УДК 621.01

ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ СТРУКТУРЫ, СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И НАПРАВЛЕННЫЙ СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ (САМОУСТАНАВЛИВАЮЩИХСЯ) МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.И. Пожбелко

Статья содержит единую теорию структуры, общие закономерности строения, универсальные структурные формулы и математические модели для анализа числа степеней свободы (DOF) и направленного структурного синтеза на основе целочисленных решений разнообразных семейств плоских и пространственных, однородных и неоднородных самоустанавливающихся многозвенных механических систем оптимальной структуры для разных областей машиностроения (одно- и многоподвижные механизмы, фермы, незамкнутые кинематические цепи), содержащих заданное число независимых замкнутых контуров, заданный набор многократных шарниров, а также заданное наиболее сложное звено, общее число и требуемую номенклатуру (assortments) звеньев в проектируемой механической системе. Структурный синтез и анализ статически определимых механических систем выполняется без применения групп Ассура и не требует традиционного подсчёта всего множества кинематических пар.

Ключевые слова: структурный синтез и анализ, число степеней свободы (DOF), шарнирные механические системы, фермы, структурная математическая модель, коды правильного строения, плоские и пространственные механизмы.

1. Постановка задачи и предлагаемый путь её решения

Из многолетней практики конструирования [1] установлено, что наиболее перспективными в современном машиностроении и различных областях техники являются *статически определимые* механические системы, которые обладают *свойством самоустанавливаемости* звеньев (что снижает их нагруженность при температурных и силовых деформациях, а также при погрешностях изготовления и сборки), отличаются уменьшенным трением и износом, более равномерным распределением нагрузок и увеличенным в несколько раз сроком службы. Именно статически определимые механизмы и фермы являются *оптимальными структурами* [11, 12], так как имеют правильное строение [3, 21–23] с «нормальным» [24] соотношением между числом звеньев, числом связей и числом степеней подвижности, а их создание и представляет (согласно [3]) *оптимальный структурный синтез.*

Структурный синтез и анализ являются [1–24] первичными и наиболее ответственными этапами создания надёжно работающих механических систем различного назначения (приводы машин, фермы, роботы, манипуляторы) для разных областей техники – по критерию отсутствия в них избыточных связей (получаются статически определимые системы). Основной исходной отличительной характеристикой различных механических систем является число их степеней свободы W (DOF [15]) после сборки, которое равно: $W=0$ – фермы; $W=1$, $W=2$, $W=3$ – соответственно одно- , двух- и трёхподвижные механизмы. Аналитическая зависимость между W и структурными параметрами проектируемой системы – в виде «структурной формулы подвижности» является *обязательным* компонентом любого структурного анализа и синтеза [1–24], а степень охвата ею всего возможного многообразия строения многозвенных систем с заданным W и определяет результативность данной процедуры.

В теории механизмов и механике машин при структурном анализе и синтезе многозвенных механизмов для определения числа их степеней свободы (DOF [15]) с 1869 года применяются структурная формула одноподвижных механизмов П.Л. Чебышева [3, 22–24] и тождественные ей критерии А. Клейна [14] и М. Грюблера [15], которые имеют следующие органические недостатки:

а) не отражают всех структурных особенностей плоских и пространственных многозвенных статически определимых кинематических цепей;

б) требуют трудоёмкого подсчёта всего множества кинематических пар и звеньев и дают ошибочный результат при анализе не только сложных неоднородных механизмов, но и при исследовании конструктивно более простых четырёхзвенных шарнирных пространственных механизмов Беннета и Брикарда [1];

в) являются неинформативными о требуемом выполнении отдельных звеньев статически определимых систем, из-за чего структурный синтез перспективных самоустанавливающихся механизмов становится вообще неопределённым и кажется бесконечным (непредсказуемым).

Рассмотрим возможности устранения указанных недостатков (препятствующих разработке рациональных алгоритмов структурного анализа и структурного синтеза различных механических систем) – за счёт применения в современной теории механизмов и машин предложенной автором в разных равнозначных вариантах [5, 6, 10] новой структурной формулы подвижности, применяемой ниже для решения различных прикладных задач механики.

В связи с этим на основе структурных математических моделей [5, 10–12] предлагается перейти к более наглядному геометрическому представлению механической системы в виде расчётного требуемого конечного набора (assortments) одно- и многовершинных (многошарнирных) звеньев и многократных шарниров, гарантированно образующих (после их сборки между собой) статически определимую многозвенную систему заданной подвижности (DOF), содержащую: заданное число независимых замкнутых контуров K и требуемый набор многократных шарниров с заданным ограничением наибольшей сложности используемых звеньев (например, в пределах числа ($K+1$) осей шарниров на каждом из них) [11].

2. Общие структурные формулы и математические модели строения статически определимых механических систем

Представленные на основе общей структурной теории [6–12] универсальные аналитические зависимости отражают особенности возможного строения открытых ($K=0$) и замкнутых ($K \geq 1$) статически определимых механических систем разного уровня сложности ($Y = K - 1 \geq -1$) – неоднородных ($h = \text{var}$) и однородных ($h = 1...6 = \text{const}$); одно- и многоподвижных, плоских и пространственных механизмов и ферм. Выполненная формализация структуры и методика направленного структурного синтеза и анализа строения многозвенных механических систем заключается в их топологическом представлении – в виде заданной совокупности K замкнутых контуров, составленных из строго определённых расчётных наборов взаимосвязанных одно- и многошарнирных звеньев ($n_1, n_2, n_3, n_4, ..., n_{K+1}$), замыкаемых между собой посредством однократных и многократных шарниров и различных геометрических, гибких и динамических связей.

1. *Классификация замкнутых контуров и семейств механических систем*. В качестве первоочередной оценочной количественной характеристики строения замкнутых контуров многозвенных механических систем примем безразмерное целое число h, изменяющееся в интервале значений:

$$h \geq (H+1) - (g+d) = 1...6,$$

и равное количеству элементарных (вращательных, поступательных) перемещений звеньев, требуемых для полного замыкания в процессе сборки данного открытого контура в его последней кинематической паре. Слагаемые в зависимости учитывают: $H = 1...5$ – возможную подвижность кинематических пар (геометрических связей); $(g+d) = 1$ – возможное замыкание данного контура гибкими ($g \neq 0$) или динамическими связями($d \neq 0$) [6, 17].

С физической точки зрения величина $1 \leq h \leq 6$ – это число степеней свободы того пространства, в пределах которого могут происходить перемещения звеньев данной механической системы (т. е. пространства движений, в котором существует и работает данный механизм, или пространства, в котором происходят деформации звеньев данной фермы).

По величине безразмерного целого числа $h = 1...6$ разные замкнутые контуры разделим на шесть классов: I ($h=1$), II ($h=2$), III ($h=3$), IV ($h=4$), V ($h=5$) и VI ($h=6$), а однородные механические системы I типа (содержащие замкнутые контуры одного класса) – разделим соответственно на шесть семейств (номер семейства равен величине h). Неоднородные механические системы II типа (содержащие замкнутые контуры разных классов – объединим в особое седьмое семейство (и условно его обозначим $h_o = 7$).

В данной работе в диапазоне $2 \le h \le 6$ существование различных механических систем рассматривается (см. пп. 4–6) в предлагаемой новой области – *многократном* подвижном пространстве, где вдоль хотя бы одной из осей координат x, y, z в процессе сборки и работы происходит два и более *повторяющихся* элементарных перемещений звеньев, реализующих заданное безразмерное число $h = 2...6$ (в отличие от традиционно рассматриваемого пространства неповторяющихся движений [3, 15, 20].

2. *Универсальная структурная формула* (*уравнение подвижности DOF)* статически определимых неоднородных (случай «а») и однородных (случай «б») механических систем с любыми видами связей [6] примет вид:

$$а)\ W = (\tilde{n} - 1) - \sum_{h=1}^{h=6} (h-1) K_h + f ; \tag{1}$$

$$б)\ W = (\tilde{n} - 1) - (h-1) K + f , \tag{2}$$

и устанавливает следующую *общую* зависимость подвижности W от величины h (пространства, в котором существует данная механическая система) и применяемых в структуре наборов многошарнирных звеньев и многократных шарниров:

$$W = \left(\frac{h+1}{2}\right) n_1 + n_2 - \left\{ \left(\frac{h-3}{2}\right) n_3 + (h-2) n_4 + ... + \left[\left(\frac{h-1}{2}\right)(K+1) - h \right] n_{K+1} \right\} + (f - \nu - h). \tag{3}$$

Зависимость (А*) в виде суммы имеет более краткую форму записи:

$$W = \left\{ \sum_{K=0}^{K} \left[h - \left(\frac{h-1}{2}\right)(K+1) \right] n_{K+1} \right\} + (f - \nu - h). \tag{4}$$

Универсальная структурная формула подвижности (3) для отдельных семейств статически определимых механических систем после подстановки в зависимость (3) целых значений h во всём диапазоне $1 \le h \le 6$ примет следующий вид:

1) $h = 1 : W = \left(\sum_{i=1}^{K+1} n_i \right) + (f - \nu - 1);$

2) $h = 2 : W = \frac{1}{2} \left[\sum_{K=0}^{K} (3 - K) n_{K+1} \right] + (f - \nu - 2);$

3) $h = 3 : W = \left[\sum_{K=0}^{K} (2 - K) n_{K+1} \right] + (f - \nu - 3);$

4) $h = 4 : W = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{K} (5 - 3K) n_{K+1} \right] + (f - \nu - 4);$

5) $h = 5 : W = \sum_{K=0}^{K} (3 - 2K) n_{K+1} + (f - \nu - 5);$

6) $h = 6 : W = \frac{1}{2} \left[\sum_{K=0}^{K} (7 - 5K) n_{K+1} \right] + (f - \nu - 6).$

В структурных формулах (1)–(3) величина f – это число *дополнительных* степеней свободы механической системы от применения в ней вместо низших пар высших – двухподвижных (числом p_2), трёхподвижных (числом p_3), четырёхподвижных (числом p_4) и пятиподвижных (числом p_5) кинематических пар (при расчёте величины f учитываются только *независимые* относительные движения контактирующих звеньев, *возможные* в данном подвижном соединении *после сборки* замкнутых контуров данной механической системы):

$$f \le p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 4p_5 = \sum_{H=2}^{H=5} (H-1) p_H .$$

Применительно к наиболее распространенным плоским и пространственным механическим системам *третьего* семейства ($h=3$) из универсальной формулы W (3) получаем следующую новую структурную формулу подвижности (в расширенной форме записи):

$$W=\left[2n_1+\left(n_2-3\right)\right]-\left[n_4+2n_5+3n_6+...+\left(K-2\right)n_{K+1}\right]-\nu+f\ , \qquad (5)$$

более информативную для направленного синтеза и анализа на основе структурных математических моделей (примеры синтеза и анализа оптимальных структур представлены ниже).

Принятые обозначения: n_1 – число одновершинных (одношарнирных) звеньев; n_2 – число двухвершинных (двухшарнирных) звеньев; n_3 – число трёхвершинных (трехшарнирных) звеньев (в формулу (5) не входит); n_4 – число четырёхвершинных (четырехшарнирных) звеньев; n_5 – число пятишарнирных звеньев; n_6 – число шестишарнирных звеньев; n_{K+1} – число наиболее сложных ($K+1$)-вершинных (многошарнирных) звеньев (*поступательные* кинематические пары также учитываются, как одноподвижные шарниры – с бесконечным радиусом); K – число образуемых звеньями данной системы взаимно независимых замкнутых контуров; ν – приведенное число многократных шарниров, учитывающее число всех двойных шарниров (ν_2), тройных (ν_3) и т. д. $j-$кратных шарниров [8]:

$$\nu=\nu_2+2\nu_3+3\nu_4+4\nu_5+...+\left(K-1\right)\nu_K\le 2\left(K-1\right), \qquad (6)$$

В ы в о д ы. Из анализа слагаемых структурной формулы подвижности (5) следует, что в наиболее распространённых на практике плоских и пространственных механических системах третьего семейства ($h=3$) влияние на величину W применяемых различных многовершинных (многошарнирных) звеньев существенно зависит от их строения следующим образом:

а) число применяемых в системе трехшарнирных звеньев (n_3) вообще не влияет на величину её подвижности W ;

б) добавление одно- и двухшарнирных звеньев приводит к увеличению W ;

в) добавление более сложных звеньев (четырехшарнирных, пятишарнирных и т. д.) и многократных шарниров ($\nu=1$, $\nu=2$, … и т. д.), наоборот, приводит к снижению W .

3. *Общее число звеньев* любой механической системы ($\tilde{n}$) и *общее число соединяющих их кинематических пар* (p) (геометрических связей с любым числом накладываемых ими ограничений) можно представить [10] в виде следующих универсальных зависимостей взаимосвязанных между собой одношарнирных и многошарнирных звеньев, образующих с учётом многократных шарниров (6) следующие *конечные* арифметические ряды:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{n}=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+...+n_{K+1};\\&p=0{,}5\left[n_1+2n_2+3n_3+4n_4+5n_5+6n_6+...+\left(K+1\right)n_{K+1}+\nu\right]\end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

однозначно ограниченные заданным числом замкнутых контуров K (т. е. задаваемым уровнем сложности $Y=K-1$ синтезируемой механической системы).

4. *Определитель D целевой функции структурного синтеза* статически определимых механических систем получается преобразованием новой универсальной структурной формулы подвижности (1) к общему виду (8) – для синтеза неоднородных систем, или аналогичной формулы (2) к общему виду (9) – для синтеза однородных систем:

а) $$D=\left(\tilde{n}-1\right)-\sum_{h=1}^{h=6}\left(h-1\right)K_h-W+f=0\,; \qquad (8)$$

б) $$D=\left(\tilde{n}-1\right)-\left(h-1\right)K-W+f=0\,, \qquad (9)$$

где $f\le p_2+2p_3+3p_4+4p_5$ – учитывает *дополнительное* число степеней свободы механической системы от применения в ней многоподвижных кинематических пар ($H>1$).

Аналогичным преобразованием (переносом всех слагаемых в левую часть уравнения новой структурной формулы подвижности (3) – получаем аналитическую зависимость определителя *целевой функции структурного синтеза оптимальных структур* $D=0$:

а) *в общем* виде для любого из семейств однородных статически определимых механических систем ($h=1...6$):

$$D=\left(\frac{h+1}{2}\right)n_1+n_2+\left\{\left(\frac{h-3}{2}\right)n_3+...+\left[\left(\frac{h-1}{2}\right)(K+1)-h\right]n_{K+1}\right\}-(W+\nu+h)+f=0; \qquad (10)$$

б) для плоских и пространственных механизмов и ферм *третьего* семейства ($h=3$):

$$D=(2n_1+n_2)-\left[n_4+2n_5+3n_6+...+(K-2)n_{K+1}\right]-(W+\nu+3)+f=0.$$

П о я с н е н и е. При анализе правильности строения данной механической системы целевая функция $D=0$ указывает на отсутствие дефектов структуры исследуемого механизма ($W\geq 1$) или фермы ($W=0$), а величина $D\neq 0$ указывает на наличие и ***точно определяет*** число избыточных связей (случай $D<0$) или лишних неуправляемых подвижностей (случай $D>0$).

5. *Структурная математическая «VIP-модель»* в общем виде для любого из семейств статически определимых механических систем представляет совместную систему линейных алгебраических уравнений (3), (6), (7), (10) вида:

$$\left.\begin{aligned}&D=\left(\frac{h+1}{2}\right)n_1+n_2-\left\{\left(\frac{h-3}{2}\right)n_3+...+\left[\left(\frac{h-1}{2}\right)(K+1)-h\right]n_{K+1}\right\}-(W+\nu+h)+f=0;\\&\nu=\nu_2+2\nu_3+3\nu_4+4\nu_5+5\nu_6+...+(K-1)\nu_K\leq n_1+2(K-1);\\&\tilde{n}=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+...+n_{K+1}=(W+1)+(h-1)K-f\end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

В частном случае – для механических систем *третьего* семейства ($h=3$) совместная система уравнений (11) примет (более простой и удобный для нахождения всех целочисленных решений направленного синтеза) вид:

$$\left.\begin{aligned}&D=(2n_1+n_2)-\left[n_4+2n_5+3n_6+...+(K-2)n_{K+1}\right]-(W+\nu+3)+f=0;\\&\nu=\nu_2+2\nu_3+3\nu_4+4\nu_5+5\nu_6+...+(K-1)\nu_K\leq n_1+2(K-1);\\&\tilde{n}=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+...+n_{K+1}=(W+1)+2K-f\end{aligned}\right\}, \qquad (12)$$

всё конечное множество целочисленных решений которых при заданных значениях $W=1$, $h=3$, $H=1$, $f=0$ ($K=1$, $K=2$, $K=3$, $K=4$, $K=5$) представляет все различные возможные типы строения в виде наборов конкретных значений ν, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6. Данные наборы систематизированы в виде сводной табл. 1.

Представленные в табл. 1 целочисленные структурные решения охватывают как механические системы, не имеющие многократных шарниров ($\nu=0$), так и механические системы с многократными шарнирами ($\nu\neq 0$) – это позволяет *утверждать,* что в области решений $D=0$ (и *независимо* от величины W – согласно представленным в работе [11] аналогичным универсальным структурным табл. 3–5 для статически определимых многоподвижных механизмов с $W=2$, $W=3$ и ферм с $W=0$) существует только:

а) 1 *вариант* кода строения (один тип структуры) одноконтурных 4-звенных механизмов;

б) 3 *варианта* кодов строения (типов структуры) двухконтурных 6-звенных механизмов;

в) 9 *вариантов* кодов строения трехконтурных 8-звенных механизмов;

г) 23 *варианта* кодов строения четырехконтурных 10-звенных механизмов;

д) 53 *варианта* кодов строения пятиконтурных 12-звенных механизмов. Все плоские и пространственные структуры в табл. 1 содержат только одноподвижные соединения звеньев $H=1$.

У т в е р ж д е н и е. Из анализа третьего уравнения структурной математической «VIP-модели» (12) следует необходимое условие синтеза плоских и пространственных ($h=3$) статически определимых (самоустанавливающихся) механических систем с *одноподвижными* кинематическими парами (шарнирно-рычажных и клиновых): при заданном *нечётном* значении W – общее число звеньев системы должно быть *чётным*, а при заданном *нулевом* или *чётном* значении W – общее число звеньев системы должно быть *нечётным*.

6. Предлагаемый *цифровой код строения механической системы* в виде конкретного набора структурных параметров:

$$\frac{n_2n_3n_4n_5n_6...n_{K+1}}{\nu}=\frac{n_2n_3n_4n_5n_6...n_{K+1}}{\nu_2\cdot\nu_3\cdot\nu_4\cdot\nu_5...\nu_K} \qquad (13)$$

Таблица 1

Универсальная структурная таблица расчётных стандартных кодов правильного строения одноподвижных механизмов

$W = 1, h = 3, H = 1$													
	$K = 1$ ($\tilde{n}$ =4)	$K = 2$ ($\tilde{n}$ =6)			$K = 3$ (9 кодов строения $\tilde{n}$ =8)								
ν	0	0	1	2	0	0	0	1	1	2	2	3	4
n_2	4	4	5	6	4	5	6	5	6	6	7	7	8
n_3	–	2	1	0	4	2	0	3	1	2	0	1	0
n_4	–	–	–	–	0	1	2	0	1	0	1	0	0

$K = 4$ (23 кодов строения $\tilde{n}$ = 10)																							
ν	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6
n_2	4	5	6	6	7	7	8	5	6	7	7	8	6	7	8	8	7	8	9	8	9	9	10
n_3	6	4	2	3	0	1	0	5	3	1	2	0	4	2	0	1	3	1	0	2	0	1	0
n_4	0	1	2	0	3	1	0	0	1	2	0	1	0	1	2	0	0	1	0	0	1	0	0
n_5	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0

$W = 1, h = 3, H = 1$																										
$K = 5$ (53 кодов строения $\tilde{n}$ = 12)																										
ν	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n_2	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	10	5	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10
n_3	8	6	4	5	2	3	4	0	1	2	2	0	0	1	0	7	5	3	4	1	2	3	0	1	1	0
n_4	0	1	2	0	3	1	0	4	2	0	1	1	2	0	0	0	1	2	0	3	1	0	2	0	1	0
n_5	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	2	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	2	0	1
n_6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

$K = 5$ (продолжение)																											
ν	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8
n_2	6	7	8	8	9	9	9	10	10	7	8	9	9	10	10	8	9	10	10	11	9	10	11	10	11	11	12
n_3	6	4	2	3	0	1	2	0	0	5	3	1	2	0	1	4	2	0	1	0	3	1	0	2	0	1	0
n_4	0	1	2	0	3	1	0	0	1	0	1	2	0	1	0	0	1	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0
n_5	0	0	0	1	0	1	0	2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
n_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Примечания:

1. K – число взаимно независимых изменяемых замкнутых контуров; ν – приведённое число многократных шарниров; $\tilde{n}$ – общее число звеньев механизма (включая стойку); n_2 – число двухшарнирных звеньев; n_3 – число трёхшарнирных звеньев; n_4 – число четырёхшарнирных звеньев; n_5 – число пятишарнирных звеньев; n_6 – число шестишарнирных звеньев.
2. Поступательные кинематические пары также учитываются, как одноподвижные шарниры.
3. Полная номенклатура (assortments) многократных шарниров дана в табл. 2.
4. Универсальные структурные таблицы расчётных стандартных кодов правильного строения двухподвижных механизмов $W = 2$ (табл. 3), трёхподвижных механизмов $W = 3$ (табл. 4) и статически определимых ферм $W = 0$ (табл. 5) даны в работе [11].

однозначно определяет (см. табл. 1) не только общее число звеньев системы согласно зависимости (7), но и число образуемых звеньями системы (после их сборки между собой) взаимно независимых изменяемых замкнутых контуров K (величина K будет равна количеству цифр в числителе дроби кода строения).

7. *Общее число K замкнутых взаимно независимых контуров*, в общем случае замыкаемых кинематическими парами любой подвижности (числом p), гибкими связями (числом g) и динамическими связями (числом d) – для $\tilde{n}$-звенных механических систем любой структуры определяется общей зависимостью [6]:

$$K = \left[\left(p+g+d\right)+1\right]-\tilde{n} = Y+1\,;\, Y = \left(p+g+d\right)-\tilde{n} = K-1\,, \tag{14}$$

где расчётное число гибких и динамических связей равно числу замкнутых контуров, замыкаемых этими связями в данной механической системе.

Величина K отвечает новому понятию [6] – «уровень сложности механической системы Y », равный разности суммы всех видов связей – кинематических, гибких, динамических ($p+g+d$) и общего числа звеньев ($\tilde{n}$) данной системы ($Y = K-1 = -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ...$). Уровень сложности Y является *первичной* точной количественной характеристикой сложности строения любых многозвенных систем, как с незамкнутыми, т. е. открытыми ($Y=-1 \Rightarrow K=0$), так и с замкнутыми кинематическими цепями ($Y \geq 0 \Rightarrow K \geq 1$).

Примечание. Единая теория *динамической структуры механизмов* с инерционными динамическими связями и основы их создания с заданными свойствами даны в научной монографии [17].

Таблица 2

Полный состав стандартных наборов многократных шарниров замкнутых многоконтурных кинематических цепей

$\nu = \nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + 4\nu_5 + \ldots + Y \cdot \nu_{Y+1} \leq 2Y;\ j_{max} = Y+1 = K;\ \nu_K \leq 2$

Y	Y=0, K=1	Y=1,K=2(ν_{max}=2)			Y = 2, K = 3 (ν_{max} = 4; j_{max} = 3)								
ν	ν = 0	ν = 0	ν = 1	ν = 2	ν = 0	ν = 1	ν = 2		ν = 3		ν = 4		
ν_2	–	0	1	2	0	1	0	2	1	3	0	2	4
ν_3	–	–			0	0	1	0	1	0	2	1	0

Y	Y = 3, K = 4 (ν_{max} = 6; j_{max} = 4)																						
ν	0	1	ν = 2		ν = 3			ν = 4				ν = 5					ν = 6						
ν_2	0	1	0	2	0	1	3	0	1	2	4	0	1	2	3	5	0	0	1	2	3	4	6
ν_3	0	0	1	0	0	1	0	2	0	1	0	1	2	0	1	0	0	3	1	2	0	1	0
ν_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2	0	1	0	1	0	0

Y	Y = 4, K = 5 (ν_{max} = 8; j_{max} = 5)																	
ν	ν = 0	ν = 1	ν = 2		ν = 3			ν = 4					ν = 5					
ν_2	0	1	0	2	0	1	3	0	0	1	2	4	0	1	1	2	3	5
ν_3	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	1	0	1	2	0	0	1	0
ν_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
ν_5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Y	Y = 4, K = 5 (продолжение)																			
ν	ν = 6									ν = 6										
ν_2	0	0	0	1	2	2	3	4	6	0	0	1	1	1	2	3	3	4	5	7
ν_3	0	1	3	1	0	2	0	1	0	0	2	0	1	3	1	0	2	0	1	0
ν_4	2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	2	0	0	1	0	0	1	0	0
ν_5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0

Y	Y = 4, K = 5 (продолжение)														
ν	ν = 8														
ν_2	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	4	4	5	6	8
ν_3	1	2	4	0	0	2	1	0	3	1	0	2	0	1	0
ν_4	2	0	0	0	1	1	0	2	0	1	0	0	1	0	0
ν_5	0	1	0	2	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

Примечание. Y – уровень сложности механической системы; K – число образуемых звеньями кинематической цепи взаимно независимых замкнутых контуров; ν – приведённое число многократных шарниров; j – кратность шарниров; ν_2, ν_3, ν_4, ν_5 – соответственно число двойных (двухкратных), тройных (трёхкратных), четырёхкратных и пятикратных шарниров.

8. *Общий критерий строения статически определимых* неоднородных (*а*) и однородных (*б*) механических систем имеет вид:

$$\text{а) } \tilde{n} - \sum_{h=1}^{h=6}(h-1)K_h - W + f = 1 \text{; б) } \tilde{n} - (h-1)K - W + f = 1, \qquad (15)$$

где замкнутые контуры I класса, замыкаемые гибкими или динамическими связями, образуют *однородные* механические системы первого семейства (где $h=1$), а замкнутые контуры II, III, IV, V и VI класса, замыкаемые только геометрическими связями кинематических пар, образуют *однородные* механические системы соответственно второго ($h=2$), третьего ($h=3$), четвертого ($h=4$), пятого ($h=5$) и шестого ($h=6$) семейства. Сочетание замкнутых контуров с различной величиной h образует *неоднородные* механические системы особого седьмого семейства (его условное обозначение $h_o = 7$). Согласно критерию строения (вида (15)) общее число звеньев $\tilde{n}$ любой *однородной* статически определимой механической системы с $K = K_{\min} = 1$ должно быть не менее $\tilde{n}_{\min}$ и не более $\tilde{n}_{\max}$:

$$\tilde{n}_{\min} = W + h - f \text{; } \tilde{n} = \tilde{n}_{\max} = W + \left[(h-1)K + 1\right]. \qquad (16)$$

П о я с н е н и е. Критерии вида (15) и (16) представляют собой необходимое и достаточное условие статической определимости данной механической системы и являются показателем правильности (бездефектности) её структуры. Выполнение этих критериев достигается за счёт реализации целевой функции структурного синтеза $D=0$ и означает, что данная механическая система со структурными параметрами $h, K, \tilde{n}, W$ – *в пространстве только данных значений этих параметров* является статически определимой и не содержит вредных избыточных связей.

3. Теоремы о строении и общие свойства замкнутых статически определимых механических систем ($D=0$)

Доказательство теорем следует из структурных формул (1)–(16) (см. п. 2) и подтверждается всеми (без исключения) 89 цифровыми стандартными кодами правильного строения из универсальной структурной табл. 1 (для всех 89 кодов структуры выполняется целевая функция структурного синтеза оптимальных структур $D=0$).

Теорема I. Замкнутая механическая система должна обязательно содержать двухвершинные (двухшарнирные) звенья, минимальное количество которых зависит от величины $h=1...6$ семейства данной системы, от задаваемой её подвижности W и числа применяемых многократных шарниров, максимальное количество которых равно общему числу звеньев системы $\tilde{n}$:

$$\tilde{n} \ge n_2 \ge h + W + \nu \text{; } n_{2\min} = h + W + \nu \text{; } n_{2\max} = \tilde{n}.$$

Теорема II. Число шарниров на одном звене i, посредством которых собирается замкнутая одноподвижная механическая система, а также общее число звеньев системы $\tilde{n}$ должно быть ограничено в зависимости от числа K изменяемых замкнутых контуров механической системы в пределах, равных ($K+1$):

$$i \le K+1 \text{; } K = \frac{\tilde{n} - (W+1)}{h-1} \text{; } i_{\max} = K + 1 = \frac{(\tilde{n} - W) + (h-2)}{h-1} \text{; } \tilde{n} = n_2 + n_3 + n_4 + ... + n_{K+1}.$$

Теорема III. Число наиболее сложных многовершинных (многошарнирных) звеньев должно быть не более одного – в структуре механических систем с простыми и многократными шарнирами ($\nu \ne 0$) и не более двух – в структуре механических систем только с простыми (однократными) шарнирами ($\nu = 0$): $n_{K+1} = 0;1$, ($\nu \ne 0$); $n_{K+1} = 0;1;2$, ($\nu = 0$).

Доказательство теоремы представлено в работе [11] и подтверждается всеми кодами правильного строения в сводных расчётных табл. 1–5 [11].

Теорема IV. Общее приведённое число многократных шарниров ν должно быть ограничено в зависимости от числа возникающих в механической системе взаимно независимых замкнутых контуров K:

$$\nu = \nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + 4\nu_5 + ... + (j-1)\nu_j \le 2(K-1),$$

а наибольшая кратность j шарниров равна числу K: $j_{\max} = K$.

Теорема V. Общее число звеньев $\tilde{n}$ замкнутой статически определимой механической системы с *одноподвижными* кинематическими парами должно выбираться из разных арифметических рядов чётных или нечётных чисел:

а) число звеньев статически определимых *плоских* ферм ($W = 0,\ h = 3$) должно быть *нечётным* – независимо от количества замкнутых контуров K;

б) число звеньев плоских и пространственных механизмов, существующих в пространствах движений $h = 1, h = 3, h = 5$ – при задаваемых *нечётных* значениях W $(W = 1, W = 3, W = 5, \ldots)$ значение $\tilde{n}$ должно быть *чётным* ($\tilde{n} = 4$, $\tilde{n} = 6$, $\tilde{n} = 8$, …); а при задаваемых *чётных* значениях W ($W = 2$, $W = 4, \ldots$) – значение $\tilde{n}$ должно быть *нечётным*;

в) число звеньев плоских и пространственных механизмов, существующих в пространствах движений $h = 2, h = 4, h = 6$ – должно быть *нечётным* (при $\left[W + (h-1)K\right] \Rightarrow$ *чётное*) или *чётным* (при $\left[W + (h-1)K\right] \Rightarrow$ *нечётное*).

Теорема VI. Во всём возможном диапазоне семейств плоских и пространственных механических систем ($h = 1, h = 2, h = 3, h = 4, h = 5, h = 6$) только в двух семействах ($h = 2$ и $h = 3$) возникает необычное *свойство независимости подвижности системы* от количества определённого вида звеньев:

а) от числа n_3 трёхвершинных (трёхшарнирных) звеньев в составе систем *третьего* семейства ($h = 3$) – эта независимость W возникает только в системах с увеличенным числом взаимно независимых замкнутых контуров $K \geq 2$;

б) от числа n_4 четырёхвершинных (четырёхшарнирных) звеньев в составе систем второго семейства ($h = 2$) – эта независимость W возникает только в системах с увеличенным числом взаимно независимых замкнутых контуров $K \geq 3$.

Доказательство теоремы – следует из анализа общей формулы подвижности (3) во всём диапазоне возможных значений $h = 1...6$.

Литература

1. Крайнев, А.Ф. Механика машин: справ. / А.Ф. Крайнев. – М.: Машиностроение, 2000. – 904 с.

2. Пейсах, Э.Е. Система проектирования плоских рычажных механизмов / Э.Е. Пейсах, В.А. Нестеров. – М.: Машиностроение, 1988. – 232 с.

3. Кожевников, С.Н. Основания структурного синтеза механизмов / С.Н. Кожевников. – Киев: Наука, 1979. – 232 с.

4. Смелягин, А.И. Структура механизмов и машин / А.И. Смелягин. – Новосибирск: НГТУ, 2001. – 286 с.

5. Пожбелко, В.И. Теория структуры механических систем / В.И. Пожбелко // Методы решения задач синтеза механизмов. – Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1993. – С. 19–56.

6. Пожбелко, В.И. Универсальная структурная формула подвижности и классификация механических систем любой структуры / В.И. Пожбелко // Известия вузов. Машиностроение. – 2000. – № 1–2. – С. 3–10.

7. Пожбелко, В.И. Структурный синтез и анализ механических систем произвольной структуры заданного уровня сложности / В.И. Пожбелко // Известия вузов. Машиностроение. – 2000. – № 5–6. – С. 13–25.

8. Пожбелко, В.И. Формализация структурного анализа и синтеза механизмов с кинематическими, гибкими и динамическими связями / В.И. Пожбелко // Известия вузов. Машиностроение. – 2006. – № 11. – С. 3–15.

9. Пожбелко, В.И. Возникновение переменной (изменяемой) структуры и расчёт размеров области особых (неуправляемых) положений механизма с учётом зазоров и вырождения кинематических пар / В.И. Пожбелко // Теория механизмов и машин. – 2010. – № 2, т. 8. – С. 71–80.

10. Пожбелко, В.И. Структурный анализ и синтез плоских механизмов заданного уровня сложности по универсальной структурной таблице стандартных кодов строения / В.И. Пожбелко // Теория механизмов и машин. – 2012. – № 1(19), т. 10. – С. 24–45.

11. Пожбелко, В.И. Направленный синтез оптимальных структур плоских механических систем с совмещёнными шарнирами (механизмы, фермы, группы Ассура, роботы). Ч. 1 / В.И. Пожбелко // Теория механизмов и машин. – 2012. – № 2 (20), т. 10. – С. 77–98.

12. Пожбелко, В.И. Направленный синтез оптимальных структур плоских механических систем с многократными шарнирами / В.И. Пожбелко // Теория механизмов и машин. – 2013. – № 1 (21), т. 11. – С. 10–22.

13. Пожбелко, В.И. Алгоритм быстрого структурного анализа и направленного синтеза самоустанавливающихся механизмов современного машиностроения на основе новой формулы подвижности / В.И. Пожбелко // Современное машиностроение. Наука и образование: материалы 3-й Междунар. науч.-практ. конф., 20–21 июня 2013 г. / под ред. М.М. Радкевича и А.Н. Евграфова. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2013. – С. 20–34.

14. Ballaney, P.L. Theory of Machines / P.L. Ballaney. – Delhi: Khanna Publishers, 1992. – 484 p.

15. Erdman, A.G. Mechanism Design: Analysis and Synthesis. Vol. 1 / A.G. Erdman, G.N. Sandor. – Prentice Hall (USA); Englewood Cliffs (New Jersey), 1984. – 530 p.

16. Решетов, Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы / Л.Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1979. – 334 с.

17. Пожбелко, В.И. Инерционно-импульсные приводы машин с динамическими связями (единая теория и методы создания с заданными динамическими свойствами) / В.И. Пожбелко. – М.: Машиностроение, 1989. – 136 с.

18. Галиуллин, И.А. О применении механизма Брикарда и его модификаций / И.А. Галиуллин // Проблемы механики современных машин: материалы V междунар. конф., 25–30 июня 2012 г. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2012. – С. 11–14.

19. Глинка, Н.Л. Общая химия. Кристаллическое строение тела / Н.Л. Глинка. – Л.: Химия, 1986. – 704 с.

20. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Совет. энцикл., 1988. – 847 с.

21. Пожбелко, В.И. Теория механизмов и машин в вопросах и ответах / В.И. Пожбелко, В.А. Лившиц. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 439 с.

22. Механика машин / И.И. Вульфсон, М.З. Коловский, Ю.В. Семёнов, А.В. Слоущ. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.

23. Теория механизмов и механика машин / К.В. Фролов, С.А. Попов, Г.А. Тимофеев, А.К. Мусатов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 664 с.

24. Теория механизмов и машин / М.З. Коловский, А.Н. Евграфов, Ю.А. Семёнов, А.В. Слоущ. – М.: Издат. центр «Академия», 2006. – 560 с.

Пожбелко Владимир Иванович. Доктор технических наук, профессор, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск), pozhbelkovi@susu.ac.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mechanical Engineering Industry"
2013, vol. 13, no. 2, pp. 47–57

A COMPLETE THEORY OF STRUCTURE, STRUCTURAL ANALYSIS AND SINTHESIS OF STATIC-DEFINITE (SELF-ALIGNING) MECHANICAL SYSTEMS

***V.I. Pozhbelko**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,*
pozhbelkovi@susu.ac.ru

The paper presents offered the original structural theory defining number of degrees of freedom 1-DOF and many-DOF mechanisms and synthesis of the complicated planar and spatial multi-link mechanical systems with simple and complex frequent pin-joints, which consist in its geometrical representation as a finite multitude various many-hinge levers (link and pin-joints assortments). Then made calculating by a new author's mobility equation and next its combining in the close static-definite kinematic chain by simple directed design algorithm on base of all whole-numeration solutions of structural mathematical modeling various mechanical systems without redundant constrain (includes generalized kinematic chains for mechanisms and rigid chains for frameworks and clamping devices).

Keywords: structural synthesis and analysis, degrees of freedom (DOF), hinge mechanical systems, frameworks, planar and simple spatial mechanisms, structural mathematical model, universal table of standard codes.

Поступила в редакцию 21 июня 2013 г.