left(H - \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Расчет и конструирование

В случае учета вращения частиц к системе уравнений (9) необходимо добавить стационарное уравнение для среднего значения квадрата момента количества движения

$$\begin{aligned} \nabla \cdot y N_i M_i^2 \vec{u}_{si} + \frac{2B_i M_i^2}{I_i} y N_i = y \left[\sum_{j=1}^i k_{ij} N_j (M_{1ij}^2 - M_i^2) + \right. \\ \left. + \sum_{i=j}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (M_{2ij}^2 - M_i^2) N_j - M_i^2 \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} N_j \right] N_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Для расчета течений многофазной смеси в сверхзвуковой области кольцевого сопла также может быть использована рассмотренная выше система уравнений (1)–(3), записанная с учетом особенностей сверхзвукового течения.

В области сверхзвукового течения стационарные уравнения газовой динамики, полученные из (1), являются уравнениями гиперболического типа. Стационарные уравнения для частиц также имеют только действительные характеристики – траектории частиц. Это позволяет использовать для расчета сверхзвуковых многофазных течений разностные методы, разработанные для решения задач гиперболического типа. Для расчета параметров течения в сверхзвуковой области удобно использовать схему псевдоустановления. В этом случае замена расчетной области на близкую к прямоугольной осуществляется с помощью следующих конформных отображений: $\xi = y/y_0(x)$, где y_0 – координаты внешней обечайки, для области движения газа, $\xi_i = y/y_i(x)$, где $y = y_i(x)$ – уравнение граничной линии тока частиц i -й фракции, для области движения частиц. В отличие от дозвуковой части сопла геометрия сверхзвуковой части сопла имеет более «гладкий» характер, поэтому для отображения области течения на расчетную область, близкую к прямоугольной, достаточно рассмотреть, как правило, один вид конформного отображения. После указанной замены переменных система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \xi y_0 \vec{W} &= 0; \\ \nabla \cdot \xi y_0 \rho u \vec{W} + \frac{\partial}{\partial x} \xi y_0^2 p - \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 y_0 y_0' p &= \xi y_0^2 \sum_{i=1}^l N_i C_{Ri} (u_{si} - u); \\ \nabla \cdot \xi y_0 \rho v \vec{W} + \frac{\partial}{\partial \xi} \xi y_0 p - y_0 p &= \xi y_0^2 \sum_{i=1}^l N_i C_{Ri} (v_{si} - v); \\ \nabla \cdot \xi y_0 \rho H \vec{W} &= \xi y_0^2 \sum_{i=1}^l N_i \{ C_{ai} (\theta_{si} - \theta) + C_{Ri} [u_{si} (u_{si} - u) + v_{si} (v_{si} - v)] \}; \\ \nabla_i \cdot \xi_i y_i N_i \vec{W}_i &= -\xi_i y_i^2 N_i \sum_{j=1}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j; \\ \nabla_i \cdot \xi_i y_i \rho_{si} \vec{W}_i &= \xi_i y_i \left(N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} - \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j \right); \\ \nabla_i \cdot \xi_i y_i \rho_{si} u_{si} \vec{W}_i &= \xi_i y_i^2 \left[N_i C_{Ri} (u - u_{si}) + N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \rho_{sj} (u_{sj} - u_{si}) + \right. \\ &+ \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (u_{sj} - u_{si}) N_j - u_{si} \left(\rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_j \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} \right) \left. \right]; \\ \nabla_i \cdot \xi_i y_i \rho_{si} v_{si} \vec{W}_i &= \xi_i y_i^2 \left[N_i C_{Ri} (v - v_{si}) + N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \rho_{sj} (v_{sj} - v_{si}) + \right. \\ &+ \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (v_{sj} - v_{si}) N_j - v_{si} \left(\rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_j \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} \right) \left. \right]; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \nabla_i \cdot \xi_i y_i \rho_{si} c_s \theta_{si} \vec{W}_i &= \xi_i y_i^2 \left[N_i C_{oi} (\theta - \theta_{si}) + N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \rho_{sj} (E_j - E_i) + \right. \\ &+ \left. \rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) N_j (E_j - E_i) - c_s \theta_{si} \left(\rho_{si} \sum_{j=i}^l k_{ij} \Phi_{ij} N_j - N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} \rho_{sj} \right) \right]; \\ \nabla_i \cdot \xi_i y_i N_i M_i^2 \vec{W}_i + \frac{2B_i M_i^2}{I_i} \xi_i y_i^2 &= \xi_i y_i^2 \left[N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} N_j (M_{ij}^2 - M_i^2) + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=i}^l k_{ij} (1 - \Phi_{ij}) (M_{2ij}^2 - M_i^2) N_i N_j - M_i^2 N_i \sum_{j=1}^i k_{ij} \Phi_{ij} N_j \right]; \\ i &= 1, \dots, l, \end{aligned}$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{k} + \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{j}$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{k} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \vec{l}$, $\vec{W} = u y_0 \vec{k} + (v - \xi y'_0 u) \vec{j}$, $\vec{W}_i = u_{si} y_{0i} \vec{k} + (v_{si} - \xi_i y'_i u_{si}) \vec{l}_i$.

Граничные линии тока частиц $y_i(x)$ вычисляются из уравнений для траектории частиц каждой фракции

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{v_{si}}{u_{si}}, \tag{12}$$

и начального условия $y_i(x) = y_{0i}$, являющегося результатом численного интегрирования уравнений до-, трансзвукового течения. В случае осаждения частиц на поверхности соплового блока применяется условие «прилипания» частиц к поверхностям соплового блока, а величина y_i приравнивается к значениям y_0 , задаваемым уравнением образующей внешней обечайки кольцевого сопла $y_0 = y_0(x)$.

В качестве начальных условий для расчетов взяты параметры газа и частиц, вычисленные на левой границе сверхзвуковой части сопла по методу установления.

На обтекаемых поверхностях сопла – внешней обечайке и центральном теле – выполняются условия непротекания для газовой фазы

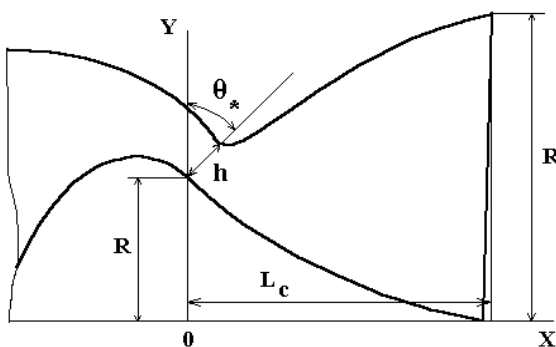
$$\frac{v}{u} = y'_{01}(x), \quad \frac{v}{u} = y'_{02}(x),$$

где индексами 1 и 2 обозначены соответственно параметры центрального тела и внешней обечайки.

Для вычисления параметров газовой фазы использована модифицированная маршевая схема Иванова – Крайко – Михайлова. Подсистема уравнений частиц решалась с помощью схемы 2-го порядка точности, предложенной в работе [4].

С помощью описанных выше методов и алгоритмов проведены численные исследования параметров многофазной полидисперсной смеси для типичной конфигурации кольцевого сопла, представленной на рис. 1 со следующими начальными условиями:

– геометрические параметры сопла: радиус, на котором расположено минимальное сечение сопла (служит единицей измерения) $\bar{R} = 1$; площадь минимального сечения сопла $\bar{F}_* = 0,5$; радиус



выходного сечения сопла $R_a = 2,2$; угол наклона минимального сечения сопла $\theta_* = 45^\circ$;

– параметры рабочего тела: давление торможения на входе в сопло $p_0 = 120 \text{ кг/см}^2$ (12 МПа), массовая доля конденсированной фазы $z = 0,3$;

– распределение частиц по фракциям на входе в сопло задано по нормально-логарифмическому закону.

Рис. 1. Схема кольцевого сопла

Расчет и конструирование

Для сравнения тяговой эффективности различных сопел, работающих в различных условиях, удобно использовать коэффициент тяги:

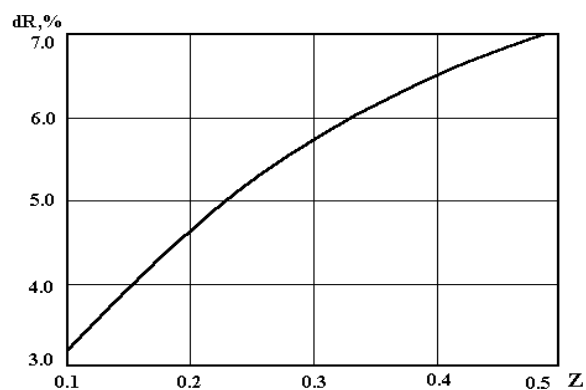
$$K_T = \frac{R_{\text{сопла}}}{F_* \cdot P_0}, \quad (13)$$

где $R_{\text{сопла}}$ – тяга сопла, F_* – площадь минимального сечения сопла, P_0 – давление торможения на входе в сопло.

Коэффициент тяги рассматриваемого кольцевого сопла с многофазной рабочей смесью имеет значение $K_T = 1,628$, а то же кольцевое сопло с чистым газом имеет $K_T = 1,477$. Таким образом, применение многофазной рабочей смеси в кольцевом сопле позволяет повысить его тяговую эффективность. При этом энергетическая эффективность (удельный импульс тяги) многофазных продуктов сгорания топлив, содержащих металлизированные добавки, выше, чем у продуктов сгорания, представляющих чистый газ [8].

В кольцевых соплах рассматриваемой конфигурации наличие существенных градиентов газодинамических параметров приводит к возникновению значительных потерь тяги вследствие скоростной и температурной неравновесности двухфазного потока, которые в случае рассматриваемого сопла составили $\xi_{\text{дф}} \sim 5,7\%$.

Величина потерь тяги из-за многофазности потока («многофазных» либо «двухфазных» потерь) в кольцевых соплах представляет собой сложную, многофакторную функцию, зависящую как от геометрической конфигурации кольцевого сопла, так и от параметров многофазной смеси. На рис. 2 приведена зависимость величины потерь тяги от массовой доли z конденсированной фазы в рабочем теле кольцевого сопла.



Важной особенностью двухфазных течений в кольцевых соплах является осаждение частиц конденсированной фазы на центральное тело и внешнюю обечайку сопла, что приводит к снижению тяги сопла вследствие потери импульса частицами, осаждающимися на стенки сопла (величина импульса, переданного частицами стенкам сопла, получила название «импульс осаждения частиц») [1, 2].

Рис. 2. Зависимость величины двухфазных потерь от массовой доли конденсированной фазы

В ходе проведения численных исследований получены значения импульса осаждения частиц конденсированной фазы J_{pr} на центральное тело и внешнюю обечайку сопла (рис. 3).

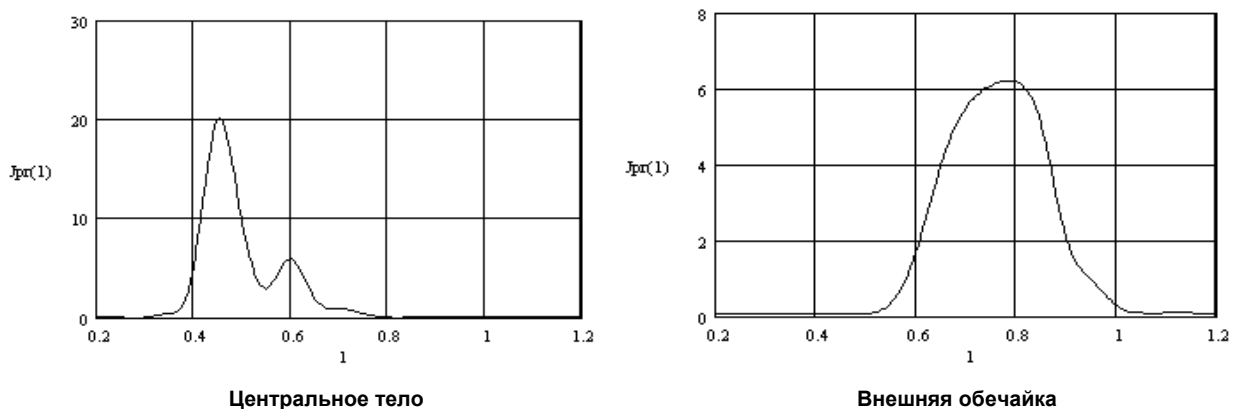
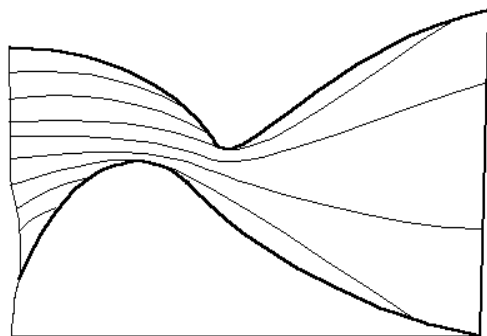


Рис. 3. Распределение импульса осаждения J_{pr} (%) по длине сопла

Результаты численного моделирования показали, что для выбранной конфигурации кольцевого сопла характерно большее осаждение частиц на центральное тело, при этом величина потери тяги в сечении $x = 0,4$ составила $\sim 20\%$. Осаждение частиц на обечайку было гораздо меньшим, происходило несколько дальше по тракту сопла, величина потери тяги в сечении $x = 0,8$ составила $\sim 7,2\%$. Проинтегрировав величины импульса осаждения по всем поверхностям сопла, легко получить величину потери тяги вследствие осаждения частиц. Следует также отметить, что на величину импульса осаждения частиц существенное влияние оказывает конфигурация сопла. Поэтому задача минимизации потерь тяги в двухфазном потоке должна решаться совместно с задачей нахождения оптимальной конфигурации кольцевого сопла.

Исследованы траектории движения частиц полидисперсной конденсированной фазы в условиях сложной геометрической конфигурации и значительных градиентов газодинамических параметров. Траектории частиц в кольцевом сопле имеют более сложный вид, чем в сопле Лавала, вследствие наличия двух обтекаемых поверхностей: внешней обечайки и центрального тела.



На рис. 4 представлены некоторые из траекторий частиц размером $d = 5$ мкм в сопле рассматриваемой конфигурации.

Рис. 4. Траектории частиц размером $d = 5$ мкм в кольцевом сопле

Как известно, форма траекторий частиц конденсированной фазы в многокомпонентном потоке существенно зависит от размера частиц. Предельные траектории частиц, определяющие место выпадения частиц на стенки сопла, таковы, что каждая фракция имеет свою область осаждения [4, 5, 9], при этом в дозвуковой части сопла сначала осаждаются более крупные фракции, затем мелкие фракции, а в сверхзвуковой части сначала мелкие, затем более крупные. Расчеты потерь удельного импульса из-за осаждения частиц (в дальнейшем «импульса осаждения частиц») на поверхности кольцевого сопла (принято, что частицы «прилипают» к стенкам сопла и передают им свой импульс полностью, что наиболее полно соответствует условиям течения конденсированной фазы в соплах ракетных двигателей [1]) показывают, что в сопле данной конфигурации импульс осаждения на внешнюю обечайку составляет $\sim 5,3\%$, на центральное тело $\sim 8,4\%$ от суммарного импульса потока. Общие потери импульса составляют $\sim 13,7\%$, причем основные потери ($\sim 90\%$) приходятся на сверхзвуковую часть сопла, где частицы уже имеют значительную скорость.

Результаты математического моделирования получены с применением высокопроизводительных вычислений на суперкомпьютере «СКИФ-Аврора ЮУрГУ» с производительностью до 117 TFlops.

Работа выполнена за счет субсидий на финансовое обеспечение государственного задания «Научные основы разработки управляемых газоструйных систем».

Литература

1. Карташев, А.Л. Математическое моделирование течений в кольцевых соплах: моногр. / А.Л. Карташев, М.А. Карташева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2011. – 158 с.
2. Карташев, А.Л. Математическое моделирование двухфазных течений в кольцевых соплах / А.Л. Карташев, Б.М. Тюлькин // Ракетно-космическая техника. Серия XIV. – 2001. – Вып. 2 (47). – С. 51–59.
3. Карташев, А.Л. Исследование особенностей движения многофазных сред в кольцевых соплах / А.Л. Карташев // Тезисы Международной конференции «VI Забалахинские научные чтения», 24–28 сент. 2001 г. – Снежинск, 2001. – С. 30–31.
4. Газовая динамика двухфазных течений в соплах / И.М. Васенин, В.А. Архипов, В.Г. Бутов и др. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1986. – 262 с.

5. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами / Л.Е. Стернин, Б.Н. Маслов, А.А. Шрайбер и др. – М.: Машиностроение, 1980. – 176 с.
6. Вилунов, В.Н. Моделирование двухфазного течения смеси газа с горящими частицами металла в полузамкнутом канале / В.Н. Вилунов, А.Б. Ворожцов, Ю.В. Феценко // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 24, № 3. – С. 39–43.
7. Архипов, В.А. Эффекты динамического взаимодействия конденсированных частиц в камере сгорания РДТТ / В.А. Архипов, А.С. Ткаченко, В.Ф. Трофимов // Физика горения и взрыва. – 1999. – Т. 35, № 2. – С. 41–46.
8. Сарнер, С. Химия ракетных топлив / С. Сарнер. – М.: Мир, 1969. – 488 с.
9. Рычков, А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах / А.Д. Рычков. – Новосибирск: Наука, 1988. – 224 с.

Карташев Александр Леонидович. Доктор технических наук, профессор кафедры «Летательные аппараты и автоматические установки», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск). Тел.: 8 (351) 267-94-61; al_kartashev@mail.ru.

Карташева Марина Анатольевна. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Летательные аппараты и автоматические установки», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск). Тел.: 8 (351) 267-94-61; ma_kartasheva@mail.ru.

**Bulletin of the South Ural State University
Series "Mechanical Engineering Industry"
2013, vol. 13, no. 2, pp. 37–46**

MATHEMATICAL MODELLING OF FLOWS OF MULTIPHASE MEDIUMS IN ANNULAR NOZZLES

*A.L. Kartashev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,
al_kartashev@mail.ru,*

*M.A. Kartasheva, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,
ma_kartasheva@mail.ru*

The flows of multiphase mediums in annular nozzles of controlled gas-jet systems of different geometric configurations for different operating regime are considered. The approach for modeling of flows of multiphase mediums in annular nozzles with complex shock-waves structure are proposed. The results of numerical investigations of dynamic of multiphase mediums in annular nozzles are obtained.

Keywords: annular nozzle, controlled gas-jet system, mathematical modelling, multiphase medium.

Поступила в редакцию 21 июня 2013 г.