Научная статья
УДК 004.02
DOI: 10.14529/engin250107

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДОВ ПРОВЕДЕНИЯ РАСЧЁТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ БЫСТРОХОДНЫХ ГУСЕНИЧНЫХ МАШИН

И.Д. Шадрин[1,2], *ivan.shadrin12@gmail.com*, *https://orcid.org/0000-0002-4250-8967*
И.И. Баранов[1,2], *baranovii@ukbtm.ru*
Т.Е. Заводова[2], *tatiana.zavodova@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2674-7503*
С.А. Кислицын[1,2], *ksay@mail.ru*
Ю.А. Перевозчиков[1,2], *perevozchikovya@mail.ru*
Е.А. Хмельников[2], *xea07@rambler.ru*
Д.В. Юдинцев[2], *yudin_dv@mail.ru*
[1] *АО «Уральское конструкторское бюро транспортного машиностроения», Нижний Тагил, Россия*
[2] *Нижнетагильский технологический институт (филиал) Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Нижний Тагил, Россия*

Аннотация. В статье описывается современный подход к изучению динамических характеристик быстроходных гусеничных машин. Вопросами моделирования различных систем и отдельных агрегатов гусеничных машин занималось большое количество отечественных и зарубежных специалистов из различных отраслей машиностроения. Благодаря использованию расчётно-имитационных моделей у инженеров появляется возможность исследовать характеристики проектируемого изделия с высокой точностью до этапа его изготовления.

Модели, построенные в современных программных пакетах, насыщенны математическим аппаратом. Для полной реализации потенциала таких пакетов требуется не только глубокое изучение их алгоритмов и методов работы, но и уравнений, из которых составляются модели. Целью данной статьи является изучение математического аппарата программного пакета, в котором ранее была реализована одномерная расчётно-имитационная модель быстроходной гусеничной машины, для нахождения её динамических характеристик. Рассмотренные в статье дифференциальные алгебраические уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с частными производными, методы и проблематика, связанная с их решением (наличием разрывов), позволяют инженеру глубже понять алгоритмы функционирования программных пакетов имитационного моделирования. Как следствие, в будущем это даёт возможность создавать более качественные расчётно-имитационные модели, что на самых ранних этапах проектирования позволит прогнозировать поведение разрабатываемых систем и комплексов более точно.

В дальнейшем планируется более углублённое изучение представленных в статье уравнений и методов, а также определение оптимальных из них для получения необходимых результатов с минимальными затратами времени, компьютерных ресурсов и с высокой точностью.

Ключевые слова: дифференциальные алгебраические уравнения, быстроходная гусеничная машина, имитационное моделирование, методы решения, обыкновенные дифференциальные уравнения

Для цитирования: Обоснование методов проведения расчётных исследований быстроходных гусеничных машин / И.Д. Шадрин, И.И. Баранов, Т.Е. Заводова и др. // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». 2025. Т. 25, № 1. С. 68–79. DOI: 10.14529/engin250107

Original article
DOI: 10.14529/engin250107

SUBSTATION OF METHODS FOR CONDUCTING COMPUTATIONAL STUDIES OF HIGH-SPEED TRACKED VEHICLES

I.D. Shadrin[1,2], *ivan.shadrin12@gmail.com*, *https://orcid.org/0000-0002-4250-8967*
I.I. Baranov[1,2], *baranovii@ukbtm.ru*
T.E. Zavodova[2], *tatiana.zavodova@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2674-7503*
S.A. Kislitsyn[1,2], *ksay@bk.ru*
Yu.A. Perevozchikov[1,2], *perevozchikovya@mail.ru*
E.A. Khmelnikov[2], *xea07@rambler.ru*
D.V. Yudintsev[2], *yudin_dv@mail.ru*
[1] *Joint Stock Company "Ural Design Bureau of Transport Engineering", Nizhny Tagil, Russia*
[2] *Nizhny Tagil Technological Institute (branch) of the Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Nizhny Tagil, Russia*

Abstract. This article describes a modern approach to studying the dynamic characteristics of high-speed tracked vehicles. A large number of domestic and foreign specialists from various branches of mechanical engineering have studied the issues of modeling various systems and individual units of tracked vehicles. Through the use of calculation and simulation models, engineers have the opportunity to study the characteristics of the designed product with high accuracy before the stage of its manufacture.

Models built in modern software packages are saturated with mathematical apparatus. To fully realize the potential of such packages, not only a deep study of their algorithms and operating methods is required, but also the equations from which the models are composed. The purpose of this article was to study the mathematical apparatus of the software package, in which a one-dimensional calculation and simulation model of a high-speed tracked vehicle which was previously implemented, to find its dynamic characteristics. The differential algebraic equations, ordinary differential equations and differential equations with partial derivatives, methods and problems related to their solution (the presence of discontinuities) considered in the article allow the engineer to better understand the algorithms of the functioning of simulation modeling software packages. As a result, in the future this makes it possible to create higher-quality calculation and simulation models, which at the earliest stages of design will allow predicting the behavior of the systems and complexes being developed more accurately.

In the future, a more in-depth study of the equations and methods presented in the article is planned, as well as determining the most optimal of them for obtaining the necessary results with minimal time and computer resources and with high accuracy.

Keywords: differential algebraic equations, high-speed tracked vehicles, ordinary differential equations, methods of solution, simulation modeling

For citation: Shadrin I.D., Baranov I.I., Zavodova T.E., Kislitsyn S.A., Perevozchikov Yu.A., Khmelnikov E.A., Yudintsev D.V. Substation of methods for conducting computational studies of high-speed tracked vehicles. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2025:25(1):68–79. (In Russ.) DOI: 10.14529/engin250107

Введение

Современный подход к проектированию изделий в наукоёмких областях подразумевает обязательное использование систем автоматизированного проектирования (САПР), таких как *CAE* (аббр. *Computer-aided engineering*; в пер. с англ. система инженерного анализа), *CAD* (аббр. *Computer-aided design*; в пер. с англ. система автоматизации проектных работ), их гибридные системы и т. д. При создании трёхмерных моделей инженер не вдаётся в подробности работы САПР-программ, к тому же во многом различия между ними влияют только на удобство работы пользователя, нежели на конечный результат. В случае расчётных исследований и при создании имитационных моделей важность понимания архитектур, методов и алгоритмов заложенных в функционал программ САПР (так называемого «чёрного ящика») становится обязательным условием для качественной работы инженера в них. Большинство современных *CAE*-программ добились такой автоматизации процесса подбора уравнений, что позволили практически полностью избавить инженеров – специалистов по техническим расчётам от необходимости выбора используемых при расчёте алгоритмов и базовых уравнений. Целью данной статьи являлся обзор математического аппарата одной из зарубежных *CAE*-программ, на базе которой была реализована расчётно-имитационная модель быстроходной гусеничной машины (БГМ).

Вопросами моделирования различных систем и отдельных агрегатов БГМ занимались многие авторы [1–6]. Большой вклад был сделан в вопросы взаимодействия гусеничного движителя и опорной поверхности как наиболее наукоёмкой и сложной темы [7, 8]. В таких работах акцент делается на проектируемые системы, при этом остальными авторы в силу тех или иных причин пренебрегают. Во многом данный подход понятен, так как выявить прямое влияние одних компонентов на другие крайне затруднительно. Для точного прогнозирования работы такой сложной многокомпонентной, взаимосвязанной и взаимовлияющей системы, как ходовая часть или моторно-трансмиссионное отделение (МТО) БГМ, требуется учёт колоссального количества параметров.

Таким образом, для наиболее подробного учёта взаимного влияния множества факторов работы систем БГМ требуется максимально подробно изучить математический аппарат «чёрных ящиков» программ *CAE*. Это позволит учитывать наиболее важные и значимые параметры при проектировании систем БГМ.

Структура работы

В данной статье проанализированы работы отечественных и зарубежных авторов по имитационному моделированию БГМ. Представлена расчётно-имитационная модель БГМ, построенная на основании проанализированных статей. Рассмотрены обыкновенные дифференциальные и дифференциальные алгебраические математические уравнения, входящие в состав расчётно-имитационной модели БГМ. Изучена проблематика появления разрывов при проведении расчётов в программных пакетах (ПП). Приведены примеры жёстких и нежёстких задач. Рассмотрены алгоритмы и методы решения представленных уравнений с учётом разрывов.

Материалы и методы

Современные мировые тенденции в области разработок [9–11], изучения и анализа работы МТО, моделирования движения БГМ и работы их отдельных компонентов диктуют новые требования к подходам проектирования изделий с активным применением расчётно-имитационного моделирования. В результате изучения научных трудов по вопросам моделирования была построена расчётно-имитационная модель отечественной БГМ.

В статьях [12, 13] рассматривался вопрос расчётно-имитационного моделирования прямолинейного движения БГМ с учётом рабочих процессов в узлах и параметрах. В данных работах использовалась одномерная модель БГМ с сосредоточенными параметрами. При этом за счёт блочной структуры существует возможность её расширения до двух- или трёхмерной с подключением внешних *CAD*-программ и использования их решателей при проведении виртуального эксперимента и расчётов.

Расчётно-имитационная модель состоит из:

• компонентов, имитирующих работу силовой установки согласно внешней характеристике, полученной со стендовых испытаний;

• входного редуктора с приводами на обслуживающие системы и агрегаты, в которых учтены потери мощности на их работу согласно поверочному тяговому расчёту;

• бортовых планетарных коробок передач с управляющими элементами и бортовыми редукторами;

• системы управления движением, с имитацией работы механика-водителя, с ручным переключением передач;

• шасси с учётом массово-инерционных характеристик ходовой части и потерями мощности в гусеничном движителе.

Данная модель включает в себя большое количество систем и компонентов, связанных между собой, и включает в себя большое количество различных уравнений и их систем. Поэтому далее рассмотрим математический аппарат, используемый в ПП имитационного моделирования для решения и интегрирования уравнений, описывающих созданную модель.

Математический аппарат расчётно-имитационной модели

При проектировании расчётно-имитационных моделей перед разработчиком всегда встаёт сложное решение о принимаемых допущениях и упрощениях. При наличии высокой точности детализации модели важные переменные будут представлены функциями как от времени, так и от положения в пространстве. К примеру, давление (P) будет функцией 4 переменных:

$$P \equiv P(t, x, y, z).$$

Изменения данных переменных во времени регулируются системами уравнений в частных производных. В различных отраслях существуют специальные пакеты для решения уравнений данного типа, например, для вычислительной гидродинамики. Такое программное обеспечение используется для детального анализа отдельных компонентов системы.

Однако в инженерных расчётах часто необходимо моделировать крупные многоэлементные технические системы. В нашем случае модель может состоять из двигателя внутреннего сгорания, трансмиссии, системы гидроуправления и смазки и т. д. В этом случае принято сводить дифференциальные уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Таким образом, получаются модели, описываемые как ОДУ, так и дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Большинство современных ПП могут решать оба представленных типа дифференциальных уравнений.

Под решением уравнений подразумевается определение изменения переменных состояния по мере того, как время симуляции прогрессирует от начального до конечного значения. Переменные состояния, определяющие систему, изменяются, потому что:

- начальные значения не представляют собой положение равновесия;
- вводятся некоторые внешние возмущения и/или изменения (рабочий цикл модели).

Опишем особенности и основную проблематику при решении ОДУ и ДАУ.

Обыкновенные дифференциальные уравнения [14]

Классическая система ОДУ имеет N переменных состояния $y_1, ..., y_n$, каждая из которых имеет уравнение для своей производной вида:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_N\right).$$

На практике такое уравнение выполняется в некотором временном промежутке от $t = 0$ и до некоторого конечного момента $t = t_{fin}$. Данное условие можно представить в виде

$$0 \le t \le t_{fin}.$$

Кроме того, для каждой переменной состояния должно быть известно начальное значение:

$$y_i\left(0\right) = A_i.$$

Удобно выразить это в векторной записи, используя и присваивая для промежутка времени $0 \le t \le t_{fin}$:

1) $y = \left[y_1, y_2, \ldots, y_N\right]^T$,

2) $\dfrac{dy}{dt} = f\left(t, y\right)$,

$y\left(0\right) = A.$

Представленную выше систему часто называют проблемой начального значения (англ. *initial value problem*).

Уравнения, описывающие технические системы, значительно различаются по своим характеристикам. Для анализа локальных характеристик в некоторой точке решения применяется способ оценки матрицы Якоби и определение её собственных значений λ_i:

$$J = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Получаемые значения, как правило, комплексные, с действительными частями, обычно отрицательными. Инженеру интересны соответствующие постоянные времени τ_i, которые определяются следующим образом:

$$\tau_i = \frac{-1}{\mathrm{Re}(\lambda_i)}.$$

Они дают представление о затухании отдельных компонентов решения. Соответствующие мнимые части собственных значений дают некоторое представление о локальных частотах.

Две задачи, которые особенно требовательны к методам интегрирования:

1. Задачи, где наименьшая постоянная времени намного меньше общего времени симуляции, к примеру:

$$\tau_i < \frac{t_{fin}}{1000}.$$

Такой тип задач называют **жёсткими** (англ. *stiff*). Они требуют крайне стабильных методов интегрирования для их эффективного решения. Самым известным и наиболее подходящим алгоритмом для решения таких задач является метод Гира (англ. *Gear's method*).

2. Задачи, где частота больше, чем конечное время t_{fin}, а затухание крайне мало. В этом случае нормальные методы интегрирования показывают неэффективные результаты расчётов (требуется значительное количество времени для их решения).

Дифференциальные алгебраические уравнения [15]

Для более наглядного изучения вопроса приведём несколько примеров ДАУ.

1. Представим движущуюся под действием внешней силы массу. Она имеет некоторый коэффициент трения с поверхностью, по которой движется, а также учтём наличие сопротивления воздуха F. Тогда движение массы можно представить следующими уравнениями:

$$\left[\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ M\frac{dv}{dt} &= F - c_1 v - c_2 v|v| \end{aligned}\right.\cdot$$

Полученные ОДУ называются **явными** (англ. *explicit*). Но если мы решим, что выражение в левой части второго уравнения пренебрежимо мало, тогда получим

$$0 = F - c_1\frac{dx}{dt} - c_2\frac{dx}{dt}\left|\frac{dx}{dt}\right|$$

Теперь данное ОДУ будет **неявным** (англ. *implicit*).

2. Значение расхода жидкости, протекающей через трубу, можно найти, используя зависимость:

$$Q = C_q \cdot A\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}},$$

где C_q – константа, задаваемая пользователем. Данная зависимость пример **явного алгебраического уравнения**.

С другой стороны,

$$C_q = f(|Q|).$$

В этом случае мы получаем **неявное алгебраическое уравнение**, и значение величины расхода жидкости Q должно определяться итеративно.

Если управляющая система уравнений включает в себя любой вид неявного ОДУ или неявного алгебраического уравнения, то они описываются как ДАУ. Наиболее общий способ записи системы ДАУ следующий:

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Различия между перемещением (x) в первом примере и расходом (Q) во втором нет. Обе данные переменные считаются переменными состояния. Следовательно, требуются начальные значения для неявных алгебраических переменных и для переменных состояния. При решении этих уравнений основная цель – свести два следующих остатка $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ к нулю:

$$\varepsilon_1 = F - c_1 \frac{dx}{dt} - c_2 \frac{dx}{dt}\left|\frac{dx}{dt}\right|,$$

$$\varepsilon_2 = Q - f\left(|Q|\right) \cdot A\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}.$$

Разрывы

В расчётно-имитационных моделях существует шанс возникновения разрывов (англ. *Discontinuities*) [16]. Проблема заключается в алгоритмах интегрирования, используемых для решения ОДУ и ДАУ. Они основаны на методах интегрирования, которые работают с принятым предположением, что переменные состояния и некоторые их производные являются непрерывными. Если это предположение нарушается, происходит разрыв. В этом случае требуются специальные методы для обработки в точках разрыва для сохранения приемлемой точности расчётов.

Если никаких специальных мер не было предпринято, то большинство интеграторов будут резко сокращать свой шаг вблизи точки P в попытке удовлетворить требованиям точности. В этом случае большинство интеграторов, когда шаг станет минимальным, прервут расчёт и выдадут ошибку, так как требования по точности не будут удовлетворены. Часть интеграторов по достижению минимального шага продолжат работу, даже если требования по точности не будут выполнены, но это может привести к крайне неточным результатам.

1. Явные методы Рунге – Кутта [17]

Для вычисления y_{n+1} требуется только значение y_n. Вычисляется ряд значений k, которые выбирают производные состояний между временем $t = t_n$ и $t = t_{n+1}$. Пример такого вычисления:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot \left(k_1 + k_2\right),$$

$$k_1 = f\left(t_n; y_n\right),$$

$$k_2 = f\left(t_n + h; y + hk_1\right),$$

где h – текущая длина шага, т. е. $h = t_{n+1} - t_n$.

В этом методе используются только два значения k, поэтому он известен как **2-этапный метод**. Для повышения точности расчётов может быть использовано большее количество значений k. По мере увеличения числа этапов порядок метода тоже будет увеличиваться. В данном случае невозможно точно дать определение данному термину, но существует тенденция: чем выше порядок метода, тем выше потенциальная точность расчётов. В самых популярных методах ЯРК используются 4, 5 или 6 этапов, что соответствует 4-му и 5-му порядку.

ЯРК являются самыми простыми в реализации методами, потому что они явные. Большинство современных алгоритмов ПП, реализующих данные формулы, используют автоматическое управление шагом. Основываясь на данном методе, можно получать хорошие результаты при условии, что решаемые уравнения не слишком сложны. Но стоит отметить, что данный метод совершенно не подходит для жёстких задач.

2. Линейные многошаговые методы [18]

В данных методах используются следующие обозначения:

$f_{n+1} = f\left(t_{n+1}; y_{n+1}\right); f_n\left(t_n; y_n\right)$ и т. д.

Вместо использования одного предыдущего значения y_n в данном методе дополнительно используются все предыдущие значения y. Приведём три широко используемых линейных многошаговых метода:

$$y_{n+1} = \frac{4}{3} y_n - \frac{1}{3} y_{n-1} + \frac{2}{3} h f_{n+1},$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(5 f_{n+1} + 8 f_n - f_{n-1}\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(3 f_n - f_{n-1}\right).$$

Первые два метода являются неявными, поскольку правая часть содержит f_{n+1} и, следовательно y_{n+1}. Третий метод является явным.

Среди всех алгоритмов ПП присутствуют три наиболее широко используемые для решения задач с разрывами:

1) код Адамса (*Adams code*) – алгоритм для нежёстких задач. Он использует методы Адамса – Моултона с порядками до 12. Это обеспечивает большую гибкость для решений как с низкой, так и с высокой точностью [19];

2) метод Гира (*Gear's method*) – вероятно, лучший алгоритм для жёстких задач [19]. Он использует методы, известные как формулы обратного дифференцирования (англ. *backward differentiation formule*) порядков от 1 до 5 [20];

3) алгоритм *LSODA* (аббр. *Livermore Ordinary Differential Equations*) объединяет в себе лучшие характеристики и от кода Адамса, и от метода Гира [21]. Интегрирование начинается с методов кода Адамса. Характеристики уравнений отслеживаются, и, если обнаруживается жёсткость, выполняется переключение на метод Гира. Мониторинг характеристик уравнений не прекращается после переключения между методами Адамса – Моултона и формулами обратного дифференцирования по мере изменения характеристик уравнений.

Проработка разрывов

Во всех моделях компонентов должна применяться строгая обработка разрывов. Если есть разрыв в переменной состояния или в её 1-й или 2-й производной, метод, описанный ранее, используется для определения разрыва и перезапуска интегратора. Если разрыв происходит в известное время, то обработка разрыва пройдёт за наименьший промежуток времени. В иных случаях, когда точное время происхождения разрыва неизвестно, для поиска точки разрыва используется интерполяция.

Решения дифференциальных уравнений с частными производными

Во введении было заявлено, что для моделирования сложных технических систем, а не отдельных компонентов внутри системы, необходимо преобразовать уравнения с частными производными в ОДУ или ДАУ [22]. Это приводит к концепции модели со сосредоточенными параметрами её компонентов. Предполагается, что можно взять единственное репрезентативное значение переменной, такое как давление (P). Внутри компонента вместо предположения, что $P \equiv P(t, x, y, z)$, мы предполагаем, что $P \equiv P(t)$. Данное предположение о сосредоточенных параметрах позволяет успешно взаимодействовать с ними. Но есть случаи, когда оно будет недействительным. Рассмотрим гидравлические трубы при следующих двух случаях.

1. **Очень длинная труба при малом диаметре**. Если диаметр трубы составляет 10 мм, а длина 30 м, то изменения давления в зависимости от точки расположения жидкости внутри трубы могут быть экстремальными.

2. **Значительные волновые эффекты**. Если время, необходимое для прохождения волны давления по трубе, составляет τ секунд, $\tau > \frac{t_{fin}}{100}$, то тогда волновые эффекты могут значительно изменить поведение системы. Поскольку предположение о сосредоточенных параметрах не по-

зволяет точно представить волновые эффекты в трубах, необходимо учитывать геометрические изменения давления и расхода жидкости.

В представленных случаях можно предположить, что изменения переменных относительно положения в пределах длины трубы значительны, а изменения по сечению – нет. В терминах уравнений мы предполагаем, что

$$P \equiv P(t, x),$$

где x – измеряется по длине трубы.

Полное описание процесса преобразования уравнений потока в гидравлической трубе в форму, подходящую для классических решателей ОДУ, затруднительно. Однако данный процесс можно проиллюстрировать, взяв более простой пример теплопроводности вдоль изолированного стержня с управляющим уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где K зависит от теплопроводности, плотности и удельной теплоёмкости и будет считаться константой. Чтобы преобразовать управляющее уравнение в ОДУ, мы вводим набор узловых точек вдоль стержня и сохраняем температуру T_i в каждом узле. Нам требуется выражение для производных каждой температуры по времени. Для этого мы аппроксимируем предыдущее уравнение следующим образом:

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{K\left(T_{i+1} - 2T_i - T_{i-1}\right)}{\delta x^2}.$$

Используя простые приближения для производных в пространственном измерении и оставляя измерение времени за стандартным интегратором, получаем метод, известный как **метод линий** (англ. *Method of lines*). Он используется для преобразования уравнений с частными производными в ОДУ. При необходимости он может быть расширен до 2 или даже 3 пространственных измерений, но в таких случаях обычно лучше использовать специализированное программное обеспечение для уравнений с частными производными [23].

Для гидравлических труб ситуация более сложная, поскольку необходимо использовать уравнения с частными производными как для давления, так и для расхода жидкости. Тем не менее метод всё ещё применим и используется в более сложных моделях гидравлических труб. Обычно используются переплетённые сетки для давления и расхода.

На основании проведенного анализа математических методов решения задач применительно к описанию движения БГМ принято решение использовать метод Рунге – Кутта интегрирования системы ДАУ, которая имеет вид:

$$\begin{cases}
\gamma = \dfrac{F_{дв.} - F_{трос} - F_{общ.сопр.} \cdot C_{стат.}}{m} \\
F_{дв.} = \dfrac{M_{вх.ВК1}}{R_{дин.1}} - \dfrac{M_{вх.ВК2}}{R_{дин.2}} \\
F_{общ.сопр.} = F_{под.} + F_{аэр.} + F_{кач.} \cdot n \\
M_{вх.ВКi} = M_{вых.БPi} \cdot \eta \\
\eta = 0,95 - 0,005 \cdot V \\
F_{под.} = G \cdot \sin\left(\arctan\left(\dfrac{\alpha}{100}\right)\right) \\
F_{аэр.} = \dfrac{1}{2} \cdot \rho_{возд.} \cdot S \cdot C_x \cdot (V + V_{ветра})^2 \\
F_{кач.} = m \cdot g \cdot (f + k \cdot V + W \cdot V^2) \cdot \cos\left(\arctan\left(\dfrac{\alpha}{100}\right)\right),
\end{cases}$$

где γ – прямолинейное ускорение БГМ; $F_{дв.}$ – движущая сила; $F_{трос}$ – внешняя сила на тросе; $F_{общ.сопр.}$ – суммарное сопротивление движению БГМ; $C_{стат.}$ – коэффициент сцепления, назначаемый пользователем для состояния покоя перед началом движения БГМ; m – масса БГМ; $M_{вх.ВКi}$ – входной момент, приходящий на ведущие колёса из бортового редуктора; $R_{дин.i}$ – динамический радиус подвесок; $F_{под.}$ – сила сопротивления при подъёме; $F_{аэр.}$ – аэродинамическое сопротивление; $F_{кач.}$ – сила сопротивления качению БГМ; n – коэффициент приращения сопротивления качению; $M_{вых.БРi}$ – момент на выходном звене бортового редуктора; η – коэффициент полезного действия гусеничного движителя; V – линейная скорость БГМ; G – вес БГМ; α – угол наклона поверхности движения; $\rho_{возд.}$ – плотность воздуха; S – площадь поперечного сечения изделия; C_x – коэффициент обтекаемости; $V_{ветра}$ – скорость ветра; f – коэффициент сопротивления качению; k – коэффициент вязкого трения; W – коэффициент парусности.

В дальнейшем планируется дополнить систему ДАУ уравнениями, описывающими гидрообъёмный механизм поворота с помощью ДАУ.

Результаты и обсуждения

Таким образом, на основании рассмотренных уравнений и методов их решения сформулирована математическая модель движения БГМ на базе дифференциальных алгебраических уравнений, оптимальных для получения необходимых результатов с минимальными затратами времени, компьютерных ресурсов и с большой точностью.

Список литературы

1. Neumann V. Tracked vehicle analysis with simulation technologies support // Machines. Technologies. Materials. 2014. Vol. 8, no. 2. P. 44–47.

2. Гомберг Б.Н., Кондаков С.В., Носенко Л.С., Павловская О.О. Имитационное моделирование движения быстроходной гусеничной машины с электрической трансмиссией // Вестник ЮУрГУ. Серия: Энергетика. 2012. № 37 (296). С. 73–81.

3. Pesterev M. Mathematical model of the movement of a fighting tracked vehicle // Przegląd Nauk o Obronności. 2021. Vol. 6. P. 13–25. DOI: 10.37055/pno/140217

4. Wong J.Y. Dynamics of tracked vehicles // Vehicle system dynamics. 1997. Vol. 28, no. 2–3. P. 197–219.

5. Janarthanan B., Padmanabhan C., Sujatha C. Longitudinal dynamics of a tracked vehicle: Simulation and experiment // Journal of Terramechanics. 2012. Vol. 49, no. 2. P. 63–72. DOI: 10.1016/j.jterra.2011.11.001

6. Kciuk S., Mężyk A. Modelling of tracked vehicle dynamics // Journal of KONES. 2010. Vol. 17, no. 1. P. 223–232.

7. Sojka M., Cornak S. Tracked vehicle movement modelling // University of Defense in Brno. 2018. P. 2098–2103. DOI: 10.22616/ERDev2018.17.N358

8. Евсеев К.Б. Математическая модель движения гусеничного поезда для внедорожных контейнерных перевозок // Тракторы и сельхозмашины. 2021. Т. 88. № 5. С. 18–29. DOI: 10.31992/0321-4443-2021-5-18-29

9. Старовойтов В.С. Военные гусеничные машины: учебник: в 4 т. Т. 2: Основы научной организации разработки. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992. 300 с.

10. Mezyk A. et al. Modelling and investigation of dynamic parameters of tracked vehicles // Mechanics and Mechanical Engineering. 2011. Vol. 15, no. 4. P. 115–130.

11. Shaik A. M., Kumar R., Rahman H. Mobility Performance Prediction Model for Main Battle Tanks // SAE Technical Paper, 2020. P. 9. DOI: 10.4271/2020-28-0355

12. Расчетные исследования динамических характеристик при изменении закона управления трансмиссией военной гусеничной машины / И.Д. Шадрин, С.А. Кислицын, И.И. Баранов [и др.] // Актуальные проблемы защиты и безопасности: труды XXVII Всероссийской научно-практической конференции, Михайловская военная артиллерийская академия, АО «НПО Спецматериалов». СПб.: РАРАН, 2024. С. 534–541.

13. Шадрин И.Д., Юдинцев Д.В., Кислицын С.А. Математическое моделирование системы управления трансмиссией быстроходной гусеничной машины // Проектирование систем вооружения и измерительных комплексов: труды 19-й Всероссийской научно-технической конференции. Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2023. С. 341–350.

14. Hartman P. Ordinary differential equations. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. P. 624. DOI: 10.1137/1.9780898719222

15. Kunkel P. Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution // European Mathematical Society, 2006. Vol. 2. P. 373. DOI: 10.4171/017

16. Alsoudani T. Discontinuities in mathematical modelling: origin, detection and resolution. Doctoral thesis. UCL (University College London), 2016.

17. Ascher U.M., Petzold L.R. Projected implicit Runge – Kutta methods for differential-algebraic equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1991. Vol. 28, № 4. P. 1097–1120. DOI: 10.1137/0728059

18. Keller R.T., Du Q. Discovery of dynamics using linear multistep methods // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2021. Vol. 59, no. 1. P. 429–455. DOI: 10.1137/19M130981X

19. Peinado J. et al. Adams – Bashforth and Adams – Moulton methods for solving differential Riccati equations //Computers & Mathematics with Applications. 2010. Vol. 60, no. 11. P. 3032–3045. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.10.002

20. Gear C.W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations, 1971. P. 253.

21. Soetaert K. et al. Solving ordinary differential equations in R. Springer Berlin Heidelberg, 2012. P. 41–80. DOI: 10.1007/978-3-642-28070-2

22. Cash J. R. Modified extended backward differentiation formulae for the numerical solution of stiff initial value problems in ODEs and DAEs // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 125, no. 1–2. P. 117–130. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00463-5

23. Ascher U. M., Petzold L. R. Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998. DOI: 10.1137/1.9781611971392

References

1. Neumann V. Tracked vehicle analysis with simulation technologies support. *Machines. Technologies. Materials*, 2014, vol. 8 (2), pp. 44–47.

2. Gomberg B.N., Kondakov S.V., Nosenko L.S., Pavlovskay O.O. Silmulation Modeling of Motion of a High-Speed Tracked Vehicle with Electric Transmission. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Power Engineering,* 2012, no. 37 (296), pp. 73–81. (In Russ.)

3. Pesterev M. Mathematical model of the movement of a fighting tracked vehicle. *Przegląd Nauk o Obronności*, 2021, vol. 6, pp. 13–25. DOI: 10.37055/pno/140217

4. Wong J.Y. Dynamics of tracked vehicles. *Vehicle system dynamics*, 1997, vol. 28 (2–3), pp. 197–219.

5. Janarthanan B., Padmanabhan C., Sujatha C. Longitudinal dynamics of a tracked vehicle: Simulation and experiment. *Journal of Terramechanics*, 2012, vol. 49 (2) pp. 63–72. DOI: 10.1016/j.jterra.2011.11.001

6. Kciuk S., Mężyk A. Modelling of tracked vehicle dynamics. *Journal of KONES*, 2010, vol. 17(1), pp. 223–232.

7. Sojka M., Cornak S. Tracked vehicle movement modelling. *University of Defense in Brno*, 2018, pp. 2098–2103. DOI: 10.22616/ERDev2018.17.N358

8. Yevseyev K.B. Mathematical model of the movement of a tracked train for off-road container transportation. *Tractors and Agricultural Machinery*, 2021, vol. 88(5), pp. 18–29. DOI: 10.31992/0321-4443-2021-5-18-29 (In Russ.)

9. Starovoytov V.S. *Voennye gusenichnye mashiny. T.2. Osnovy nauchnoy organizatsii razrabotki* [Military tracked vehicles. Vol. 2. Fundamentals of scientific organization of developments]. Moscow, 1992. 300 p.

10. Mezyk A. et al. Modelling and investigation of dynamic parameters of tracked vehicles. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 2011, vol. 15(4), pp. 115–130.

11. Shaik A. M., Kumar R., Rahman H. Mobility Performance Prediction Model for Main Battle Tanks. *SAE Technical Paper*, 2020. P. 9. DOI: 10.4271/2020-28-0355

12. Shadrin I.D., Baranov I.I., Kislitsyn S.A., Perevozchikov Y.A., Yudintsev D.V. Calculation studies of dynamic characteristics when changing the transmission control law of a military tracked vehicle. *Aktual'nye problemy zashchity i bezopasnosti* [Current problems of protection and security]. St. Petersburg, 2024, pp. 534–541. (In Russ.)

13. Shadrin I.D., Kislitsyn S.A., Yudintsev D.V. Mathematical modeling of the transmission control system of a high-speed tracked vehicle. *Proektirovanie sistem vooruzheniya i izmeritel'nykh kompleksov* [Design of weapons systems and measuring systems]. Nizhny Tagil, 2023, pp. 341–350. (In Russ.)

14. Hartman P. Ordinary differential equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2002, p. 624. DOI: 10.1137/1.9780898719222

15. Kunkel P. Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution. *European Mathematical Society*, 2006, vol. 2, pp. 373. DOI: 10.4171/017

16. Alsoudani T. *Discontinuities in mathematical modelling: origin, detection and resolution. Doctoral thesis.* UCL (University College London), 2016.

17. Ascher U.M., Petzold L.R. Projected implicit Runge – Kutta methods for differential-algebraic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1991, vol. 28(4), pp. 1097–1120. DOI: 10.1137/0728059

18. Keller R.T., Du Q. Discovery of dynamics using linear multistep methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2021, vol. 59(1), pp. 429–455. DOI: 10.1137/19M130981X

19. Peinado J. et al. Adams – Bashforth and Adams – Moulton methods for solving differential Riccati equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, vol. 60(11), pp. 3032–3045. DOI: 10.1016/j.camwa.2010.10.002

20. Gear C.W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations, 1971, p. 253.

21. Soetaert K. et al. Solving ordinary differential equations in R. *Springer Berlin Heidelberg*, 2012. pp. 41–80. DOI: 10.1007/978-3-642-28070-2

22. Cash J. R. Modified extended backward differentiation formulae for the numerical solution of stiff initial value problems in ODEs and DAEs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol. 125(1–2), pp. 117–130. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00463-5

23. Ascher U.M., Petzold L.R. Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1998. DOI: 10.1137/1.9781611971392

Информация об авторах

Шадрин Иван Дмитриевич, инженер-конструктор, АО «Уральское конструкторское бюро транспортного машиностроения», Нижний Тагил, Россия; аспирант кафедры «Специальное машиностроение», Нижнетагильский технологический институт (филиал) Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Нижний Тагил, Россия; ivan.shadrin12@gmail.com

Баранов Илья Игоревич, директор по качеству и ИТ, АО «Уральское конструкторское бюро транспортного машиностроения», Нижний Тагил, Россия; аспирант кафедры «Специальное машиностроение», Нижнетагильский технологический институт (филиал) Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Нижний Тагил, Россия; baranovii@ukbtm.ru

Заводова Татьяна Евгеньевна, старший преподаватель кафедры «Специальное машиностроение», Нижнетагильский технологический институт (филиал) Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Нижний Тагил, Россия; tatiana.zavodova@urfu.ru.

Кислицын Сергей Александрович, ведущий инженер, АО «Уральское конструкторское бюро транспортного машиностроения», Нижний Тагил, Россия; аспирант кафедры «Специальное машиностроение», Нижнетагильский технологический институт (филиал) Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Нижний Тагил, Россия; ksay@bk.ru.

Перевозчиков Юрий Анатольевич, к.т.н., начальник отдела, АО «Уральское конструкторское бюро транспортного машиностроения», Нижний Тагил, Россия; доцент кафедры «Специальное машиностроение», Нижнетагильский технологический институт (филиал) Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Нижний Тагил, Россия; perevozchikovya@mail.ru.

Хмельников Евгений Александрович, д.т.н., доцент, профессор кафедры «Специальное машиностроение», Нижнетагильский технологический институт (филиал) Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Нижний Тагил, Россия; xea07@rambler.ru

Юдинцев Дмитрий Владимирович, к.т.н., доцент, доцент кафедры «Специальное машиностроение», Нижнетагильский технологический институт (филиал) Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Нижний Тагил, Россия; yudin_dv@mail.ru

Information about the authors

Ivan D. Shadrin, design engineer, Joint Stock Company “Ural Design Bureau of Transport Engineering”, Nizhny Tagil, Russia; graduate student, Nizhny Tagil Technological Institute (branch) of the Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Nizhny Tagil, Russia; ivan.shadrin12@gmail.com

Ilya I. Baranov, Director of Quality and IT, Joint Stock Company «Ural Design Bureau of Transport Engineering», Nizhny Tagil, Russia; graduate student, Nizhny Tagil Technological Institute (branch) of the Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Nizhny Tagil, Russia; baranovii@ukbtm.ru

Tatyana E. Zavodova, Senior Lecturer of Department of Special Engineering, Nizhny Tagil Technological Institute (branch) of the Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Nizhny Tagil, Russia; tatiana.zavodova@urfu.ru

Sergey A. Kislitsyn, Leading designer, Joint Stock Company “Ural Design Bureau of Transport Engineering”, Nizhny Tagil, Russia; graduate student, Nizhny Tagil Technological Institute (branch) of the Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Nizhny Tagil, Russia; ksay@bk.ru

Yuri A. Perevozchikov, candidate of technical sciences, Head of Department, Joint Stock Company “Ural Design Bureau of Transport Engineering”, Nizhny Tagil, Russia; docent of Department of Special engineering, Nizhny Tagil Technological Institute (branch) of the Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Nizhny Tagil, Russia; perevozchikovya@mail.ru

Evgeny A. Khmelnikov, doctor of technical sciences, Professor of Department of Special Engineering, Nizhny Tagil Technological Institute (branch) of the Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Nizhny Tagil, Russia; xea07@rambler.ru

Dmitry V. Yudintsev, candidate of technical sciences, Docent of Department of Special engineering, Nizhny Tagil Technological Institute (branch) of the Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Nizhny Tagil, Russia; yudin_dv@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 27.11.2024; принята к публикации 06.02.2025.
The article was submitted 27.11.2024; accepted for publication 06.02.2025.