УДК 531.3

# НОВЫЙ ВЕКТОРНЫЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТЕЛ

*А.И. Телегин*

Получен новый векторный вид уравнений динамики (УД) произвольной системы абсолютно твёрдых тел (СТТ), позволяющий элементарно выводить УД конкретных СТТ и решать задачи синтеза СТТ с заданными свойствами.

*Ключевые слова: системы тел, уравнения динамики, векторный вид.*

**Введение**. В книгах [1, 2] и статьях [3–5] предложены различные виды УД СТТ, полученные по формализмам Лагранжа [1], Аппеля [2], Ньютона-Эйлера [3]. Эти виды эффективно использовать для решения 1-й задачи динамики СТТ, т. е. вычисления динамических реакций и обобщенных движущих сил по заданным обобщенным координатам в виде функций времени. Для записи первых интегралов УД СТТ и решения 2-й задачи динамики, например, методом построения степенных рядов [6], эти виды мало приспособлены. Этот недостаток удалось ликвидировать в предлагаемом виде УД СТТ, который получен на основе преобразования УД СТТ, записанных с использованием теорем о движении центра масс и изменении кинетического момента системы материальных точек. В этом виде явно выражены структурные параметры СТТ, межполюсные векторы, инерционные параметры тел, полюсные ускорения, абсолютные угловые и относительные линейные скорости тел. Из него получаются эффективные алгоритмы выписывания УД конкретных СТТ.

**1. Используемые определения, понятия и обозначения.** В статье используются следующие определения.

***Определение 1.*** *СТТ – множество связанных подвижных тел.* Здесь под телом понимается абсолютно твёрдое (недеформируемое) тело. Множество тел является конечным. Связи ограничивают движения тел относительно друг друга. Принцип освобождаемости от связей позволяет мысленно расчленять СТТ на отдельные части, т.е. на отдельные тела или группы тел (на подсистемы), заменяя разорванные связи реакциями.

***Определение 2.*** *Подсистема – часть СТТ, в которой действия тел, в неё не включенных, заменены соответствующими реакциями.*

***Определение 3.*** *Корневое тело (корень) подсистемы – одно из тел подсистемы, которое имеет мысленно разорванную связь с землёй или с телом СТТ, не вошедшем в эту подсистему.*

Для вывода УД СТТ, состоящей из $N$ тел, будем разбивать эту СТТ на $N$ подсистем. Простейшим способом идентификации тел СТТ и её подсистем является их нумерация натуральными числами. Для обозначения номеров тел СТТ и её подсистем условимся использовать буквы $i, j, k, m$, принимающие значения от 1 до $N$.

***Определение 4.*** *Номер подсистемы – номер корневого тела этой подсистемы.*

***Определение 5.*** *База подсистемы – тело, не вошедшее в подсистему, но связанное с корнем подсистемы в составе СТТ.*

***Определение 6.*** *База j-го тела подсистемы – тело, следующее за j-м телом на пути к корню подсистемы.*

***Определение 7.*** *Тела, смежные i-му телу подсистемы, – тела подсистемы, для которых i-е тело является базой.*

Введём следующие обозначения: $S_i$ – множество номеров тел, смежных $i$-му телу; $O_j$ – полюс $j$-го тела, т. е. точка, жёстко связанная с $j$-м телом; $O_{0j}$ – положение точки $O_j$ (полюса $j$-го тела) до начала движения $j$-го тела относительно своей базы (заметим, что в базе $j$-го тела точка $O_{0j}$ неподвижна); $C_{pk}$ – центр масс (ЦМ) $k$-й подсистемы; $O$ – точка отсчета (начало абсолютной системы координат); $\overline{r}_{ck} = \overline{OC_{pk}}$ – вектор ЦМ $k$-й подсистемы; $\overline{g}$ – ускорение свободного падения; $m_{0k}$ – масса $k$-го тела; $m_k$ – масса $k$-й подсистемы; $\overline{m}_k = m_k\overline{O_kC_{pk}}$ – статический момент $k$-й подсистемы относительно точки $O_k$.

***Определение 8.*** *i-м дополненным телом (ДТ) называется i-е тело, в точках $O_{0j}$ ($j \in S_i$) которого помещены массы $m_j$.*

Из введённых определений и обозначений следует, что масса $k$-го ДТ равна массе $k$-й подсистемы и справедливы равенства $m_k = m_{0k} + \sum_{m\epsilon S_k} m_m$.

При определении некоторых свойств СТТ и их подсистем, а также в доказательстве первого утверждения мысленно представим СТТ и её подсистемы в виде множества материальных точек (МТ), которым присвоены определённые номера. Для обозначения номеров МТ будем использовать буквы μ, ν. Через $M_{t\nu}$ обозначим ν-ю МТ. Через $m_{t\nu}$ обозначим массу ν-й МТ. Мысленно представим $k$-ю подсистему в виде множества МТ $M_{t\nu}$, где ν∈ $N_{pk}$ – множество номеров МТ, на которые мысленно разбита $k$-я подсистема. Через $N_{tk}$ обозначим множество номеров МТ, на которые разбито $k$-е тело.

В механике систем МТ все силы обусловлены взаимодействием между МТ. По отношению к МТ $k$-й подсистемы все силы можно разделить на внешние и внутренние. К внутренним относятся те силы, с которыми МТ $k$-й подсистемы действуют друг на друга. Остальные силы, действующие на МТ $k$-й подсистемы, являются внешними. Обозначим через $\overline{F}_{s\nu}$ равнодействующую всех внешних сил (активных и реакций связей), приложенных к МТ $M_{t\nu}$, где ν∈ $N_{pk}$. Через $\overline{F}_{s\nu\mu}$ обозначим равнодействующую всех внутренних сил, действующих на МТ $M_{t\nu}$ со стороны МТ $M_{t\mu}$, где ν∈ $N_{pk}$ и μ ∈ $N_{pk}$. Главный вектор множества сил, действующих на тела $k$-й подсистемы СТТ, вычисляется по формуле $\overline{F}_{pk}$=$\sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{s\nu}$, т. е. равен главному вектору внешних сил (активных и реакций связей). Если сила $\overline{F}_{s\nu}$ переносится из точки $M_{t\nu}$ $k$-й подсистемы в её ЦМ, то для сохранения результата действия этой силы на $k$-ю подсистему к ней необходимо добавить момент силы $\overline{C_{pk}M_{t\nu}} \times \overline{F}_{s\nu}$. В таком добавлении заключается правило приведения силы к ЦМ.

***Определение 9.*** *Процесс вычисления* $\overline{F}_{pk}$, $\overline{M}_{pk}$ *по формулам*

$$\overline{F}_{pk} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{s\nu},\ \overline{M}_{pk} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{C_{pk}M_{t\nu}} \times \overline{F}_{s\nu}$$

*называется приведением к ЦМ k-й подсистемы внешних сил* $\overline{F}_{s\nu}$ , *приложенных в точках* $M_{t\nu}$ *к телам k-й подсистемы.*

***Определение 10.*** *Векторы* $\overline{F}_k$ , $\overline{M}_k$ , *вычисляемые по формулам*

$$\overline{F}_k = \sum_{\mu\in N_{tk}} \overline{F}_{b\mu},\ \overline{M}_k = \sum_{\mu\in N_{tk}} \overline{O_kM_{t\mu}} \times \overline{F}_{b\mu},$$

*где* $\overline{F}_{b\mu}$ *– равнодействующая всех внешних сил, действующих на МТ* $M_{t\mu}$ *k-го тела* (μ ∈ $N_{tk}$) *со стороны его базы, называются главным вектором и главным моментом множества сил, действующих на k-е тело со стороны его базы, приведённые к точке* $O_k$ .

***Определение 11.*** *Векторы* $\overline{F}_{rk}$, $\overline{M}_{rk}$, *вычисляемые по формулам*

$$\overline{F}_{rk} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{g\nu},\ \overline{M}_{rk} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{O_kM_{t\nu}} \times \overline{F}_{g\nu},$$

*где* $\overline{F}_{g\nu}$ *– равнодействующая всех внешних сил, действующих на МТ* $M_{t\nu}$ *тел k-й подсистемы* (ν ∈ $N_{pk}$), *без учета сил тяжести и сил, действующих на k-е тело со стороны его базы, называются главным вектором и главным моментом внешних сил, действующих на тела k-й подсистемы, приведенные к точке* $O_k$, *без учета сил тяжести и сил, действующих на k-е тело со стороны его базы.*

Вывод формул определений 10, 11 изложен в любом учебнике «Теоретическая механика». Он основан на равенстве нулю суммы внутренних сил, действующих в системе материальных точек.

***Определение* 12.** *Кинетический момент k-й подсистемы СТТ относительно её ЦМ определяется вектором* $\overline{K}_{ck} = \sum_{\nu\in N_{pk}} m_{t\nu}\, \overline{C_{pk}M_{t\nu}} \times \dot{\overline{C_{pk}M}}_{t\nu}$.

Из введённых определений и обозначений следует, что масса $k$-й подсистемы может вычисляться по формулам

$$m_k = \sum_{\nu\epsilon N_{pk}} m_{t\nu} = \sum_{\mu\epsilon N_{tk}} m_{t\mu} + \sum_{m\epsilon S_k} \sum_{\nu\epsilon N_{pm}} m_{t\nu}.$$

**2. Основные расчетные формулы.** Любую СТТ из $N$ тел всегда можно разбить на $N$ подсистем так, что УД СТТ представляется в виде системы УД её подсистем.

*Утверждение 1.* Справедливы следующие уравнения

$$m_k(\ddot{\overline{r}}_{ck} - \overline{g}) = \overline{F}_k + \overline{F}_{rk}, \quad (1)$$

$$\overline{m}_k \times (\ddot{\overline{r}}_{ck} - \overline{g}) + \dot{\overline{K}}_{ck} = \overline{M}_k + \overline{M}_{rk}. \quad (2)$$

*Доказательство.* Рассматривая $k$-ю подсистему СТТ как систему МТ по теореме о движении ЦМ и изменении кинетического момента системы МТ относительно её ЦМ, получим

$$m_k\ddot{\overline{r}}_{ck} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{s\nu},\ \dot{\overline{K}}_{ck} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{C_{pk}M}_{t\nu} \times \overline{F}_{s\nu}. \qquad (3)$$

Из силы $\overline{F}_{s\nu}$ в этих уравнениях выделим силу тяжести $m_{t\nu}\overline{g}$, т. е. представим $\overline{F}_{s\nu} = m_{t\nu}\overline{g} + \overline{F}_{\nu}^{g}$, где $\overline{F}_{\nu}^{g}$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на МТ $M_{t\nu}$ ($\nu \in N_{pk}$), без учета сил тяжести. Тогда с учетом определения 9 получим

$$\overline{F}_{pk} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{s\nu} = \sum_{\nu\in N_{pk}} m_{t\nu}\overline{g} + \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{\nu}^{g} = m_k\overline{g} + \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{\nu}^{g}.$$

Аналогично получим:

$\overline{M}_{pk} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{C_{pk}M}_{t\nu} \times \overline{F}_{s\nu} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{C_{pk}M}_{t\nu} \times (m_{t\nu}\overline{g} + \overline{F}_{\nu}^{g}) = \sum_{\nu\in N_{pk}} m_{t\nu}\overline{C_{pk}M}_{t\nu} \times \overline{g} + \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{C_{pk}M}_{t\nu} \times \overline{F}_{\nu}^{g} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{C_{pk}M}_{t\nu} \times \overline{F}_{\nu}^{g}$, так как $\sum_{\nu\in N_{pk}} m_{t\nu}\overline{C_{pk}M}_{t\nu} = 0$. Разложим силу $\sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{\nu}^{g}$ на сумму сил $\overline{F}_k$ и $\overline{F}_{rk}$, т. е. представим $\sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{\nu}^{g} = \overline{F}_k + \overline{F}_{rk}$, где по определениям 10, 11 $\overline{F}_k = \sum_{\mu\in N_{tk}} \overline{F}_{b\mu}$, $\overline{F}_{rk} = \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{g\nu}$. Таким образом,

$$\overline{F}_{pk} = m_k\overline{g} + \overline{F}_k + \overline{F}_{rk}. \qquad (4)$$

Используем разложение $\overline{C_{pk}M}_{t\nu} = \overline{C_{pk}O_k} + \overline{O_kM}_{t\nu}$, тогда получим

$$\overline{M}_{pk} = \sum_{\nu\in N_{pk}}(\overline{C_{pk}O_k} + \overline{O_kM}_{t\nu}) \times \overline{F}_{\nu}^{g} = \overline{C_{pk}O_k} \times \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{F}_{\nu}^{g} + \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{O_kM}_{t\nu} \times \overline{F}_{\nu}^{g} =$$
$$= \overline{C_{pk}O_k} \times (\overline{F}_k + \overline{F}_{rk}) + \sum_{\mu\in N_{tk}} \overline{O_kM}_{t\mu} \times \overline{F}_{b\mu} + \sum_{\nu\in N_{pk}} \overline{O_kM}_{t\nu} \times \overline{F}_{g\nu}.$$

Используя определения 10, 11, получаем

$$\overline{M}_{pk} = \overline{M}_k + \overline{M}_{rk} - \overline{O_kC_{pk}} \times (\overline{F}_k + \overline{F}_{rk}). \qquad (5)$$

С учётом (4), (5) уравнения (3) примут вид

$$m_k\ddot{\overline{r}}_{ck} = m_k\overline{g} + \overline{F}_k + \overline{F}_{rk},\ \dot{\overline{K}}_{ck} = \overline{M}_k + \overline{M}_{rk} - \overline{O_kC_{pk}} \times (\overline{F}_k + \overline{F}_{rk}).$$

Из 1-го уравнения получим $\overline{F}_k + \overline{F}_{rk} = m_k(\ddot{\overline{r}}_{ck} - \overline{g})$. Подставим его во 2-е уравнение. Тогда с учетом обозначения $\overline{m}_k = m_k\overline{O_kC_{pk}}$ из последнего уравнения получим искомые уравнения (1), (2). *Утверждение доказано.*

Введём обозначения: $\overline{r}_k = \overline{OO_k}$ – вектор полюса $k$-го тела; $\overline{R}_k = \overline{O_{k-1}O_k}$ – $k$-й межполюсный вектор; $C_i$ – ЦМ $i$-го тела.

*Утверждение 2.* Уравнение (1) представимо в виде

$$m_k\ddot{\overline{r}}_k + \ddot{\overline{m}}_k = m_k\overline{g} + \overline{F}_k + \overline{F}_{rk}, \qquad (6)$$

где $\overline{r}_i = \overline{r}_{i-1} + \overline{R}_i$, $\overline{r}_0 = 0$;

$$\overline{m}_i = m_{0i}\overline{O_iC_i} + \sum_{j\in S_i}(m_j\overline{R}_j + \overline{m}_j). \qquad (7)$$

*Доказательство.* Очевидно, что $\overline{r}_{ck} = \overline{r}_k + \overline{O_kC_{pk}}$. Следовательно, $m_k\ddot{\overline{r}}_{ck} = m_k\ddot{\overline{r}}_k + \ddot{\overline{m}}_k$, что доказывает представление (6).

По определению $\overline{r}_i = \overline{\mathrm{OO}}_i = \overline{\mathrm{OO}}_{i-1} + \overline{\mathrm{O}_{i-1}\mathrm{O}_i} = \overline{r}_{i-1} + \overline{R}_i$ и $\overline{r}_0 = \overline{\mathrm{OO}}_0 = 0$, что доказывает рекуррентную формулу вычисления абсолютных радиус-векторов полюсов тел СТТ.

Уравнение баланса статических моментов относительно точки $\mathrm{O}_i$ для массы $m_i$ в точке $C_{pi}$, с одной стороны, и, с другой стороны, для массы $m_{0i}$ в точке $C_i$ и масс $m_j$ в точках $C_{pj}$, где $j\in S_i$, имеет вид $m_i\overline{O_iC_{pi}} = m_{0i}\overline{O_iC_i} + \sum_{j\in S_i} m_j\overline{O_iC_{pj}}$. Для $j \in S_i$ справедливы равенства

$$m_j\overline{O_iC_{pj}} = m_j\overline{O_iO_j} + m_j\overline{O_jC_{pj}} = m_j\overline{O_{j-1}O_j} + \overline{m}_j = m_j\overline{R}_j + \overline{m}_j.$$

Поэтому формула вычисления $\overline{m}_i = m_i\overline{O_iC_{pi}}$ принимает искомый рекуррентный вид. *Утверждение доказано.*

*Утверждение 3.* Статические моменты подсистем можно вычислять по обратной рекуррентной формуле

$$\overline{m}_i = \overline{m}_{di} + \sum_{j\in S_i}(m_j\overline{r}_{rj} + \overline{m}_j), \qquad (8)$$

где $\overline{r}_{rj} = \overline{O_{0j}O_j}$ – вектор относительного перемещения $j$-го тела;

$$\overline{m}_{di} = m_{0i}\overline{O_iC_i} + \sum_{j\in S_i} m_j\overline{O_iO_{0j}} \ - \qquad (9)$$

статический момент $i$-го ДТ относительно полюса $i$-го тела.

*Доказательство.* Для $j \in S_i$ справедливы равенства

$\overline{R}_j = \overline{O_{j-1}O}_j = \overline{O_iO}_j = \overline{O_iO}_{0j} + \overline{O_{0j}O}_j = \overline{O_iO}_{0j} + \overline{r}_{rj}$.

Следовательно $\overline{m}_i = m_{0i}\overline{O_iC}_i + \sum_{j\epsilon S_i}(m_j\,\overline{R}_j + \overline{m}_j) = m_{0i}\overline{O_iC}_i + \sum_{j\epsilon S_i}\left[m_j\left(\overline{O_iO}_{0j} + \overline{r}_{rj}\right) + \overline{m}_j\right]$. Отсюда следуют искомые формулы. *Утверждение доказано.*

Заметим, что вектор $\overline{m}_{di}$ неподвижен в $i$-м теле.

*Утверждение 4.* Статические моменты подсистем можно вычислять по конечной формуле

$$\overline{m}_i = \sum_{j=\mathrm{i}}^{N_i}\overline{m}_{rj}, \tag{10}$$

где $\overline{m}_{rj} = m_{0j}\overline{O_jC}_j + \sum_{m\epsilon S_j} m_m\,\overline{R}_m$. (11)

*Доказательство.* Подставим (9) в (8). Тогда получим

$\overline{m}_i = m_{0i}\overline{O_iC}_i + \sum_{j\epsilon S_i}[m_j(\overline{O_iO}_{0j} + \overline{O_{0j}O}_j) + \overline{m}_j] = m_{0i}\overline{O_iC}_i + \sum_{j\epsilon S_i}(m_j\,\overline{R}_j + \overline{m}_j) = \overline{m}_{ri} + \sum_{j\epsilon S_i}\overline{m}_j$,

так как $\overline{R}_j = \overline{O_iO}_j$. Выполнив рекуррентные вложения последней формулы начиная с последнего номера $N_i$ до номера $i$, получим искомую формулу (10). *Утверждение доказано.*

**3. Представления кинетических моментов подсистем.** Выведем формулу вычисления кинетического момента $k$-й подсистемы через параметры $k$-й подсистемы.

*Утверждение 5.* Кинетический момент $\overline{K}_{ck}$ можно вычислять по формуле

$$\overline{K}_{ck} = \sum_{m=k}^{N_k}\left(m_{0m}\overline{C_{pk}C}_m \times \dot{\overline{C_{pk}C}}_{m} + J_{cm}\cdot\overline{\omega}_m\right), \tag{12}$$

где $J_{cm}$ – центральный тензор инерции $m$-го тела; $\overline{\omega}_m$ – абсолютная угловая скорость $m$-го тела.

*Доказательство*. Из определения 12 и путем элементарных преобразований получим

$$\overline{K}_{ck} = \sum_{\nu\epsilon N_{pk}} m_{t\nu}\,\overline{C_{pk}M}_{t\nu} \times \dot{\overline{C_{pk}M}}_{t\nu} = \sum_{m=k}^{N_k}\left(\sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu}\,\overline{C_{pk}M}_{t\mu} \times \dot{\overline{C_{pk}M}}_{t\mu}\right) =$$

$$= \sum_{m=k}^{N_k}\left[\sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu}\left(\overline{C_{pk}C}_m + \overline{C_mM}_{t\mu}\right) \times \left(\dot{\overline{C_{pk}C}}_{m} + \dot{\overline{C_mM}}_{t\mu}\right)\right] =$$

$$= \sum_{m=k}^{N_k}\left[\sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu}\left(\overline{C_{pk}C}_m \times \dot{\overline{C_{pk}C}}_{m} + \overline{C_{pk}C}_m \times \dot{\overline{C_mM}}_{t\mu} + \overline{C_mM}_{t\mu} \times \dot{\overline{C_{pk}C}}_{m} + \overline{C_mM}_{t\mu} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ \dot{\overline{C_mM}}_{t\mu}\right)\right] = \sum_{m=k}^{N_k}\left(\overline{C_{pk}C}_m \times \dot{\overline{C_{pk}C}}_{m}\sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu} + \overline{C_{pk}C}_m \times \sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu}\,\dot{\overline{C_mM}}_{t\mu} +\right.$$

$$\left. + \sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu}\,\overline{C_mM}_{t\mu} \times \dot{\overline{C_{pk}C}}_{m} + \sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu}\,\overline{C_mM}_{t\mu} \times \dot{\overline{C_mM}}_{t\mu}\right).$$

По определению ЦМ $m$-го тела получим $\sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu}\,\dot{\overline{C_mM}}_{t\mu} = 0$. По определению кинетического момента $m$-го тела относительно его ЦМ получим

$\sum_{\mu\epsilon N_{tm}} m_{t\mu}\,\overline{C_mM}_{t\mu} \times \dot{\overline{C_mM}}_{t\mu} = J_{cm}\cdot\overline{\omega}_m$.

Таким образом, из последнего выражения $\overline{K}_{ck}$ получим искомую формулу (12). *Утверждение доказано.*

*Утверждение 6.* Кинетический момент $\overline{K}_{ck}$ можно вычислять по формуле

$$\overline{K}_{ck} = \sum_{m=k}^{N_k}\left(m_{0m}\overline{O_kC}_m \times \dot{\overline{O_kC}}_{m} + \overline{K}_{tm}\right) + m_k\dot{\overline{O_kC}}_{pk} \times \overline{O_kC}_{pk}, \tag{13}$$

где $\overline{K}_{tm} = J_{cm}\cdot\overline{\omega}_m$ – кинетический момент $m$-го тела относительно точки $C_m$.

*Доказательство*. Учитывая представление $\overline{O_{pk}C}_m = \overline{C_{pk}O}_k + \overline{O_kC}_m = \overline{O_kC}_m - \overline{O_kC}_{pk}$ с учётом (12) получим

$$\overline{K}_{ck} = \sum_{m=k}^{N_k}\left[m_{0m}\left(\overline{O_kC}_m - \overline{O_kC}_{pk}\right) \times \left(\dot{\overline{O_kC}}_{m} - \dot{\overline{O_kC}}_{pk}\right) + \overline{K}_{tm}\right] = \sum_{m=k}^{N_k}\left[m_{0m}\left(\overline{O_kC}_m \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ \dot{\overline{O_kC}}_{m} - \overline{O_kC}_m \times \dot{\overline{O_kC}}_{pk} - \overline{O_kC}_{pk} \times \dot{\overline{O_kC}}_{m} + \overline{O_kC}_{pk} \times \dot{\overline{O_kC}}_{pk}\right) + \overline{K}_{tm}\right] =$$

$$= \sum_{m=k}^{N_k}\left(m_{0m}\overline{O_kC}_m \times \dot{\overline{O_kC}}_{m} + \overline{K}_{tm}\right) + \overline{a}_k,$$

где $\overline{a}_k = \dot{\overline{O_kC}}_{pk} \times \sum_{m=k}^{N_k} m_{0m}\overline{O_kC}_m - \overline{O_kC}_{pk} \times \sum_{m=k}^{N_k} m_{0m}\dot{\overline{O_kC}}_{m} + \overline{O_kC}_{pk} \times \dot{\overline{O_kC}}_{pk}\sum_{m=k}^{N_k} m_{0m}$.

Из уравнения баланса статических моментов относительно точки $O_k$ для массы $m_k$ в точке $C_{pk}$, с одной стороны, и, с другой стороны, для масс $m_{0m}$ в точках $C_m$, где $m$ пробегает номера тел $k$-й подсистемы, имеем $m_k\overline{O_kC}_{pk} = \sum_{m=k}^{N_k} m_{0m}\overline{O_kC}_m$. Следовательно

$\overline{a}_k = m_k\dot{\overline{O_kC}}_{pk} \times \overline{O_kC}_{pk} - m_k\overline{O_kC}_{pk} \times \dot{\overline{O_kC}}_{pk} + m_k\overline{O_kC}_{pk} \times \dot{\overline{O_kC}}_{pk} = m_k\dot{\overline{O_kC}}_{pk} \times \overline{O_kC}_{pk}$,

что и доказывает формулу (13). *Утверждение доказано.*

*Утверждение 7.* Кинетический момент $\overline{K}_{ck}$ можно вычислять по формуле

$$\overline{K}_{ck} = J_{rk} \cdot \overline{\omega}_k + \sum_{i=k+1}^{N_k} \left( J_{ri} \cdot \overline{\omega}_i + \overline{R}_i \times \dot{\overline{m}}_i + \overline{m}_i \times \dot{\overline{R}}_i + m_i \overline{R}_i \times \overline{V}_{ri} \right) + \dot{\overline{m}}_k \times \overline{O_k C}_{pk}, \quad (14)$$

где $\overline{V}_{ri}$ – относительная линейная скорость $i$-го тела, т. е. скорость поступательного движения $i$-го тела относительно своей базы; $J_{ri}$ – тензор инерции, вычисляемый по формуле

$$J_{ri} = J_{0i} + \sum_{j \in S_i} m_j \left( E \overline{R}_j \cdot \overline{R}_j - \overline{R}_j \overline{R}_j \right), \quad (15)$$

$J_{0i} = J_{ci} + m_{0i} ( E\, \overline{O_i C_i} \cdot \overline{O_i C_i} - \overline{O_i C_i} \cdot \overline{O_i C_i} )$ – тензор инерции $i$-го тела относительно его полюса (относительно точки $O_i$), $\overline{a}\,\overline{b}$ – диадное произведение двух трёхмерных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ [7].

*Доказательство.* Преобразуем выражение

$$\overline{b}_k = \sum_{i=k}^{N_k} m_{0i} \overline{O_k C_i} \times \dot{\overline{O_k C_i}}. \quad (16)$$

Представим $\overline{O_k C_i} = \overline{O_k O_i} + \overline{O_i C_i} = \overline{R}_{ki} + \overline{r}_i^c$, где $\overline{R}_{ki} = \overline{O_k O_i}$, $\overline{r}_i^c = \overline{O_i C_i}$. Тогда

$$\overline{O_k C_i} \times \dot{\overline{O_k C_i}} = \overline{R}_{ki} \times \dot{\overline{R}}_{ki} + \overline{R}_{ki} \times \dot{\overline{r}}_i^c + \overline{r}_i^c \times \dot{\overline{R}}_{ki} + \overline{r}_i^c \times \dot{\overline{r}}_i^c.$$

Разложим вектор $\overline{R}_{ki}$ на сумму векторов $\overline{R}_j$, где $j \in (k, i]$ – множество номеров тел, связывающих $k$-е тело с $i$-м (в это множество номер $k$ не входит). Тогда получим

$$\overline{R}_{ki} = \overline{O_k O_i} = \sum_{j,k+1}^{i} \overline{O_{j-1} O_j} = \sum_{j,k+1}^{i} \overline{R}_j, \quad (17)$$

где индекс суммирования $j$ пробегает номера из множества $(k, i]$. Выполним тождественное преобразование $\overline{R}_{ki} \times \dot{\overline{R}}_{ki} = \sum_{j,k+1}^{i} \overline{R}_j \times \sum_{m,k+1}^{i} \dot{\overline{R}}_m = \sum_{j,k+1}^{i} \left[ \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_j + \sum_{m,k+1}^{j-1} ( \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_m + +\overline{R}_m \times \dot{\overline{R}}_j ) \right]$.

В следующих преобразованиях используется формула изменения порядка суммирования [2]

$$\sum_{i=k}^{N_k} a_i \sum_{j,k+1}^{i} b_j = \sum_{j=k+1}^{N_k} b_j \sum_{i=j}^{N_j} a_i, \quad (18)$$

и очевидная формула

$$\sum_{j=k+1}^{N_k} c_j = \sum_{j=k}^{N_k} \sum_{i \in S_j} c_i. \quad (19)$$

С использованием (18), (19) получим

$$\sum_{i=k}^{N_k} m_{0i} \sum_{j,k+1}^{i} \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_j = \sum_{j=k+1}^{N_k} \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_j \sum_{i=j}^{N_j} m_{0i} = \sum_{j=k+1}^{N_k} m_j \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_j =$$
$$= \sum_{j=k}^{N_k} \left( \sum_{i \in S_j} m_i \overline{R}_i \times \dot{\overline{R}}_i \right).$$

В следующих тождественных преобразованиях дважды применена формула (18) и в заключение использована формула (19).

$$\sum_{i=k}^{N_k} m_{0i} \sum_{j,k+1}^{i} \left[ \sum_{m,k+1}^{j-1} \left( \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_m + \overline{R}_m \times \dot{\overline{R}}_j \right) \right] = \sum_{j=k+1}^{N_k} m_j \sum_{m,k+1}^{j-1} \left( \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_m + \overline{R}_m \times \dot{\overline{R}}_j \right) =$$
$$= \sum_{m=k+1}^{N_k} \left( \sum_{j=m+1}^{N_m} m_j \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_m + \overline{R}_m \times \sum_{j=m+1}^{N_m} m_j \dot{\overline{R}}_j \right) =$$
$$= \sum_{i=k+1}^{N_k} \left[ \sum_{j=i}^{N_i} \left( \sum_{m \in S_j} m_m \overline{R}_m \right) \times \dot{\overline{R}}_i + \overline{R}_i \times \sum_{j=i}^{N_i} \left( \sum_{m \in S_j} m_m \dot{\overline{R}}_m \right) \right].$$

В следующих тождественных преобразованиях вектор $\overline{R}_{ki}$ разложен по формуле (17) и применена формула (18).

$$\sum_{i=k}^{N_k} m_{0i} \overline{R}_{ki} \times \dot{\overline{r}}_i^c = \sum_{i=k}^{N_k} m_{0i} \sum_{j,k+1}^{i} \overline{R}_j \times \dot{\overline{r}}_i^c = \sum_{j=k+1}^{N_k} \overline{R}_j \times \sum_{i=j}^{N_j} m_{0i} \dot{\overline{r}}_i^c;$$
$$\sum_{i=k}^{N_k} m_{0i} \overline{r}_i^c \times \dot{\overline{R}}_{ki} = \sum_{i=k}^{N_k} m_{0i} \overline{r}_i^c \times \sum_{j,k+1}^{i} \dot{\overline{R}}_j = \sum_{j=k+1}^{N_k} \left( \sum_{i=j}^{N_j} m_{0i} \overline{r}_i^c \right) \times \dot{\overline{R}}_j.$$

Используя результаты выполненных преобразований, представим формулу (16) в виде

$$\overline{b}_k = \sum_{i=k}^{N_k} \left( m_{0i} \overline{r}_i^c \times \dot{\overline{r}}_i^c + \sum_{j \in S_i} m_j \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_j \right) +$$
$$+ \sum_{i=k+1}^{N_k} \left[ \sum_{j=i}^{N_i} \left( m_{0j} \overline{r}_j^c + \sum_{m \in S_j} m_m \overline{R}_m \right) \times \dot{\overline{R}}_i + \overline{R}_i \times \sum_{j=i}^{N_i} \left( m_{0j} \dot{\overline{r}}_j^c + \sum_{m \in S_j} m_m \dot{\overline{R}}_m \right) \right].$$

Из утверждения 4 имеем $\overline{m}_i = \sum_{j=i}^{N_i} \left( m_{0j} \overline{r}_j^c + \sum_{m \in S_j} m_m \overline{R}_m \right)$. Следовательно,

$$\overline{b}_k = \sum_{i=k}^{N_k} \left( m_{0i} \overline{r}_i^c \times \dot{\overline{r}}_i^c + \sum_{j \in S_i} m_j \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_j \right) + \sum_{i=k+1}^{N_k} ( \overline{m}_i \times \dot{\overline{R}}_i + \overline{R}_i \times \dot{\overline{m}}_i ).$$

Применив к последнему выражению формулу (19), получим

$$\overline{b}_k = \sum_{i=k}^{N_k} \left[ m_{0i} \overline{r}_i^c \times \dot{\overline{r}}_i^c + \sum_{j \in S_i} \left( m_j \overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_j + \overline{m}_j \times \dot{\overline{R}}_j + \overline{R}_j \times \dot{\overline{m}}_j \right) \right].$$

По формуле Эйлера $\dot{\overline{r}}_i^c = \dot{\overline{O_i C_i}} = \overline{\omega}_i \times \overline{r}_i^c$, $\dot{\overline{R}}_j = \dot{\overline{O_{j-1} O_j}} = \overline{\omega}_{j-1} \times \overline{R}_j + \overline{V}_{rj}$. Если теперь использовать формулу $\overline{a} \times (\overline{\omega} \times \overline{a}) = (E \overline{a} \cdot \overline{a} - \overline{a}\,\overline{a}) \cdot \overline{\omega}$, то получим

$\overline{r}_i^c \times \dot{\overline{r}}_i^c = \overline{r}_i^c \times (\overline{\omega}_i \times \overline{r}_i^c) = (E\overline{r}_i^c \cdot \overline{r}_i^c - \overline{r}_i^c\overline{r}_i^c) \cdot \overline{\omega}_i,$

$\overline{R}_j \times \dot{\overline{R}}_j = \overline{R}_j \times (\overline{\omega}_{j-1} \times \overline{R}_j) + \overline{R}_j \times \overline{V}_{rj} = (E\overline{R}_j \cdot \overline{R}_j - \overline{R}_j\overline{R}_j) \cdot \overline{\omega}_{j-1} + \overline{R}_j \times \overline{V}_{rj}.$

Отсюда с учетом равенства $\overline{\omega}_{j-1} = \overline{\omega}_i$ для $j \in S_i$ получим

$\overline{b}_k = \sum_{i=k}^{N_k}[m_{0i}(E\overline{r}_i^c \cdot \overline{r}_i^c - \overline{r}_i^c\overline{r}_i^c) \cdot \overline{\omega}_i + \sum_{j\in S_i} m_j(E\overline{R}_j \cdot \overline{R}_j - \overline{R}_j\overline{R}_j) \cdot \overline{\omega}_i +$

$+\sum_{j\in S_i}(\overline{m}_j \times \dot{\overline{R}}_j + \overline{R}_j \times \dot{\overline{m}}_j)].$

С учетом утверждения 6 следует доказываемая формула вычисления $\overline{K}_{ck}$. *Утверждение доказано.*

**4. Новый вид УД СТТ.** С целью сокращения записей введём в обращение матрицу $\overline{a} * \overline{b}$, элементы которой в заданной системе координат (СК) вычисляются по правилу

$$\overline{a} * \overline{b} = E\,\overline{b} \cdot \overline{a} - \overline{b}\overline{a} = \begin{pmatrix} a_y b_y + a_z b_z & -a_y b_x & -a_z b_x \\ -a_x b_y & a_x b_x + a_z b_z & -a_z b_y \\ -a_x b_z & -a_y b_z & a_x b_x + a_y b_y \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где $a_x$, $a_y$, $a_z$ – координаты вектора $\overline{a}$ в заданной СК, $b_x$, $b_y$, $b_z$ – координаты вектора $\overline{b}$ в этой СК. Путём непосредственных вычислений легко проверить, что

$\overline{a} * \overline{b} = (\overline{b} * \overline{a})^T$, $\alpha\overline{a} * (\beta\overline{b} + \overline{c}) = \alpha\beta(\overline{a} * \overline{b}) + \alpha\overline{a} * \overline{c}$,

и если известны проекции вектора $\overline{\omega}$ на оси рассматриваемой СК, то

$$\overline{a} \times (\overline{\omega} \times \overline{b}) = (\overline{a} * \overline{b}) \cdot \overline{\omega}. \quad (21)$$

*Утверждение 8.* УД (1), (2) можно представить в виде

$$m_i(\ddot{\overline{r}}_i - \overline{g}) + \ddot{\overline{m}}_i = \overline{F}_i + \overline{F}_{ri}, \quad (22)$$

$$\overline{m}_i \times (\ddot{\overline{r}}_i - \overline{g}) + \sum_{j=i}^{N_i}(J_{ji} \cdot \overline{\omega}_j + \sum_{k\in S_j} \overline{m}_{ik} \times \overline{V}_{rk})'_t = \overline{M}_i + \overline{M}_{ri}, \quad (23)$$

где $J_{ji} = J_{oj} + m_{oj}\overline{O_iO_j} * \overline{O_jC_j} + \sum_{k\in S_j} \overline{m}_{ik} * \overline{O_jO_k}$, (24)

$$\overline{m}_{ik} = m_k\overline{O_iO_k} + \overline{m}_k. \quad (25)$$

*Доказательство*. Учитывая равенства

$\overline{r}_{ci} = \overline{r}_i + \overline{O_iC_{pi}}$, $\overline{m}_i = m_i\overline{O_iC_{pi}}$, $(\dot{\overline{m}}_i \times \overline{O_iC_{pi}})'_t = \ddot{\overline{m}}_i \times \overline{O_iC_{pi}}$, $\dot{\overline{R}}_i = \overline{\omega}_{i-1} \times \overline{R}_i + \overline{V}_{ri}$,

УД (2) и формулу (14), получим

$\overline{M}_i + \overline{M}_{ri} = \dot{\overline{K}}_{ci} + \overline{m}_i \times (\ddot{\overline{r}}_{ci} - \overline{g}) = \ddot{\overline{m}}_i \times \overline{O_iC_{pi}} + \overline{m}_i \times (\ddot{\overline{r}}_i + \ddot{\overline{O_iC_{pi}}} - \overline{g}) +$

$+ \sum_{j=i}^{N_i}(J_{rj} \cdot \overline{\omega}_j)'_t + \sum_{j=i+1}^{N_i}[\overline{R}_j \times \dot{\overline{m}}_j + \overline{m}_j \times (\overline{\omega}_{j-1} \times \overline{R}_j + \overline{V}_{rj}) + m_j\overline{R}_j \times \overline{V}_{rj}]'_t =$

$= \overline{m}_i \times (\ddot{\overline{r}}_i - \overline{g}) + \sum_{j=i}^{N_i}(J_{rj} \cdot \overline{\omega}_j)'_t + \overline{A}_i,$

где $\overline{A}_i = \sum_{j=i+1}^{N_i}[\overline{R}_j \times \dot{\overline{m}}_j + (\overline{m}_j + m_j\overline{R}_j) \times \overline{V}_{rj} + \overline{m}_j \times (\overline{\omega}_{j-1} \times \overline{R}_j)]'_t$.

Используя (20) и (19), получим

$\sum_{j=i+1}^{N_i} \overline{m}_j \times (\overline{\omega}_{j-1} \times \overline{R}_j) = \sum_{j=i+1}^{N_i}(\overline{m}_j * \overline{R}_j) \cdot \overline{\omega}_{j-1} = \sum_{j=i}^{N_i}(\sum_{k\in S_j} \overline{m}_k * \overline{R}_k) \cdot \overline{\omega}_j.$

С учётом утверждения 4 имеем

$\dot{\overline{m}}_j = \sum_{k=j}^{N_j}(m_{ok}\dot{\overline{O_kC_k}} + \sum_{m\in S_k} m_m \dot{\overline{R}}_m) = \sum_{k=j}^{N_j}[m_{ok}\overline{\omega}_k \times \overline{O_kC_k} +$

$+ \sum_{m\in S_k} m_m(\overline{V}_{rm} + \overline{\omega}_k \times \overline{R}_m)] = \sum_{k=j}^{N_j}(\overline{\omega}_k \times \overline{m}_{rk} + \sum_{m\in S_k} m_m \overline{V}_{rm}).$

Выполним преобразования

$\sum_{j=i+1}^{N_i} \overline{R}_j \times \dot{\overline{m}}_j = \sum_{j=i+1}^{N_i} \overline{R}_j \times \sum_{k=j}^{N_j}(\overline{\omega}_k \times \overline{m}_{rk} + \sum_{m\in S_k} m_m \overline{V}_{rm}) =$

$= \sum_{k=i+1}^{N_i}(\sum_{j,i+1}^{k} \overline{R}_j) \times (\overline{\omega}_k \times \overline{m}_{rk} + \sum_{m\in S_k} m_m \overline{V}_{rm}) = \sum_{k=i+1}^{N_i} \overline{R}_{ik} \times (\overline{\omega}_k \times \overline{m}_{rk} +$

$+ \sum_{m\in S_k} m_m \overline{V}_{rm}) = \sum_{j=i}^{N_i} \overline{R}_{ij} \times (\overline{\omega}_j \times \overline{m}_{rj}) + \sum_{j=i+1}^{N_i} \overline{R}_{ij} \times \sum_{k\in S_j} m_k \overline{V}_{rk}.$

Таким образом,

$\overline{A}_i = \sum_{j=i}^{N_i}[(\overline{R}_{ij} * \overline{m}_{rj}) \cdot \overline{\omega}_j + (\sum_{k\in S_j} \overline{m}_k * \overline{R}_k) \cdot \overline{\omega}_j] + \sum_{j=i+1}^{N_i}[(\overline{m}_j + m_j\overline{R}_j) \times \overline{V}_{rj} + \overline{R}_{ij} \times$

$\times \sum_{k\in S_j} m_k \overline{V}_{rk}] = \sum_{j=i}^{N_i}\{[\overline{R}_{ij} * (m_{oj}\overline{O_jC_j} + \sum_{k\in S_j} m_k \overline{R}_k) + \sum_{k\in S_j} \overline{m}_k * \overline{R}_k] \cdot \overline{\omega}_j +$

$+ \sum_{k\in S_j}(\overline{m}_k + m_k \overline{R}_k + m_k \overline{R}_{ij}) \times \overline{V}_{rk}\} = \sum_{j=i}^{N_i}\{[m_{oj}\overline{R}_{ij} * \overline{O_jC_j} + \sum_{k\in S_j}(m_k\overline{R}_{ij} + \overline{m}_k) * \overline{R}_k] \cdot \overline{\omega}_j +$

$+ \sum_{k\in S_j}(m_k\overline{R}_{ik} + \overline{m}_k) \cdot \overline{V}_{rk}\}.$

Следовательно, справедлива формула (23), где

$J_{ji} = J_{rj} + m_{oj}\overline{R}_{ij} * \overline{O_j C_j} + \sum_{k\epsilon S_j}(m_k\, \overline{R}_{ij} + \overline{m}_k) * \overline{R}_k$. Отсюда с учётом (15) получим

$J_{ji} = J_{oj} + \sum_{k\epsilon S_j} m_k \overline{O_j O_k} * \overline{O_j O_k} + m_{oj}\overline{O_i O_j} * \overline{O_j C_j} + \sum_{k\epsilon S_j}(m_k \overline{O_i O_j} + \overline{m}_k) * \overline{O_j O_k} =$

$= J_{oj} + m_{oj}\overline{O_i O_j} * \overline{O_j C_j} + \sum_{k\epsilon S_j}(m_k \overline{O_i O_k} + \overline{m}_k) * \overline{O_j O_k}$.

Отсюда следуют искомые формулы (24), (25). УД (22) доказаны в утверждении 2. *Утверждение доказано*.

Из УД (22), (23) следует равенство

$[\sum_{j=i}^{N_i}(J_{ji} \cdot \overline{\omega}_j + \sum_{k\epsilon S_j} \overline{m}_{ik} \times \overline{V}_{rk}) - \overline{m}_i \times \dot{\overline{m}}_i / m_i]'_t = \overline{M}_i + \overline{M}_{ri} - \overline{m}_i \times (\overline{F}_i + \overline{F}_{ri})/m_i$,

из которого легко получить известные первые интегралы механических систем.

**Заключение.** УД СТТ в виде (22), (23) эффективно использовать для вывода УД конкретных СТТ, решения задач синтеза СТТ с заданными свойствами и вывода формул вычисления коэффициентов степенных рядов времени, являющихся решением конкретной задачи Коши.

### *Литература*


1. *Мелентьев, Ю.И. Динамика манипуляционных систем роботов / Ю.И. Мелентьев, А.И. Телегин. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1985. – 348 с.*
2. *Телегин, А.И. Уравнения математических моделей механических систем / А.И. Телегин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1999. – 181 с.*
3. *Телегин, А.И. Алгоритмы решения первой задачи динамики произвольных систем тел / А.И. Телегин, А.В. Абросов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2001. – № 6 (06). – Вып. 1. – С. 3–9.*
4. *Телегин, А.И. Новые уравнения для решения задач динамики и синтеза систем твёрдых тел / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2006. – Вып. 8. – № 11 (66). – С. 3–14.*
5. *Телегин, А.И. Общий и частные виды уравнений динамики систем абсолютно твёрдых тел / А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2007. – Вып. 9. – № 11 (83). – С. 3–13.*
6. *Телегин, А.И. Математическое обеспечение алгоритмов вывода уравнений динамики систем тел с одной ветвью на плоскости и их интегрирование при помощи степенных рядов / А.И. Телегин // Вестник Моск. гос. техн. ун-та. Серия «Приборостроение». – 1995. – № 1. – С. 55–61.*
7. *Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.*


**Телегин Александр Иванович.** Доктор физико-математических наук, профессор, декан электротехнического факультета, заведующий кафедрой «Системы управления и математическое моделирование», Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, mail@ miass.susu.ru.

***Поступила в редакцию 25 марта 2014 г.***

*Bulletin of the South Ural State University*
*Series "Mechanical Engineering Industry"*
*2014, vol. 14, no. 1, pp. 33–40*

# NEW VECTOR FORM OF THE EQUATION DYNAMICS SYSTEM OF BODY

***A.I. Telegin***, *South Ural State University, branch in the Miass, Miass, Russian Federation, mail@miass.susu.ru*

It has been obtained a new vector form of the equations of dynamics (ED) is an arbitrary system of solid bodies (SSB), allowing elementary output ED specific SSB and solve SSB the synthesis problem with the given properties.
*Keywords: systems of bodies, the equations of dynamics, vector form.*

**References**

1. Melent'ev Yu.I. *Dinamika manipuliatsionnykh sistem robotov* [Dynamics of manipulative robots systems]. Irkutsk, Irkutsk State University Publ., 1985. 348 p.
2. Telegin A.I. *Uravneniia matematicheskikh modelei mekhanicheskikh system* [Equations of mathematical models of mechanical systems]. Cheliabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 1999. 181 p.
3. Telegin A.I. Algorithms for solving the first problem of the dynamics of arbitrary systems of bodies. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2001, iss. 1, no. 6 (06), pp. 3–9. (in Russ.)
4. Telegin A.I. New equations to solve dynamics problems and synthesis system of solid bodies. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2006, iss. 8, no. 11 (66), pp. 3–14. (in Russ.)
5. Telegin A.I. General and particular types of dynamics equations systems of absolutely solid bodies. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2007, iss. 9, no. 11 (83), pp. 3–13. (in Russ.)
6. Telegin A.I. Mathematical provision algorithms to derive the equations of dynamics of systems of bodies with one branch on the plane and their integration using power series. *Bulletin of Moscow State Technical University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 1995, no.1, pp. 55–61. (in Russ.)
7. Lur'e A.I. *Analiticheskaia Mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 824 p.

***Received 25 March 2014***