

# Расчет и конструирование

УДК 621.833.15

DOI: 10.14529/engin230101

## РАСЧЕТ ГЕОМЕТРО-КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАЦЕПЛЕНИЯ АРОЧНЫХ ЗУБЬЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ ПРИ ПОГРЕШНОСТЯХ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ

*А.И. Стариков, В.Н. Сызранцев*

*Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, Россия*

Использование цилиндрических передач с арочными зубьями в приводах энергонасыщенных машин (локомотивов, бортовых редукторов тракторов, верхних приводов буровых установок, вертолетов) позволяет по сравнению с прямозубыми и косозубыми колесами кратно увеличить долговечность передач. К настоящему времени предложено полтора десятка различных приемов и методов проектирования и производства арочных зубьев цилиндрических колес. Среди них перспективным является способ нарезания арочных зубьев на станках ЧПУ круговыми резовыми головками методом обкатки с единичным делением. Цель статьи – на основе теории пространственных зацеплений реализовать построение математических моделей формообразования арочных зубьев и исследовать геометро-кинематические характеристики их зацепления в условиях ненулевых погрешностей относительного положения колеса и шестерни в передаче. Объект исследования – цилиндрическая передача с арочными зубьями. В статье получены зависимости для радиусов-векторов и ортов нормалей поверхностей арочных зубьев цилиндрических колес, разработана математическая модель для расчета точек касания арочных зубьев в зацеплении при наличии угла перекоса, угла непараллельности и смещения колеса. На примере конечной передачи локомотива впервые исследовано влияние плотности прилегания поверхностей зубьев в зацеплении на смещение рабочих линий из среднего сечения зуба вследствие погрешностей положения элементов передачи. Путем расчета погрешности функции положения в передаче рассмотрена процедура количественной оценки ее несопряженности. Установлено, что геометрия арочных зубьев исследуемого способа в условиях отклонения положений элементов передачи от номинальных приводит к несопряженности зацепления, функция погрешности положения имеет пилообразную форму, вследствие чего неизбежны удары при входе зубьев в зацепление. Предложены пути достижения в рамках рассматриваемого способа изготовления арочных зубьев приближенного характера зацепления зубьев в передаче.

*Ключевые слова: цилиндрические передачи, арочные зубья, геометрия, рабочие линии, передаточная функция.*

### Введение

Цилиндрические зубчатые передачи с арочными зубьями, представленные на рис. 1а, при эксплуатации в нежестких корпусах моделей энергонасыщенной техники (например, при эксплуатации передач верхних приводов буровых машин; конечных передач локомотивной техники; передач бортовых редукторов аграрной техники; приводов вертолетов; шестеренчатых насосов) обеспечивают, в отличие от косозубых и прямозубых колес, увеличение надежности и долговечности передач по показателям контактной и изгибной выносливости зубьев [1]. Несмотря на это, в приводах машин они используются крайне редко. Основной причиной этого является отсутствие специализированного зуборезного оборудования для производства цилиндрических колес, которые применяются в арочных цилиндрических зубчатых передачах [1, 2]. К настоящему времени предложено полтора десятка различных приемов и методов проектирования и производства арочных зубьев цилиндрических колес [1–14], отличающихся применяемыми инструментами и формообразующими движениями. Основой многих из разработанных способов являются способы нарезания криволинейных зубьев конических колес [15, 16], хотя известны и оригинальные

## Расчет и конструирование

[1, 5, 7, 11], применяемые лишь для металлообработки исследуемого типа зубьев. В отличие от иных цилиндрических передач с косыми и прямыми зубьями, различные способы формообразования которых обеспечивают практически одинаковую геометрию поверхностей зубьев, геометрические параметры главных поверхностей арочных зубьев существенно зависят от способа их формообразования и принципиально изменяют геометро-кинематические характеристики зацепления зубьев в передаче. Анализ известных приемов и методов производства исследуемого типа зубьев свидетельствует [1, 2], что наибольшие перспективы промышленной реализации имеет метод получения зубьев, который реализуется резцовыми круговыми головками обкатом с периодическим делением, как показано на рис. 1б. Реализация способа возможна на четырех координатных станках с числовым программным управлением, при этом необходимый зуборезный инструмент широко используется при нарезании круговых зубьев конических колес по схеме Глисон как на отечественных, так и на зарубежных зуборезных станках [1, 2, 6, 10, 11, 13].

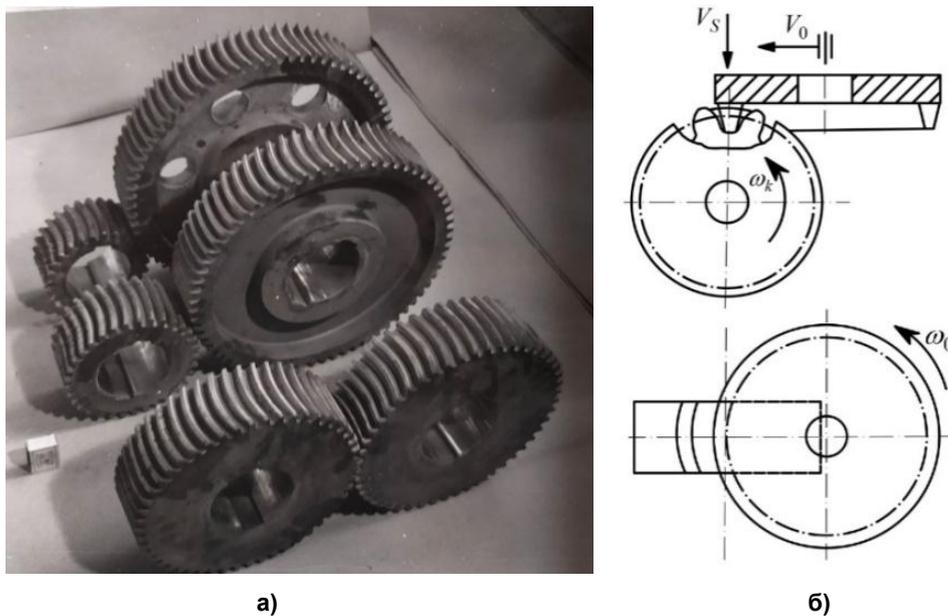


Рис. 1. Передачи с арочными зубьями (а) и расчетная схема (б) нарезания зубьев резцовой головкой

Следуя приведенной на рис. 1б схеме, главная поверхность арочного зуба цилиндрического колеса является однопараметрической огибающей семейства производящей поверхности инструмента [1] в относительном движении, при этом геометрические особенности поверхностей зубьев могут быть вскрыты лишь при использовании теории пространственных зацеплений. Однако в большинстве работ [10, 11, 13], посвященных процессу формообразования арочных зубьев колес данным способом, отмеченное обстоятельство не учитывается, поскольку построение моделей выполняется в рамках теории плоских зацеплений. Отсутствуют данные по исследованию геометро-кинематических характеристик зацепления арочных зубьев при работе передачи в условиях различных погрешностей взаимного положения шестерни и колеса, что не позволяет реализовать процесс проектирования цилиндрических передач с арочными зубьями с учетом условий их работы в эксплуатации.

Цель статьи – на основе теории пространственных зацеплений реализовать построение математических моделей формообразования арочных зубьев режущим инструментом (круговая и резцовая головка) методом обката с периодическим делением и исследовать геометро-кинематические характеристики их зацепления в условиях ненулевых погрешностей относительного положения колеса и шестерни в передаче.

### Математические модели процесса формообразования главных поверхностей арочных зубьев шестерни и колеса

В представленном способе обработке арочных зубьев колеса инструментом является круговая резцовая головка (рис. 1б), которая вращается вокруг собственной оси с необходимой для

процесса резания скоростью. В результате процесса резания исследуемого типа зубьев инструмент согласованно с вращением заготовки колеса осуществляет поступательное перемещение в направлении, перпендикулярном оси вращения колеса [1, 2, 9–11]. Деление происходит после обработки впадины зуба колеса. Далее выполняется поворот заготовки колеса на величину оборота, кратного угловому шагу зубьев колеса, инструмент и заготовка колеса возвращаются в исходное положение, и процесс циклически повторяется для нарезания последующих впадин зуба колеса. Описанный процесс формообразования главной поверхности арочного зуба соответствует зацеплению зуба производящей рейки, поверхность которого представляет собой прямой круговой конус, с зубом нарезаемого колеса (шестерни) и реализует метод обката с единичным делением. В данном случае главная поверхность арочного зуба является однопараметрической огибающей семейства поверхностей зубьев производящей рейки [1, 2]. В разрабатываемых далее моделях используем нижний индекс 2 для параметров выпуклой поверхности арочного зуба колеса и нижний индекс 1 для параметров вогнутой поверхности арочного зуба шестерни.

Производящей поверхностью круговой резцовой головки в системе координат  $S_p(x_p, y_p, z_p)$ , жестко с ней связанной, является прямой круговой конус. Необходимая скорость резания в процессе формообразования арочного зуба обеспечивается вращением головки вокруг оси  $y_p$ . Поверхность прямого кругового конуса образуется вращением прямолинейной режущей кромки резца, расположенной в плоскости, проходящей через ось  $y_p$  резцовой головки, вокруг этой оси. Проекция  $x_p, y_p, z_p$  радиус-вектора  $\vec{r}_p(x_p, y_p, z_p)$  производящей поверхности резцовой головки имеют вид [3]:

$$x_p = \cos \vartheta_2 (u_2 \sin \alpha_0 - r_{g2}); \quad y_p = u_2 \cos \alpha_0; \quad z_p = \sin \vartheta_2 (u_2 \sin \alpha_0 - r_{g2}). \quad (1)$$

Здесь обозначено:  $u_2$  – линейный параметр прямолинейной кромки резцовой головки;  $\vartheta_2$  – угол поворота режущей кромки вокруг оси  $y_p$ ;  $\alpha_0$  – угол наклона режущей кромки относительно оси  $y_p$  (угол исходного производящего контура);  $r_{g2}$  – расчетный радиус резцовой головки при нарезании колеса.

Проекция  $m_{px}, m_{py}, m_{pz}$  орта нормали  $\vec{m}_p(m_{px}, m_{py}, m_{pz})$  поверхности (1) описываются выражениями [3]:

$$m_{px} = \cos \alpha_0 \cos \vartheta_2; m_{py} = -\sin \alpha_0; \quad m_{pz} = \cos \alpha_0 \sin \vartheta_2. \quad (2)$$

Чтобы определить главную поверхность выпуклой стороны исследуемого типа зубьев колеса необходимо учитывать тот факт, что она является однопараметрической огибающей семейства производящей поверхности круговой резцовой головки в заданном относительном движении, – при повороте заготовки колеса на угол  $\varphi_2$  режущий инструмент поступательно перемещается в направлении, перпендикулярном оси вращения колеса, на величину  $P_2 = \varphi_2 R_{w2} = \varphi_2 m_n z_2^*/2$ , где  $R_{w2}$  – радиус начальной окружности обрабатываемого колеса,  $m_n$  – нормальный модуль,  $z_2^*$  – число зубьев нарезаемого колеса. Резцовая головка выполнена с внутренними резцами.

С учетом [3, 15–17], главная поверхность выпуклой стороны арочного зуба цилиндрического колеса будет выглядеть как представлено ниже:

$$\vec{r}_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = \tilde{A}_{2,p}(\varphi_2) \vec{r}_p(u_2, \vartheta_2); f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0, \quad (3)$$

где  $\vec{r}_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2)$  – матрица-столбец, составленная из проекций координат  $x_2, y_2, z_2$  радиуса вектора  $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ ;  $\tilde{A}_{2,p}(\varphi_2)$  – матрица перехода четвертого порядка, описывающая переход от системы координат  $S_p(x_p, y_p, z_p)$  к системе координат  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ , жестко связанной с колесом (рис. 2);  $\varphi_2$  – угол поворота колеса при формообразовании выпуклой поверхности арочного зуба; второе уравнение в выражении (3) является уравнением связи параметров  $u_2, \vartheta_2$  и  $\varphi_2$ , – уравнение станочного зацепления [3, 15, 17].

Элементы матрицы  $\tilde{A}_{2,p}(\varphi_2)$  определим на основе рис. 2, на котором представлены используемые системы координат и переходы.

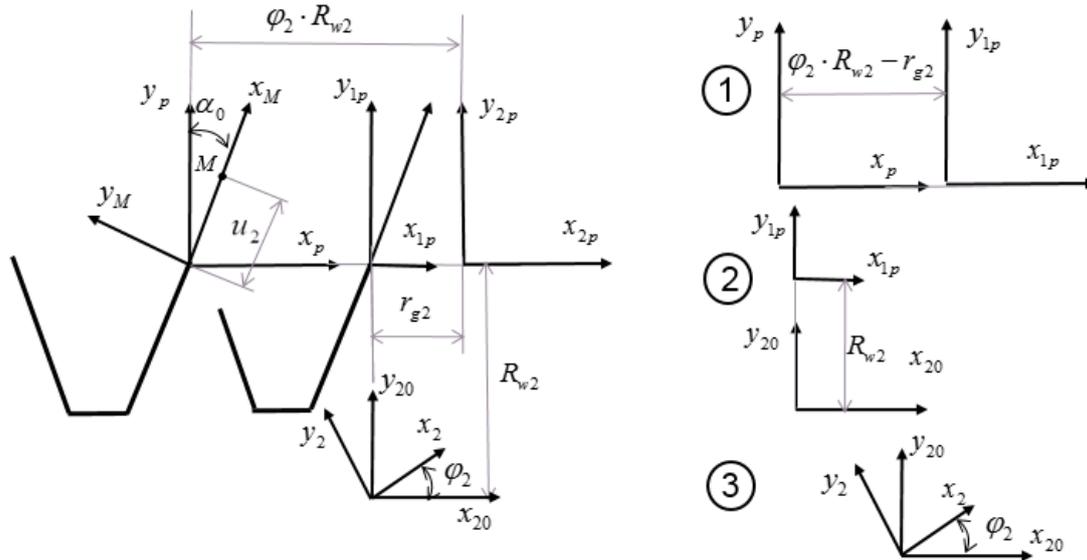


Рис. 2. Системы координат и переходы для определения элементов матрицы  $\tilde{A}_{2,p}(\varphi_2)$

Матрица  $\tilde{A}_{2,p}(\varphi_2)$  имеет вид:

$$\tilde{A}_{2,p}(\varphi_2) = \begin{vmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 & -\cos\varphi_2(\varphi_2 R_{w2} - r_{g2}) + R_{w2} \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & +\sin\varphi_2(\varphi_2 R_{w2} - r_{g2}) + R_{w2} \cos\varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

Раскрывая матричное уравнение (3) на основе (4) и (1), найдем выражения для проекций  $x_2, y_2, z_2$  радиуса вектора  $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$x_2 = A_2 \cos\varphi_2 + B_2 \sin\varphi_2; \quad y_2 = -A_2 \sin\varphi_2 + B_2 \cos\varphi_2; \quad z_2 = \sin\vartheta_2(u_2 \sin\alpha_0 - r_{g2}). \quad (5)$$

Здесь обозначено:

$$A_2 = \cos\vartheta_2(u_2 \sin\alpha_0 - r_{g2}) - \varphi_2 R_{w2} + r_{g2}; \quad B_2 = u_2 \cos\alpha_0 + R_{w2}.$$

Определим зависимости для расчета проекций координат  $m_{2x}, m_{2y}, m_{2z}$  орта нормали  $\vec{m}_2(m_{2x}, m_{2y}, m_{2z})$  главной поверхности выпуклой стороны арочного зуба цилиндрического колеса (3). Воспользуемся выражением:

$$\vec{m}_2(\vartheta_2, \varphi_2) = \tilde{A}_{2,p}(\varphi_2) \vec{m}_p(\vartheta_2), \quad (6)$$

раскрывая которое, установим:

$$m_{2x} = \cos\varphi_2 \cos\alpha_0 \cos\vartheta_2 - \sin\varphi_2 \sin\alpha_0; \quad m_{2y} = -\sin\varphi_2 \cos\alpha_0 \cos\vartheta_2 - \cos\varphi_2 \sin\alpha_0; \\ m_{2z} = \cos\alpha_0 \sin\vartheta_2. \quad (7)$$

Воспользовавшись результатами работ [3, 17], представим уравнение станочного зацепления в виде равного нулю скалярного произведения вектора  $\vec{m}_p(m_{px}, m_{py}, m_{pz})$  и вектора  $\vec{V}_{\varphi_2}(V_{2x}, V_{2y}, V_{2z})$  – вектора-аналога относительной скорости:

$$f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = \vec{m}_2 \vec{V}_{\varphi_2} = m_{2x} V_{2x} + m_{2y} V_{2y} + m_{2z} V_{2z} = 0. \quad (8)$$

Расчет проекций  $V_{2x}, V_{2y}, V_{2z}$  в системе координат  $S_p(x_p, y_p, z_p)$  выполняется на основе матричного выражения [3]:

$$\vec{V}_{\varphi_2}(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = \tilde{A}_{2,p}^{-1}(\varphi_2) \frac{d\tilde{A}_{2,p}(\varphi_2)}{d\varphi_2} \vec{r}_p(u_2, \vartheta_2), \quad (9)$$

где  $\vec{V}_{\varphi_2}(u_2, \vartheta_2, \varphi_2)$  – матрица-столбец, составленная из проекций  $V_{2x}, V_{2y}, V_{2z}$  радиуса вектора  $\vec{V}_{\varphi_2}$  на координатные оси системы  $S_p(x_p, y_p, z_p)$ ;  $\tilde{A}_{2,p}^{-1}(\varphi_2)$  – матрица, обратная матрице  $\tilde{A}_{2,p}(\varphi_2)$ .

$$\tilde{A}_{2,p}^{-1}(\varphi_2) = \left\| \begin{array}{cccc} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 & (\varphi_2 R_{w2} - r_{g2}) \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & -R_{w2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (10)$$

После дифференцирования элементов матрицы  $\tilde{A}_{2,p}(\varphi_2)$  (4) по параметру  $\varphi_2$ , учитывая (10), (5) и, раскрывая (9), определим:

$$V_{2x} = u_2 \cos\alpha_0; V_{2y} = -\cos\vartheta_2(u_2 \sin\alpha_0 - r_{g2}) + \varphi_2 R_{w2} - r_{g2}; V_{2z} = 0. \quad (11)$$

Искомое уравнение станочного зацепления получим, подставляя выражения (11) и зависимости для проекций  $m_{px}, m_{py}, m_{pz}$  (2) в формулу (8):

$$f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = \cos\vartheta_2(u_2 - r_{g2} \sin\alpha_0) - \varphi_2 R_{w2} \sin\alpha_0 + r_{g2} \sin\alpha_0 = 0. \quad (12)$$

Таким образом, для описания выпуклой поверхности арочного зуба колеса, учитывая связь (12), для расчета координат точек получены формулы (5) и формулы (7) для расчета проекций орта нормали в этих точках, определяемых значениями параметров  $u_2, \vartheta_2$  и  $\varphi_2$ .

Способ формообразования главной поверхности вогнутой стороны зуба шестерни по движениям инструмента относительно заготовки аналогичен выше рассмотренному процессу нарезания выпуклой стороны арочного зуба с учетом того, что используемая резцовая готовки имеет наружные резцы. Для определения зависимостей по расчету проекций  $x_1, y_1, z_1$  радиуса вектора  $\bar{r}_1(x_1, y_1, z_1)$  и проекций  $m_{1x}, m_{1y}, m_{1z}$  орта нормали  $\bar{m}_1(m_{1x}, m_{1y}, m_{1z})$  арочного зуба шестерни в системе координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ , жестко с ней связанной, в формулах (5), (7) и (12) необходимо заменить нижний индекс «2» на индекс «1» и параметры:  $\varphi_2 = -\varphi_1$ ;  $\vartheta_2 = \vartheta_1$ ;  $R_{2w} = -R_{1w}$ ;  $u_2 = u_1$ ;  $r_{g2} = r_{g1}$ . В результате для  $x_1, y_1, z_1$  получим выражения:

$$x_1 = A_1 \cos\varphi_1 - B_1 \sin\varphi_1; \quad y_1 = A_1 \sin\varphi_1 + B_1 \cos\varphi_1; \quad z_1 = \sin\vartheta_1(u_1 \sin\alpha_0 - r_{g1}).$$

$$f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = \cos\vartheta_1(u_1 - r_{g1} \sin\alpha_0) - \varphi_1 R_{w1} \sin\alpha_0 + r_{g1} \sin\alpha_0 = 0, \quad (13)$$

где  $A_1 = \cos\vartheta_1(u_1 \sin\alpha_0 - r_{g1}) - \varphi_1 R_{w1} + r_{g1}$ ;  $B_1 = u_1 \cos\alpha_0 - R_{w1}$ .

Проекции  $m_{1x}, m_{1y}, m_{1z}$  рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} m_{1x} &= \cos\varphi_1 \cos\alpha_0 \cos\vartheta_1 + \sin\varphi_1 \sin\alpha_0; & m_{1y} &= \sin\varphi_1 \cos\alpha_0 \cos\vartheta_1 - \cos\varphi_1 \sin\alpha_0; \\ m_{1z} &= \cos\alpha_0 \sin\vartheta_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Определим уравнения сечения арочного зуба шестерни и колеса торцовой плоскостью, проходящей через середину зуба, задание которой соответствует условию  $z_1 = z_2 = 0$ . Для выполнения этого условия, на основании (5) для зуба колеса и (13) для зуба шестерни, необходимо положить  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ , при этом уравнения станочных зацеплений (12) и (13) упрощаются:

$$u_1 = \varphi_1 R_{w1} \sin\alpha_0; \quad u_2 = \varphi_2 R_{w2} \sin\alpha_0. \quad (15)$$

Подставляя эти зависимости в формулы для координат  $x_1, y_1$  (13) и  $x_2, y_2$  (5), определим:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_{w1} [\sin\varphi_1 - \varphi_1 \cos\alpha_0 \cos(\alpha_0 - \varphi_1)]; & y_1 &= -R_{w1} [\cos\varphi_1 - \varphi_1 \cos\alpha_0 \sin(\alpha_0 - \varphi_1)]; \\ x_2 &= R_{w2} [\sin\varphi_2 - \varphi_2 \cos\alpha_0 \cos(\alpha_0 + \varphi_2)]; & y_2 &= R_{w2} [\cos\varphi_2 + \varphi_2 \cos\alpha_0 \sin(\alpha_0 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Данные выражения являются уравнениями эвольвенты, впервые полученными Н.И. Колчиным. То есть в рассматриваемом способе формообразования профиль среднего сечения поверхности арочного зуба является эвольвентным. Известны [9, 11] модификации этого способа формообразования, при реализации которых в каждом торцовом сечении арочного зуба его профиль представляет собой эвольвенту.

### Исследование влияния погрешностей монтажа колеса и шестерни на положение рабочих линий в зацеплении арочных зубьев цилиндрической передачи

Для исследования геометро-кинематических характеристик зацепления арочных зубьев колеса и шестерни необходимо определить координаты точек касания главных поверхностей арочных зубьев. В теории пространственных передач зацеплением [3, 15–17] процедура определения точек касания поверхностей зубьев называется обратной задачей теории зацепления [3, 17]. Решение обратной задачи позволяет определить функцию положения колеса и шестерни в передаче,

## Расчет и конструирование

оценить чувствительность исследуемой цилиндрической передачи с арочными зубьями к погрешностям взаимного положения шестерни и колеса с целью научного обоснования допусков на величины погрешностей. Основой решения обратной задачи являются выражения проекций координат радиусов-векторов и ортов нормалей главных поверхностей арочных зубьев шестерни (13), (14) и колеса (5), (7) и (12), записанных, соответственно, в системах  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ .

Подвижные звенья передачи вращаются вокруг осей  $z_1$  (шестерня) и  $z_2$  (колесо), с которыми жестко связаны системы координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ . Примем, что началу отсчета угла поворота  $\psi_k$ -го подвижного звена ( $k = 1$  – шестерня,  $k = 2$  – колесо) в зацеплении арочных зубьев колеса и шестерни соответствует положение оси  $z_k$  ( $k = 1, 2$ ) в осевой плоскости передачи. В общем случае, взаимное положение шестерни и колеса в передаче (при отсутствии вращения) характеризуется межосевым расстоянием  $a_{wp}$ , которое отличается от станочного ( $a_{ws}$ ) на величину  $\Delta_a$ , углом перекоса зубьев  $\gamma$ , углом непараллельности  $\eta$  и величиной смещения  $\Delta_s$  средней плоскости зуба колеса относительно этой же плоскости на зубе шестерни.

Для построения математической модели зацепления выпуклой стороны арочного зуба колеса и вогнутой стороны арочного зуба шестерни исследуемой цилиндрической передачи, определим положение системы координат  $S_2(x_2, y_2, z_2)$  относительно системы  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  (рис. 3) с помощью матрицы перехода четвертого порядка  $\tilde{D}_{1,2}(\psi_1, \psi_2) = \|d_{ij}\|, i, j = \overline{1,4}$ .

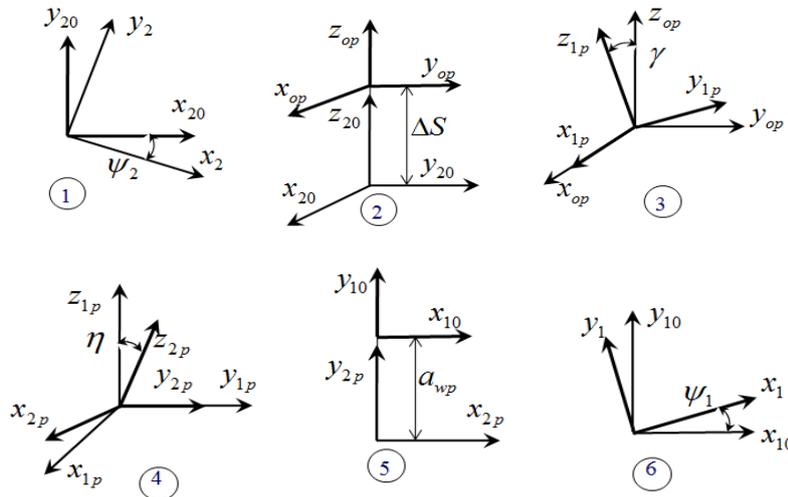


Рис. 3. Системы координат для определения элементов матрицы  $\tilde{D}_{12}(\psi_1, \psi_2)$

Воспользовавшись построениями рис. 3 для элементов этой матрицы, получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} d_{11} &= c_{11} \cos \psi_2 + c_{12} \sin \psi_2; & d_{12} &= -c_{11} \sin \psi_2 + c_{12} \cos \psi_2; & d_{13} &= -\sin \psi_1 \sin \eta + \cos \psi_1 \sin \eta \cos \gamma; \\ d_{21} &= c_{21} \cos \psi_2 + c_{22} \sin \psi_2; & d_{22} &= -c_{21} \sin \psi_2 + c_{22} \cos \psi_2; & d_{23} &= \cos \psi_1 \sin \eta + \sin \psi_1 \sin \eta \cos \gamma; \\ d_{31} &= -\sin \eta \cos \psi_2 - \cos \eta \sin \eta \sin \psi_2; & d_{32} &= \sin \eta \sin \psi_2 - \cos \eta \sin \eta \cos \psi_2; & d_{33} &= \cos \eta \cos \gamma; \\ d_{14} &= a_{wp} \sin \psi_1 - \Delta_s \cdot c_{13}; & d_{24} &= -a_{wp} \cos \psi_1 - \Delta_s \cdot c_{23}; & d_{34} &= -\Delta_s \cdot \cos \eta \cdot \cos \gamma; \\ d_{41} &= d_{42} = d_{43} = 0; & d_{44} &= 1, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $c_{11} = \cos \psi_1 \cos \eta$ ;  $c_{12} = -\sin \psi_1 \cos \gamma - \cos \psi_1 \sin \eta \sin \gamma$ ;  $c_{13} = -\sin \psi_1 \sin \eta + \cos \psi_1 \sin \eta \cos \gamma$ ;  $c_{21} = \sin \psi_1 \cos \eta$ ;  $c_{22} = \cos \psi_1 \cos \gamma - \sin \psi_1 \sin \eta \sin \gamma$ ;  $c_{23} = \cos \psi_1 \sin \eta + \sin \psi_1 \sin \eta \cos \gamma$ .

Для расчета проекций координат точки контакта на активной поверхности арочного зуба шестерни, в соответствии с теорией пространственных передач зацеплением [3, 17], фиксируется величина угла поворота шестерни ( $\psi_1 = const$ ) в рабочем зацеплении и решается обратная задача зацепления [3, 17]. Следуя работам [3, 15, 16], математическое описание обратной задачи представляет собой систему уравнений, включающую в единой системе координат равенство векторов  $\vec{r}_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ ,  $\vec{r}_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2)$ , ортов нормалей  $\vec{m}_1(\vartheta_1, \varphi_1)$ ,  $\vec{m}_2(\vartheta_2, \varphi_2)$ , а также уравнения связи параметров – уравнения станочных зацеплений  $f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = 0$  и  $f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0$ . Про-

екции координат точки касания будем определять в системе координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ . В этом случае система уравнений для решения обратной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1^1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) &= \tilde{D}_{1,2}(\psi_1, \psi_2)\tilde{r}_2^2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2); \\ \tilde{m}_1^1(\vartheta_1, \varphi_1) &= \tilde{D}_{1,2}(\psi, \psi_2)\tilde{m}_2^2(\vartheta_2, \varphi_2); \\ f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) &= 0; \quad f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

В системе уравнений (17) верхний индекс у матриц определяет систему координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  или  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ , в которой вычислены проекции векторов;  $\tilde{r}_2^2, \tilde{m}_2^2$  – матрицы-столбцы, составленные из проекций координат радиуса-вектора  $\tilde{r}_2^2$  (5) и орта нормали  $\tilde{m}_2^2$  (7) выпуклой поверхности зуба колеса в системе координат  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ ;  $\tilde{r}_1^1, \tilde{m}_1^1$  – матрицы-столбцы, составленные из проекций координат радиуса-вектора  $\tilde{r}_1^1$  (13) и орта нормали  $\tilde{m}_1^1$  (14) вогнутой поверхности зуба шестерни в системе координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ ;  $f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1) = 0$  – уравнение зацепления при обработке активной поверхности зубьев шестерни (13);  $f_2(u_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0$  – уравнение зацепления при обработке активной поверхности зубьев колеса (12).

Система (17) соответствует условиям касания зуба колеса и зуба шестерни и представляет собой систему семи скалярных трансцендентных уравнений (равенство ортов нормалей дает не три, а два независимых уравнения) с восемью неизвестными:  $u_1, \vartheta_1, \varphi_1, u_2, \vartheta_2, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ . Расчет в передаче координат  $x_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1), y_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_1)$  и  $z_1(u_1, \vartheta_1)$  точки касания выпуклой стороны арочного зуба колеса с вогнутой стороной арочного зуба шестерни при заданных погрешностях взаимного положения ( $\Delta_a, \gamma, \eta, \Delta_s$ ) шестерни и колеса выполняется по разработанной в среде MathCad программе при зафиксированной фазе зацепления ( $\psi_1 = const$ ) при варьировании этой фазы в пределах углового шага зуба шестерни путем решения численным методом системы семи трансцендентных уравнений (17) относительно неизвестных  $u_1, \vartheta_1, \varphi_1, u_2, \vartheta_2, \varphi_2, \psi_2$ .

Результаты анализа влияния погрешностей взаимного расположения шестерни и колеса в передаче на положение рабочих линий в зацеплении арочных зубьев рассмотрим на примере исследования цилиндрической передачи, имеющей следующие параметры:  $z_1^* = 23; z_2^* = 73$ ; модуль нормальный  $m_n = 10$  мм; коэффициенты смещения при нарезании зубьев шестерни  $\chi_1 = 0,44$  и зубьев колеса  $\chi_2 = 0,042$ ; ширина зуба  $b_w = 120$  мм;  $\alpha_0 = 20^\circ$ ; радиус начальной окружности шестерни  $R_{w1} = 116,115$  мм, колеса  $R_{w2} = 368,540$  мм, межосевое расстояние  $a_w = 484,655$  мм. Расчеты выполнены для двух вариантов локализации контакта в продольном направлении арочных зубьев. В варианте № 1 (высокая локализация) для нарезания вогнутой стороны арочных зубьев шестерни и выпуклой стороны арочных зубьев колеса используются круговые резцовые головки с расчетными радиусами, соответственно,  $r_{g1} = 220$  мм и  $r_{g2} = 215$  мм. В варианте № 2 (контакт, близкий к линейному)  $r_{g1} = 220$  мм и  $r_{g2} = 218$  мм.

На рис. 4 показаны активные действующие линии (рабочие линии в зацеплении) на поверхности зуба шестерни исследуемой передачи (вариант № 1) при непараллельности ( $\eta = var$ ) осей шестерни и колеса  $\eta = 0'$  ( $\blacktriangle$ );  $3'$  ( $\times$ );  $5'$  ( $\square$ );  $6'$  ( $\circ$ ) и  $7'$  ( $\Delta$ ). Рис. 5 иллюстрирует положение активных действующих линий на поверхности зуба шестерни передачи (вариант № 2) при непараллельности ( $\eta = var$ ) осей шестерни и колеса  $\eta = 0'$  ( $\blacktriangle$ );  $3'$  ( $\times$ );  $4'$  ( $\square$ );  $5'$  ( $\circ$ ) и  $6'$  ( $\Delta$ ).

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

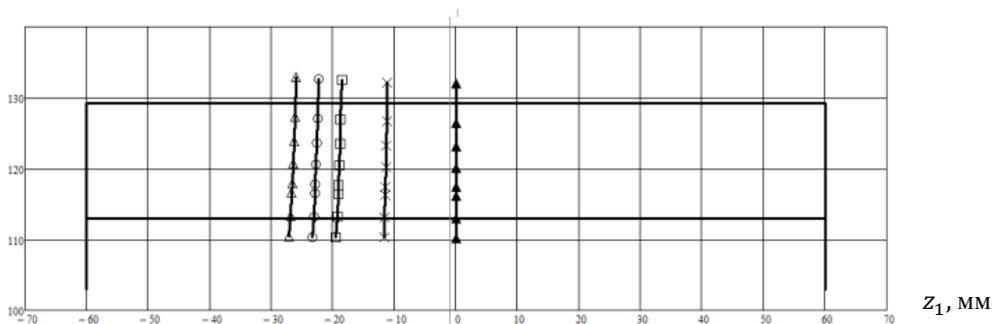


Рис. 4. Рабочие линии  $\eta = var$  вариант № 1

На рис. 6 показаны активные действующие линии (рабочие линии в зацеплении) на поверхности зуба шестерни исследуемой передачи (вариант № 1) при перекосе ( $\gamma = var$ ) осей шестерни и колеса  $\gamma = 0'$  ( $\blacktriangle$ );  $3'$  ( $\times$ );  $5'$  ( $\square$ );  $6'$  ( $\circ$ ) и  $7'$  ( $\Delta$ ). Рис. 7 иллюстрирует положение активных дей-

## Расчет и конструирование

вующих линий на поверхности зуба шестерни передачи (вариант № 2) при перекосе ( $\gamma = var$ ) осей шестерни и колеса  $\gamma = 0'$  ( $\blacktriangle$ );  $3'$  ( $\times$ );  $4'$  ( $\square$ );  $5'$  ( $\circ$ ) и  $6'$  ( $\Delta$ ).

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

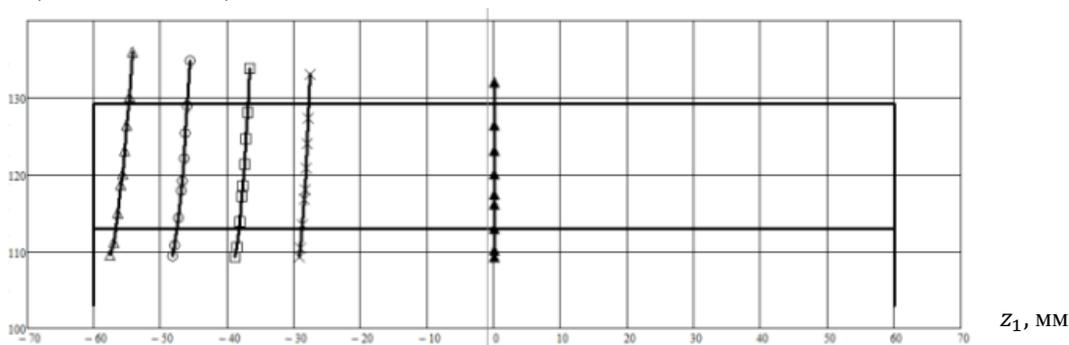


Рис. 5. Рабочие линии  $\eta = var$  вариант № 2

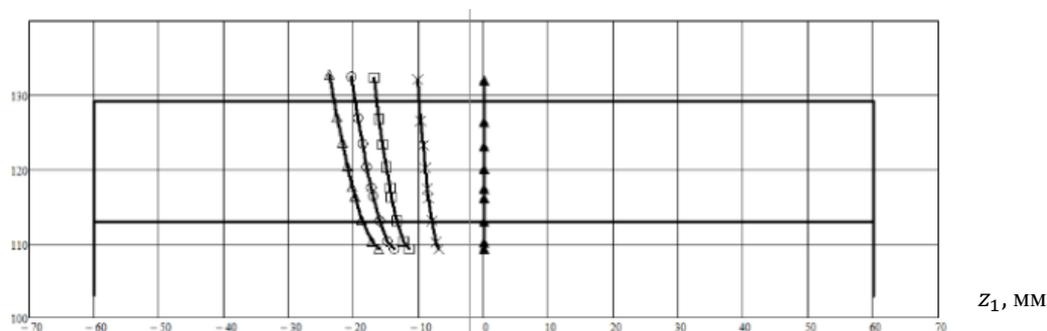


Рис. 6. Рабочие линии  $\gamma = var$  вариант № 1

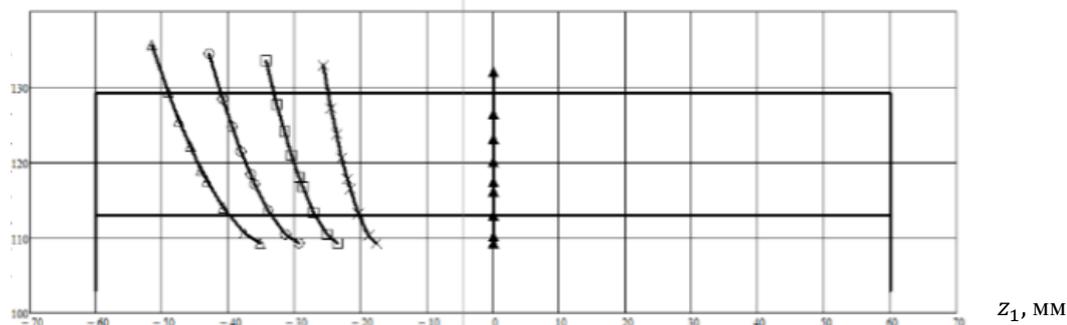


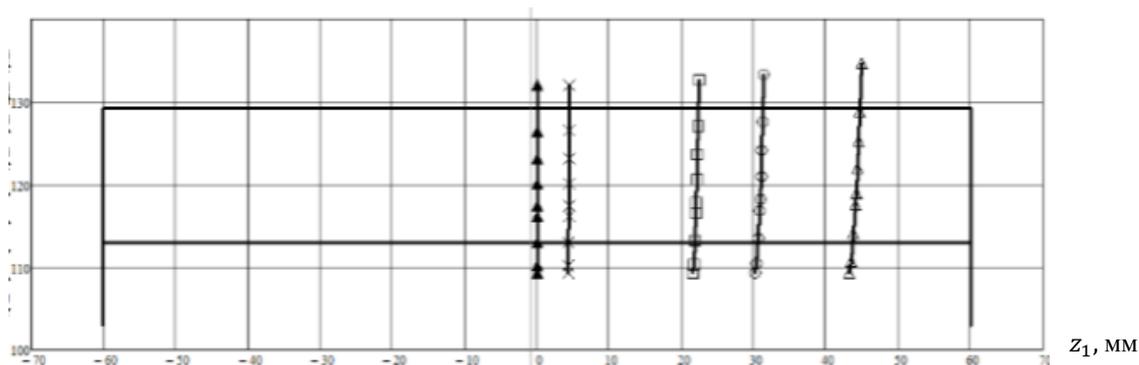
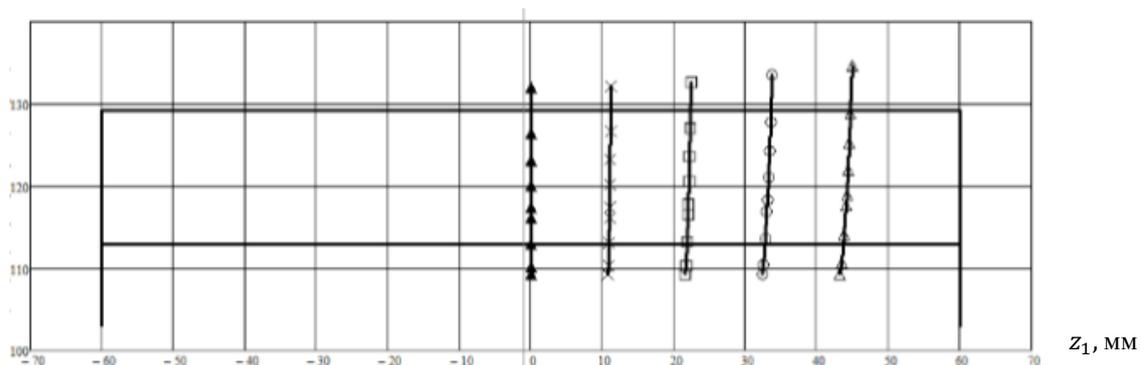
Рис. 7. Рабочие линии  $\gamma = var$  вариант № 2

На рис. 8 показаны активные действующие линии (рабочие линии в зацеплении) на поверхности зуба шестерни исследуемой передачи (вариант № 1) при смещении ( $\Delta_s = var$ ) осей шестерни и колеса  $\Delta_s = 0$  ( $\blacktriangle$ );  $-0,1$  ( $\times$ );  $-0,5$  ( $\square$ );  $-0,7$  ( $\circ$ ) и  $-1,0$  ( $\Delta$ ) мм. Рис. 9 иллюстрирует положение активных действующих линий на поверхности зуба шестерни передачи (вариант № 2) при смещении ( $\Delta_s = var$ ) осей шестерни и колеса  $\Delta_s = 0$  ( $\blacktriangle$ );  $-0,1$  ( $\times$ );  $-0,2$  ( $\square$ );  $-0,3$  ( $\circ$ ) и  $-0,4$  ( $\Delta$ ) мм.

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Из анализа рис. 4–9 следует, что при отсутствии погрешностей ( $\eta = \gamma = \Delta_s = 0$ ) рабочая линия располагается в среднем торцовом сечении арочного зуба, в котором его профиль как на шестерне, так и на колесе описывается эвольвентой. Передача является сопряженной, то есть функция положения  $\psi_2 = \psi_2(\psi_1)$  является величиной постоянной и представляет собой передаточное отношение:

$$i = \frac{z_2^*}{z_1^*} = \frac{\psi_1}{\psi_2} = const. \quad (18)$$

Рис. 8. Рабочие линии  $\Delta_s = var$  вариант № 1Рис. 9. Рабочие линии  $\Delta_s = var$  вариант № 2

Наличие погрешностей взаимного расположения шестерни и колеса в передаче вызывают смещение рабочих линий из среднего сечения арочного зуба, и функция положения перестает быть постоянной, передача становится несопряженной, возникает циклическая погрешность зацепления арочных зубьев. Известно, что точки рабочей линии являются центром мгновенной площадки контакта, размеры которой зависят от плотности прилегания поверхностей зубьев в окрестности точки их касания. Рис. 4–9 показывают, что более плотный контакт зубьев (передача варианта № 2) обеспечивает снижение контактной нагрузки в зацеплении, однако при наличии погрешностей приводит к значительному смещению рабочих линий из среднего сечения зуба и выходу площадок контакта на торец зубьев. Более того, как будет показано далее, несопряженность передачи существенно возрастает.

#### Анализ погрешности передаточной функции цилиндрической передачи с арочными зубьями при наличии погрешностей монтажа колеса и шестерни

Работа передачи в условиях погрешностей монтажа шестерни и колеса приводит не только к смещению рабочих линий из средних сечений арочных зубьев, в которых их профиль описывается эвольвентой, но и к нарушению сопряженности передачи, оцениваемой величиной погрешности поворота ведомого звена ( $\Delta\psi_2$ ) в период зацепления каждой пары зубьев. Для определения величины  $\Delta\psi_2$  для заданной  $\psi_1^* = const$  фазы зацепления зубьев ведущего колеса (шестерни) решим при  $\psi_1^* = const$  обратную задачу (17) и установим значение  $\psi_2^*$ . После чего погрешность  $\Delta\psi_2$  поворота ведомого звена (колеса) передачи рассчитывается по зависимости [15, 18, 19]:

$$\Delta\psi_2 = \psi_2^* - \psi_1^* \cdot z_1^*/z_2^*. \quad (19)$$

Повторяя описанную процедуру при варьировании величины  $\psi_1$  в пределах углового шага зуба шестерни, определим функцию  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$ , характеризующую несопряженность зацепления, – отклонение мгновенного передаточного отношения от постоянного значения (18). Графическое представление зависимости  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  для последовательно контактирующих пар зубьев (рис. 10) носит название «кривая Бакстера» [15, 16, 18–20], которая позволяет определить точки геометрического пересопряжения зубьев и оценить кинематическую погрешность зацепления исследуемой передачи. Выполненный в работах [15, 19–21] анализ поведения функции  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  свидетельствует, что для правильной работы передачи в реальных условиях экс-

## Расчет и конструирование

плутации погрешность поворота колеса  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  должна описываться зависимостью, близкой к параболе, в точке экстремума которой, соответствующей центру пятна контакта,  $\Delta\psi_2 = 0$ , а углы  $\psi_1^* = 0$  и  $\psi_2^* = 0$ .

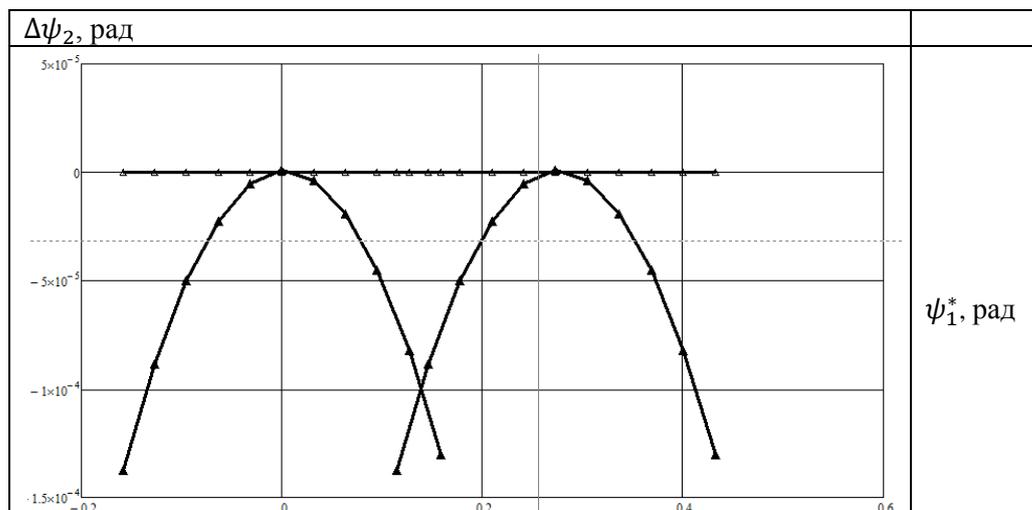


Рис. 10. Кривая Бакстера для приближенных передач зацеплением

В зависимости от геометрии поверхностей зубьев и погрешностей взаимного положения шестерни и колеса в передаче поведение функции  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  может принципиально отличаться от требуемого (рис. 10), обеспечивающего при передаче нагрузки вследствие контактных и изгибных деформаций зубьев уменьшение величины  $\Delta\psi_2$  при вариации  $\psi_1$  [15, 16], – реализацию приближенного характера зацепления зубьев.

На рис. 11 представлены результаты расчета функции  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  для двух пар зубьев цилиндрической передачи с арочными зубьями, результаты исследования зацепления которой представлены на рис. 4, 6 и 8 (вариант № 1). Проанализирована кинематика передачи при угле перекоса  $\gamma = 5'$ . Для того чтобы центр пятна контакта (при  $\psi_1^* = 0$ ) располагался в районе сечения зуба делительным цилиндром, а не вне активной поверхности арочного зуба, потребовалась коррекция угла  $\alpha_0 = 20^\circ$  конической производящей поверхности резцовой головки на величину  $\Delta\alpha_0 = 34'$ . Фаза зацепления  $\psi_1^* = -0,0635$  соответствует началу однопарного зацепления ( $\Delta\psi_2^* = -1,417 \cdot 10^{-4}$ ), а  $\psi_1^* = 0,0635$  ( $\Delta\psi_2^* = 3,217 \cdot 10^{-4}$ ) – выходу из однопарного зацепления арочных зубьев. На рис. 11 точки входа и выхода арочных зубьев в зону однопарного зацепления соединены пунктирной линией.

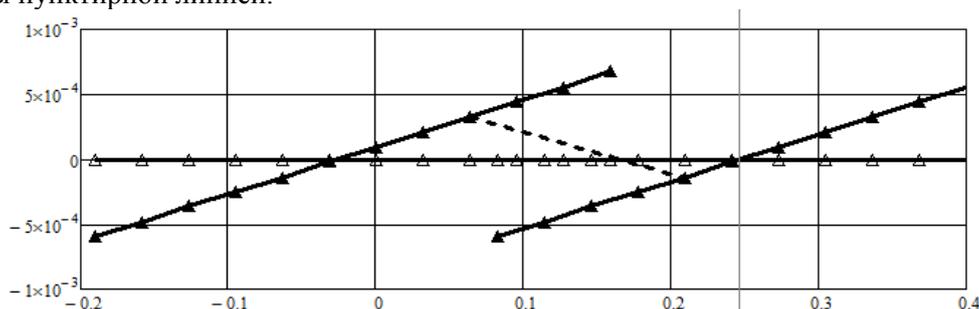


Рис. 11. Функция  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  для цилиндрической передачи с арочными зубьями при наличии угла перекоса зубьев  $\gamma = 5'$

Из рис. 11 следует, что функция  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  имеет пилообразную форму, которая соответствует высокой степени несопряженности передачи, в следствие чего вход зубьев в зацеплении будет происходить с ударом. Выполненные подобные расчеты для передачи варианта 2 показали двукратное увеличение значений  $\Delta\psi_2$ , что является следствием большего смещения рабочей линии от среднего сечения арочного зуба (рис. 4 и 5). Результаты расчета функции  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  при ненулевых погрешностях  $\Delta_s$  и  $\eta$  свидетельствуют, что ее характер изменения, по сравнению с функцией, показанной на рис. 11, не меняется.

Аналогичная ситуация имеет место при работе конических передач с круговыми зубьями, что потребовало в рамках теории пространственных зацеплений создания специальных методов локального и нелокального синтеза [15–17] передач с целью исключения ударов при пересопрежении зубьев и реализации приближенного характера зацепления зубьев. К настоящему времени для конических передач разработаны два [15–17] принципиально различных способа трансформации пилообразной функции  $\Delta\psi_2 = \Delta\psi_2(\psi_1)$  к виду, показанному на рис. 10. Первый способ предполагает использование в процессе формообразования инструментов (круговых резцовых головок, шлифовальных кругов) с более сложной, нежели прямой круговой конус, производящей поверхностью, изменение геометрических параметров которой позволяет осуществить модификацию профиля кругового зуба. Во втором способе применяются традиционные резцовые головки, а требуемый профиль зуба нарезаемого колеса формируется в процессе обкатки заготовки и производящего колеса на зуборезных станках, имеющих специальное устройство – модификатор обкатки.

Выполненные в настоящей работе исследования цилиндрических передач, арочные зубья которых нарезаются методом единичного деления круговыми резцовыми головками, показали, что получаемая геометрия поверхностей арочных зубьев обеспечивает необходимые геометро-кинематические характеристики передач лишь для условий нулевых погрешностей положения шестерни и колеса. Для достижения этих характеристик передач в условиях ненулевых погрешностей  $\eta$ ,  $\gamma$  и  $\Delta_s$ , требуется в рамках способа формообразования целенаправленная модификация поверхностей арочных зубьев, зависящая как от величины этих погрешностей, так и от закона их изменения в процессе работы передачи. Используя опыт технологической отработки конических передач, процедуры модификации поверхности арочного зуба могут разрабатываться на основе реализации переменного движения обкатки на станках с числовым программным управлением или с использованием резцовых головок, параметры которых, как и закон движения, определяются индивидуально для каждой передачи в результате решения задачи синтеза зацепления, учитывающей особенности процесса формообразования поверхностей арочных зубьев и пространственный характер их зацепления. То есть декларируемая [11, 13] простота и эффективность способа нарезания арочных зубьев резцовыми головками, в том числе с нулевым углом профиля [11], не позволяет обеспечить необходимые геометрические характеристики поверхностей арочных зубьев колес передач, эксплуатация которых осуществляется в условиях ненулевых погрешностей положения колес. Для технологической отработки требуется индивидуальная настройка геометрии поверхностей зубьев на основе специализированного программного обеспечения.

### Выводы

1. Для реализации способа формообразования методом единичного деления арочных зубьев цилиндрических колес круговыми резцовыми головками построены математические модели, которые описывают главные поверхности зубьев. Получены зависимости для исследования геометрических характеристик зацепления арочных зубьев, которые учитывают наличие погрешностей положения шестерни и колеса в передаче.

2. В результате исследования геометрии зацепления передачи с арочными зубьями впервые оценено влияние погрешностей положения на смещение рабочих линий в зацеплении зубьев.

3. Впервые для количественной оценки несопряженности исследуемой передачи при ее работе в условиях ненулевых погрешностей положения колес получены данные о погрешности функции положения. Предложены пути обеспечения в рамках рассматриваемого способа формообразования арочных зубьев приближенного характера зацепления зубьев в передаче.

### Литература

1. Сызранцев, В.Н. Цилиндрические передачи с арочными зубьями: геометрия, прочность, надежность: монография / В.Н. Сызранцев, К.В. Сызранцева. – Тюмень: Тюменский индустриальный университет, 2021. – 170 с.

2. Arafat, H. *Manufacturability and Viability of Different C-Gear Types: A Comparative Study* / Hani Arafat, Mostafa Bedewy // *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*. – 2012. – Vol. 5. DOI: 10.1115/DETC2012-71030.

3. Syzrantsev, V.N. *Study of geometric characteristics of the arc teeth semi-rolled cylindrical gear meshing* / V.N. Syzrantsev, K.V. Syzrantseva // *FME Transactions*. – 2021. – Vol. 49. No. 2. – С. 367–373.

4. Chang, Q. *Parallel translating mechanism process-oriented mathematical model and 3-D model for cylindrical gears with curvilinear shaped teeth* / Q. Chang, L. Hou // *Jordan Journal Mechanical and Industrial Engineering*. – 2016. – Vol. 10. – P. 171–177.
5. Dai, Y. *Hobbing mechanism of cylindrical gear with arcuate tooth traces and experimental investigation* / Y. Dai, A. Yukinori, D. Jiang // *China Mechanical Engineering*. – 2006. – Vol. 17 (7). – P. 706–709.
6. Ma Zhenqun *CNC Machining Method of Whole Modified Surface of Cylindrical Gears with Arcuate Tooth Trace* / Zhenqun Ma, Chengyi Deng // *Journal Of Mechanical Engineering*. – 2012. – Vol. 48(5). – P. 165–171. <https://doi.org/10.3901/jme.2012.05.165>.
7. Tseng, J.T. *Mathematical model and surface deviation of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth cut by hob cutter* / R.T. Tseng, C.B. Tsay // *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*. – 2005. – Vol. 127 (9). – P. 982–987.
8. *Method of processing and an analysis of meshing and contact of circular arc tooth trace cylindrical gears* / Q. Zhang, L. Hou, R. Tang, G. Wen // *Transactions of FAMENA*. – 2016. – Vol. 40, No. 4. – P. 11–24.
9. Song, A. *The ideal geometry parameters of arch cylindrical gear and its process method* / A. Song, W. Wu, S. Gao // *Journal of Shanghai Jiaotong University*. – 2010. – Vol. 44, No. 12. – P. 1735–1740.
10. Бочкова, Д.Е. *Обработка круговых зубьев пары цилиндрических колес с локализованной зоной касания* / Д.Е. Бочкова, М.Н. Бобков, С.А. Золотова // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. – 2020. – № 5. – С. 344–349.
11. Сидоренко, А.К. *Арочная передача по высоте зубьев «90-ВНИТИ»* / А.К. Сидоренко. – Коломна, 1998. – 50 с.
12. Решетов, Л.Н. *Особенности геометрии и зубонарезания цилиндрических квазиэвольвентных передач с циклоидальной линией зуба* / Л.Н. Решетов, М.И. Догода, М.В. Клиш // *Известия ВУЗов: Машиностроение*. – 1980. – № 5. – С. 48–52.
13. *Эвольвентные арочные передачи. Инновационная технология высокопроизводительного изготовления* / А.Н. Виноградов, А.П. Давыдов, С.И. Липатов и др. // Альманах «Деловая слава России». – 2011. – № 3 (31). – С. 42–45.
14. Jiang, Y. *Contact ratio calculation of involute arc gear device* / Y. Jiang // *Academic Journal of Manufacturing Engineering*. – 2017. – Vol. 15(3). – P. 19–22.
15. Лопато, Г.А. *Конические и гипоидные передачи с круговыми зубьями* / Г.А. Лопато, Н.Ф. Кабатов, М.Г. Сегаль. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
16. Litvin, F.L. *Methods of Synthesis and Analysis for Hypoid Gear Drives of Formate and Helixform*. Parts 1, 2, and 3 / F.L. Litvin, Y. Gutman // *ASME Journal of Mechanical Design*. – 1981. – Vol. 103, No. 1. – P. 83–113.
17. Литвин, Ф.Л. *Теория зубчатых зацеплений* / Ф.Л. Литвин. – М.: Наука, 1968. – 584 с.
18. Лагутин, С.А. *Предопределение функции ошибок в передачах с двойной модификацией зубьев* / С.А.Лагутин. *Пространство зацеплений: Сб. докл. научн. семинара Учебно-научного центра зубчатых передач и редукторостроения*. – Ижевск: изд-во ИжГТУ, 2001. – С. 26–37.
19. Шевелева, Г.И. *Теория формообразования и контакта движущихся тел* / Г.И. Шевелева. – М.: Станкин, 1999. – 494 с.
20. Гуляев, К.И. *Закон передаточного отношения при синтезе приближенной передачи* / К.И. Гуляев, Г.А. Лившиц // *Механика машин*. – 1974. – Вып. 45. – С. 50–54.
21. Babichev, D.T. *Russian school of the theory and geometry of gearing. Part 2. Development of the classical theory of gearing and establishment of the theory of real gearing in 1976–2000* / D.T. Babichev, S.A. Lagutin, N.A. Barmina // *Mechanisms and machine science (book series)*. – 2020. – Vol. 81. – P. 1–46. DOI: 10.1007/978-3-030-34945-5\_1.

**Стариков Александр Иванович**, аспирант, кафедра «Технология машиностроения», Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, starikovai@tyuiu.ru.

**Сызранцев Владимир Николаевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Машины и оборудование нефтяной и газовой промышленности», Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, syzrantsevvn@tyuiu.ru.

*Поступила в редакцию 23 декабря 2022 г.*

## CALCULATION OF THE GEOMETRIC AND KINEMATIC CHARACTERISTICS OF THE ENGAGEMENT OF THE ARCHED TEETH OF A CYLINDRICAL GEAR WITH ERRORS IN THE RELATIVE POSITION

A.I. Starikov, starikovai@tyuiu.ru

V.N. Syzrantsev, syzrantsevvn@tyuiu.ru

Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

The use of cylindrical gears with arched teeth in the drives of energy-saturated machines (locomotives, final drives of tractors, top drives of drilling rigs, helicopters) makes it possible to multiply the durability of gears compared to spur and helical gears. To date, a dozen and a half different techniques and methods for designing and manufacturing arched teeth of cylindrical wheels have been proposed. Among them, the most promising is the method of cutting arched teeth on CNC machines with circular cutter heads using the running-in method with a single division. The purpose of the article is to implement the construction of mathematical models for the formation of arched teeth on the basis of the theory of spatial gearing and to study the geometric and kinematic characteristics of their gearing under conditions of non-zero errors in the relative position of the wheel and gear in the transmission. The object of study is a cylindrical gear with arched teeth. In the article, dependencies for radius-vectors and unit vectors of the normals of the surfaces of arched teeth of cylindrical wheels are obtained, a mathematical model is developed for calculating the points of contact of arched teeth in engagement in the presence of a misalignment angle, a non-parallelism angle and wheel displacement. On the example of the final transmission of a locomotive, for the first time, the influence of the density of fit of the surfaces of the teeth in engagement on the displacement of the working lines from the average section of the tooth due to errors in the position of the transmission elements was studied for the first time. By calculating the error of the position function in the transmission, the procedure for quantifying its nonconjugacy is considered. It has been established that the geometry of the arched teeth of the method under study, under conditions of deviation of the positions of the transmission elements from the nominal ones, leads to a mismatch of the engagement, the position error function has a sawtooth shape, as a result of which impacts are inevitable when the teeth enter the engagement. Ways are proposed to achieve, within the framework of the considered method of manufacturing arched teeth, an approximate nature of the engagement of the teeth in the gear.

*Keywords: cylindrical gears, arched teeth, geometry, working lines, transfer function.*

### References

1. Syzrantsev V.N., Syzrantseva K.V. *Cilindricheskieperedachi s arochnymizub'yami: geometriya, prochnost', nadezhnost': monografiya* [Cylindrical gears with arched teeth: geometry, strength, reliability: monograph]. Tyumen:Industrial University of Tyumen. 2021. 170 p. (in Russ.).
2. Arafa Hani, Bedewy Mostafa. Manufacturability and Viability of Different C-Gear Types: A Comparative Study. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*. 2012, vol. 5. DOI: 10.1115/DETC2012-71030.
3. Syzrantsev V.N., Syzrantseva K.V. Study of geometric characteristics of the arc teeth semi-rolled cylindrical gear meshing. *FME Transactions*. 2021. vol. 49. no 2. pp. 367–373.
4. Chang Q., Hou L. Parallel translating mechanism process-oriented mathematical model and 3-D model for cylindrical gears with curvilinear shaped teeth. *Jordan Journal Mechanical and Industrial Engineering*. 2016. vol. 10. pp. 171–177.
5. Dai Y., Yukinori A., Jiang D. Hobbing mechanism of cylindrical gear with arcuate tooth traces and experimental investigation. *China Mechanical Engineering*. 2006. vol. 17 (7). pp. 706–709.
6. Ma Zhenqun, Deng Chengyi. CNC Machining Method of Whole Modified Surface of Cylindrical Gears with Arcuate Tooth Trace. *Journal of mechanical engineering*, 2012, vol. 48(5). pp. 165–171. <https://doi.org/10.3901/jme.2012.05.165>.
7. Tseng J.T., Tsay C.B. Mathematical model and surface deviation of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth cut by hob cutter. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*. 2005, vol. 127 (9). pp. 982–987.

8. Zhang Q., Hou L., Tang R., Wen G. Method of processing and an analysis of meshing and contact of circular arc tooth trace cylindrical gears. *Transactions of FAMENA*, 2016, vol. 40, no. 4. pp. 11–24.
9. Song A., Wu W., Gao S. The ideal geometry parameters of arch cylindrical gear and its process method. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2010, vol. 44, no. 12. pp. 1735–1740.
10. Bochkova D.E., Bobkov M.N., Zolotova S.A. [Machining Circular Teeth of a Pair of Cylindrical Wheels with a Localized Contact Zone]. *Proceedings of the Tula State University. Technical science.*, 2020, no. 5. pp 344–349. (in Russ.).
11. Sidorenko A.K. *Arochnaya peredacha po vysote zub'ev "90-VNITI"* [Arched transmission along the height of the teeth "90-VNITI"] Kolomna, 1998. 50 p.
12. Reshetov L.N. [Features of the Geometry and Gear Cutting of Cylindrical Quasi-Involute Gears with a Cycloidal Tooth Line] *Proceedings of Universities: Engineering*, 1980, no 5. pp. 48–52. (in Russ.).
13. Vinogradov A.N., Davydov A.P., Lipatov S.I. [Involute Arch Gears. Innovative High Performance Manufacturing Technology] *Almanac "Business Glory of Russia"*, 2011, no. 3 (31). pp. 42–45. (in Russ.).
14. Jiang Y. Contact ratio calculation of involute arc gear device. *Academic Journal of Manufacturing Engineering*, 2017, no. 15(3). pp. 19–22.
15. Lopato G.A., Kabatov N.F., Segal M.G. *Konicheskie i gipoidnye peredachi s krugovymi zub'yami* [Bevel and Hypoid Gears with Circular Teeth] Moscow, Mechanical engineering. 1977. 423 p. (in Russ.).
16. Litvin F.L., Gutman Y. Methods of Synthesis and Analysis for Hypoid Gear Drives of Formate and Helix form. Parts 1, 2 and 3. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1981, vol. 103, no. 1. pp. 83–113.
17. Litvin F.L. *Teoriya zubchatyh zaceplenij* [Gear theory]. Moscow, Science. 1968, 584 p.
18. Lagutin S.A. *Predopredelenie funkcii oshibok v peredachah s dvojnoy modifikaciej zub'ev* [Pre-determination of the error function in gears with double tooth modification] Izhevsk: Publishing House of IzhGTU, 2001. pp. 26–37. (in Russ.).
19. Sheveleva G.I. *Teoriya formoobrazovaniya i kontakta dvizhushchihya tel* [Theory of shaping and contact of moving bodies] Moscow: Stankin, 1999. 494 p.
20. Gulyaev K.I. (1974) *Zakon peredatochnogo otnosheniya pri sinteze priblizhennoj peredachi* [Gear ratio law in approximate gear synthesis] Moscow: Machine mechanics. 1974, no. 45. pp. 50–54. (in Russ.).
21. Babichev, D.T., Lagutin S.A., Barmina N.A. Russian School of the Theory and Geometry of Gearing. Part 2. Development of the Classical Theory of Gearing and Establishment of the Theory of Real Gearing in 1976–2000. *Mechanisms and machine science (book series)*. 2020. vol. 81. pp. 1–46. DOI: 10.1007/978-3-030-34945-5\_1.

**Received 23 December 2022**

---

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Стариков, А.И. Расчет геометро-кинематических характеристик зацепления арочных зубьев цилиндрической передачи при погрешностях взаимного расположения / А.И. Стариков, В.Н. Сызранцев, // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2023. – Т. 23, № 1. – С. 5–18. DOI: 10.14529/engin230101

### FOR CITATION

Starikov A.I., Syzrantsev V.N. Calculation of the geometric and kinematic characteristics of the engagement of the arched teeth of a cylindrical gear with errors in the relative position. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2023, vol. 23, no. 1, pp. 5–18. (in Russ.) DOI: 10.14529/engin230101