УДК 531.3

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖУЩИХ СИЛ И МОМЕНТОВ ШАГАЮЩИХ АППАРАТОВ С ТРЁХЗВЕННЫМИ КОНЕЧНОСТЯМИ

А.И. Телегин, В.Б. Фёдоров

Предложены общие уравнения динамики (УД) шагающих аппаратов (ША) с трёхзвенными конечностями (ТК). Выведены формулы вычисления динамических реакций в опорных точках. Для ША в трёхопорном состоянии шесть обобщённых движущих сил (ОДС) звеньев опорных ТК (ОТК) выражены через оставшиеся три ОДС этих ОТК. Получены формулы вычисления ОДС звеньев ОТК, минимизирующих квадратичный (относительно ОДС) критерий качества. Приведён пример.

Ключевые слова: шагающий аппарат, уравнения динамики, первая задача динамики, динамические реакции, движущие силы и моменты сил, оптимизация.

Введение. В монографии [1] рассматривается задача оптимального распределения движущих моментов в шарнирах звеньев ног в процессах ходьбы конкретного шестиногого ША. Решение этой задачи разбивается на два этапа. Сначала на основе упрощённой модели ША, представленного в виде корпуса с массами ног, сосредоточенных в точках их подвеса к корпусу, оптимизируются распределения сил реакций в опорных точках. Затем для каждой ноги определяются оптимальные (в смысле минимума суммы квадратов движущих моментов ноги с весовыми коэффициентами) распределения шарнирных моментов движущих сил.

В предлагаемой статье рассматривается задача оптимального распределения движущих сил и моментов сил в кинематических парах (КП) ОТК в трёхопорных состояниях ША. Решение задачи разбивается на три этапа. Сначала на основе точных и общих УД звеньев ОТК выводятся формулы вычисления динамических реакций связей в опорных точках этих ОТК. Затем из точных УД корпуса определяются шесть ОДС в КП звеньев ОТК через оставшиеся три ОДС, которые названы независимыми ОДС (НОДС). В заключение для поиска оптимальных НОДС решается конечномерная оптимизационная задача. Найденные решения позволяют вычислить оптимальные значения ОДС трёх ОТК и им соответствующие распределения динамических реакций в опорных точках ША в процессах ходьбы и выполнения различных маневров.

1. Рассматриваемые ША состоят из корпуса, к которому подвешены четыре или более ТК. Общее число ТК обозначим через N. ША через ТК взаимодействует с опорной поверхностью (ОП). С ОП жёстко свяжем систему координат (СК) $OXYZ$, которую будем называть абсолютной СК (АСК). Ось OY АСК направим против силовых линий гравитационного поля. С корпусом ША жёстко свяжем СК $O_1X_1Y_1Z_1$ с ортами $\overline{i}_1$, $\overline{j}_1$, $\overline{k}_1$ и назовём её СК корпуса (СКК). Звенья ТК условимся различать по номерам 1, 2, 3. Корпус с 1-м звеном j-й ТК образует первую КП, в которой корпус является базовым телом, а первое звено – смежным. Первое звено j-й ТК со 2-м звеном образуют вторую КП j-й ТК, в которой 1-е звено является базовым, а 2-е – смежным звеном этой КП. Второе звено с 3-м звеном j-й ТК образуют третью КП j-й ТК, в которой 2-е звено является базовым, а 3-е – смежным звеном этой КП. В рассматриваемых ША КП, связывающие звенья ТК друг с другом и с корпусом, могут быть как поступательными (ПКП), так и вращательными (ВКП). Осью ПКП является прямая, параллельная направлению поступательного перемещения смежного тела относительно базового. Осью ВКП является ось вращения смежного тела пары относительно базового. Для идентификации i-й КП j-й ТК будем использовать переключатель δ_{ji}. Для i-й ПКП j-й ТК $\delta_{ji} = 0$. Для i-й ВКП j-й ТК $\delta_{ji} = 1$.

С i-м звеном j-й ТК жёстко свяжем СК $O_{ji}X_{ji}Y_{ji}Z_{ji}$ с репером $\overline{i}_{ji}, \overline{j}_{ji}, \overline{k}_{ji}$. Точку O_{ji} разместим на оси i-й КП. Одну из осей $O_{ji}\overline{i}_{ji}$, $O_{ji}\overline{j}_{ji}$ или $O_{ji}\overline{k}_{ji}$ направим вдоль оси этой КП и её орт обозначим через $\overline{p}_{ji}$, т. е. $\overline{p}_{ji} \in \{\overline{i}_{ji}, \overline{j}_{ji}, \overline{k}_{ji}\}$. Единичные векторы $\overline{p}_{j1}$, $\overline{p}_{j2}$, $\overline{p}_{j3}$ будем называть *ортами j-й ТК*. Начальное положение точки O_{ji} относительно базы *i*-й КП будем называть *базовой точкой i-го звена j-й ТК* и обозначать её через O^o_{ji}. Точку O^o_{j1} назовём *точкой подвеса j-й ТК*. Все точки O^o_{j1} неподвижны относительно корпуса ША. Контакт конца опорной ТК (конца 3-го звена этой ТК) с ОП будем считать точечным. Через O_{tj} обозначим точку контакта *j*-й ТК, если она опорная. Центр масс (ЦМ) *i*-го звена *j*-й ТК обозначим через C_{ji}.

2. УД ША и реакции в опорных точках. Назовём *базисом j-й ТК* некомпланарные векторы $\overline{e}_{j1}$, $\overline{e}_{j2}$, $\overline{e}_{j3}$, вычисляемые по формуле $\overline{e}_{ji} = \hat{\delta}_{ji}\overline{p}_{ji} + \delta_{ji}\overline{p}_{ji} \times \overline{r}^o_{ij}$, *i*=1,2,3, где $\overline{r}^o_{ij} = \overline{O^o_{ji}O_{tj}}$, $\hat{\delta}_{ji} = 1 - \delta_{ji}$. Используя утверждения 2, 3, 6 статьи [2], докажем:

Утверждение 1. УД рассматриваемых ША представимы в следующем виде

$$\begin{cases} m_0\left(\overline{W} - \overline{g}\right) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} m_{ji}\left(\overline{W}_{ji} - \overline{g}\right) - \overline{F} = \sum_{j=1}^{3}\overline{F}_{rj}; & (1) \\ m_0\overline{R}_c \times \left(\overline{W} - \overline{g}\right) + I_c \cdot \overline{\varepsilon} + \overline{\omega} \times I_c \cdot \overline{\omega} + & \\ +\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left[m_{ji}\overline{O^o_{j1}C}_{ji} \times \left(\overline{W}_{ji} - \overline{g}\right) + I^c_{ji} \cdot \overline{\varepsilon}_{ji} + \overline{\omega}_{ji} \times I^c_{ji} \cdot \overline{\omega}_{ji}\right] - \overline{M} = \sum_{j=1}^{3}\overline{r}_{0j} \times \overline{F}_{rj}; & (2) \\ H_{ji} - Q_{ji} = \overline{e}_{ji} \cdot \overline{F}_{rj}, \quad \mathrm{j} = 1,2,3; \quad \mathrm{i} = 1,2,3, & (3) \end{cases}$$

где $Q_{ji} = \hat{\delta}_{ji}F_{ji} + \delta_{ji}M_{ji}$,

$$H_{ji} = \hat{\delta}_{ji}\overline{p}_{ji} \cdot \sum_{k=i}^{3} m_{jk}\left(\overline{W}_{jk} - \overline{g}\right) + \delta_{ji}\overline{p}_{ji} \cdot \sum_{k=i}^{3}\left[m_{jk}\overline{O^o_{ji}C}_{jk} \times \left(\overline{W}_{jk} - \overline{g}\right) + I^c_{jk} \cdot \overline{\varepsilon}_{jk} + \overline{\omega}_{jk} \times I^c_{jk} \cdot \overline{\omega}_{jk}\right], \quad (4)$$

m_0 – масса корпуса, $\overline{W}$ – абсолютное ускорение ЦМ корпуса, $\overline{g}$ – ускорение свободного падения, m_{ji} – масса *i*-го звена j-й ТК, $\overline{W}_{ji}$ – абсолютное ускорение ЦМ *i*-го звена *j*-й ТК, $\overline{F}$ – главный вектор внешних сил, действующих на корпус ША, $\overline{F}_{rj}$ – сила реакции в опорной точке *j*-й ТК, $\overline{R}_c = \overline{OC}_1$, C_1 – ЦМ корпуса, I_c – тензор инерции корпуса относительно его ЦМ, $\overline{\omega}, \overline{\varepsilon}$ – абсолютные угловые скорость и ускорение корпуса, I^c_{ji} – тензор инерции *i*-го звена *j*-й ТК относительно ЦМ этого звена, $\overline{\omega}_{ji}, \overline{\varepsilon}_{ji}$ – абсолютные угловые скорость и ускорение *i*-го звена *j*-й ТК, $\overline{M}$ – главный момент внешних сил, действующих на корпус, $\overline{r}_{0j} = \overline{OO}_{tj}$, F_{ji} – движущая сила вдоль оси *i*-й ПКП *j*-й ТК, M_{ji} – движущий момент силы относительно оси *i*-й ВКП *j*-й ТК.

Для вычисления $\overline{\omega}_{ji}, \overline{\varepsilon}_{ji}, \overline{W}_{ji}$ можно использовать следующие рекуррентные формулы

$$\overline{\omega}_{j1} = \overline{\omega} + \delta_{j1}\dot{q}_{j1}\overline{p}_{j1}, \ \overline{\varepsilon}_{j1} = \overline{\varepsilon} + \delta_{j1}\ddot{q}_{j1}\overline{j}_{j1} + \overline{\omega} \times \overline{\omega}_{j1}, \ \overline{W}^1_j = \overline{W} + \overline{\varepsilon} \times \overline{OO^o_{j1}} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{OO^o_{j1}} + 2\overline{V}\right),$$

$$\overline{\omega}_{ji} = \overline{\omega}_{ji-1} + \delta_{ji}\dot{q}_{ji}\overline{j}_{ji}, \ \overline{\varepsilon}_{ji} = \overline{\varepsilon}_{ji-1} + \delta_{ji}\ddot{q}_{ji}\overline{p}_{ji} + \overline{\omega}_{ji-1} \times \overline{\omega}_{ji},$$

$$\overline{W}^i_j = \overline{W}^{i-1}_j + \hat{\delta}_{ji-1}\ddot{q}_{ji-1}\overline{p}_{ji-1} + \overline{\varepsilon}_{ji-1} \times \overline{O^o_{ji-1}O^o_{ji}} + \overline{\omega}_{ji-1} \times \left(\overline{\omega}_{ji-1} \times \overline{O^o_{ji-1}O^o_{ji}} + 2\hat{\delta}_{ji-1}\dot{q}_{ji-1}\overline{p}_{ji-1}\right), \ i = 2, 3,$$

$$\overline{W}_{ji} = \overline{W}^i_j + \hat{\delta}_{ji}\ddot{q}_{ji}\overline{p}_{ji} + \overline{\varepsilon}_{ji} \times \overline{O^o_{ji}C_{ji}} + \overline{\omega}_{ji} \times \left(\overline{\omega}_{ji} \times \overline{O^o_{ji}C_{ji}} + 2\hat{\delta}_{ji}\dot{q}_{ji}\overline{p}_{ji}\right),$$

где $\overline{V}$ – абсолютная скорость ЦМ корпуса, q_{ji} – обобщённая координата (ОК) *i*-го звена *j*-й ТК. Если $\delta_{ji} = 0$, то в качестве q_{ji} можно выбрать координату точки C_{ji} на оси $O^o_{ji}\overline{p}_{ji}$. Если $\delta_{ji} = 1$, то q_{ji} – угол поворота *i*-го звена *j*-й ТК относительно своей базы.

Доказательство. Введём обозначения $\bar{E}_{0k} = \bar{H}_{0k} - \bar{F}_k$, $\bar{H}_{0k} = \sum_{i \ge k} m_{0i}\left(\bar{W}_{ci} - \bar{g}\right)$. Тогда согласно утверждению 6 статьи [2] получим $\bar{E}_{0k} = \bar{H}_{0k} - \bar{F}_k = \sum_{i \ge k} \bar{F}_{ri}$. Для корпуса ША k = 1. Следовательно, уравнение поступательного движения корпуса примет вид $\bar{E}_{01} = \bar{H}_{01} - \bar{F}_1 = \bar{H}_{01} - \bar{F} = \sum_{j=1}^{3} \bar{F}_{rj}$,

где $\bar{H}_{01} = \sum_{i=1}^{3N+1} m_{0i}\left(\bar{W}_{ci} - \bar{g}\right) = m_0\left(\bar{W} - \bar{g}\right) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} m_{ji}\left(\bar{W}_{ji} - \bar{g}\right)$, $\bar{W}_{ci}$ – абсолютное ускорение ЦМ i-го тела [2]. Отсюда получаем УД (1). Аналогично из утверждения 6 статьи [2] получим следующее уравнение вращения корпуса ША вокруг его ЦМ $\bar{E}_{11} = \sum_{j=1}^{3} \overline{OO_{tj}} \times \bar{F}_{rj}$,

где $\bar{E}_{11} = m_0 \bar{R}_c \times \left(\bar{W} - \bar{g}\right) + I_c \cdot \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \times I_c \cdot \bar{\omega} +$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\left[m_{ji}\,\overline{O_{j1}^{o}C}_{ji} \times \left(\bar{W}_{ji} - \bar{g}\right) + I_{ji}^{c} \cdot \bar{\varepsilon}_{ji} + \bar{\omega}_{ji} \times I_{ji}^{c} \cdot \bar{\omega}_{ji} \right] - \bar{M} = \sum_{j=1}^{3} \bar{r}_{0j} \times \bar{F}_{rj}.$$

Правая часть этого уравнения получается из следующих преобразований

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\bar{M}_{rj} + \overline{O_{01}O_{j3}^{o}} \times \bar{F}_{rj}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\overline{O_{j3}^{o}O}_{tj} \times \bar{F}_{rj} + \overline{OO_{j3}^{o}} \times \bar{F}_{rj}\right) = \sum_{j=1}^{3} \overline{OO_{tj}} \times \bar{F}_{rj}.$$

Отсюда получаем УД (2).

Если i-е звено j-й ТК образует со своей базой ПКП, то согласно утверждению 6 статьи [2] его УД имеет вид $\bar{p}_{ji} \cdot \sum_{k=i}^{3} m_{jk}\left(\bar{W}_{jk} - \bar{g}\right) - F_{ji} = \bar{p}_{ji} \cdot \bar{F}_{rj}$. Если i-е звено j-й ТК образует со своей базой ВКП, то согласно утверждению 6 статьи [2] его УД имеет вид

$$\bar{p}_{ji} \cdot \sum_{k=i}^{3}\left[m_{jk}\,\overline{O_{ji}^{o}C}_{jk} \times \left(\bar{W}_{jk} - \bar{g}\right) + I_{jk}^{c} \cdot \bar{\varepsilon}_{jk} + \bar{\omega}_{jk} \times I_{jk}^{c} \cdot \bar{\omega}_{jk} \right] - M_{ji} =$$

$$= \bar{p}_{ji} \cdot \left(\bar{M}_{rj} + \overline{O_{ji}^{o}C_{j3}^{o}} \times \bar{F}_{rj}\right) = \bar{p}_{ji} \times \overline{O_{ji}^{o}O}_{tj} \cdot \bar{F}_{rj},$$

так как для рассматриваемых ША $\bar{M}_{rj} = \overline{O_{j3}^{o}O}_{tj} \times \bar{F}_{rj}$ и $\overline{O_{ji}^{o}O_{j3}^{o}} + \overline{O_{j3}^{o}O}_{tj} = \overline{O_{ji}^{o}O}_{tj}$. Умножим 1-е из этих УД на $\hat{\delta}_{ji}$, а 2-е на δ_{ji} и просуммируем их. Тогда с учётом принятых обозначений получим УД (3).

Согласно утверждению 3 статьи [2] получим

$$\bar{\omega}_{j1} = \bar{\omega} + \delta_{j1}\dot{q}_{j1}\bar{p}_{j1},\ \bar{\omega}_{j2} = \bar{\omega}_{j1} + \delta_{2}\dot{q}_{j2}\bar{p}_{j2},\ \bar{\omega}_{j3} = \bar{\omega}_{j2} + \delta_{j3}\dot{q}_{j3}\bar{p}_{j3},$$

$$\bar{\varepsilon}_{j1} = \bar{\varepsilon} + \delta_{j1}\ddot{q}_{j1}\bar{p}_{j1} + \bar{\omega} \times \bar{\omega}_{j1},\quad \bar{\varepsilon}_{j2} = \bar{\varepsilon}_{j1} + \delta_{j2}\ddot{q}_{j2}\bar{p}_{j2} + \bar{\omega}_{j1} \times \bar{\omega}_{j2},\quad \bar{\varepsilon}_{j3} = \bar{\varepsilon}_{j2} + \delta_{j3}\ddot{q}_{j3}\bar{p}_{j3} + \bar{\omega}_{j2} \times \bar{\omega}_{j3}.$$

Аналогично, из утверждения 2 статьи [2] получим

$$\bar{W}_{ji} = \bar{W}_{j}^{i} + \hat{\delta}_{ji}\ddot{q}_{ji}\bar{p}_{ji} + \bar{\varepsilon}_{ji} \times \overline{O_{ji}^{o}C_{ji}} + \bar{\omega}_{ji} \times \left(\bar{\omega}_{ji} \times \overline{O_{ji}^{o}C_{ji}} + 2\hat{\delta}_{ji}\dot{q}_{ji}\bar{p}_{ji}\right),$$

где $\bar{W}_{j}^{1} = \bar{W} + \bar{\varepsilon} \times \overline{OO_{j1}^{o}} + \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \overline{OO_{j1}^{o}} + 2\bar{V}\right)$,

$$\bar{W}_{j}^{2} = \bar{W}_{j}^{1} + \hat{\delta}_{j1}\ddot{q}_{j1}\bar{p}_{j1} + \bar{\varepsilon}_{j1} \times \overline{O_{j1}^{o}O_{j2}^{o}} + \bar{\omega}_{j1} \times \left(\bar{\omega}_{j1} \times \overline{O_{j1}^{o}O_{j2}^{o}} + 2\hat{\delta}_{j1}\dot{q}_{j1}\bar{p}_{j1}\right),$$

$$\bar{W}_{j}^{3} = \bar{W}_{j}^{2} + \hat{\delta}_{j2}\ddot{q}_{j2}\bar{p}_{j2} + \bar{\varepsilon}_{j2} \times \overline{O_{j2}^{o}O_{j3}^{o}} + \bar{\omega}_{j2} \times \left(\bar{\omega}_{j2} \times \overline{O_{j2}^{o}O_{j3}^{o}} + 2\hat{\delta}_{j2}\dot{q}_{j2}\bar{p}_{j2}\right).$$

Утверждение доказано.

Из (3) можно выразить $\overline{F}_{rj}$. Для этого используем *репер* j-й ТК, векторы $\overline{e}_j^1$, $\overline{e}_j^2$, $\overline{e}_j^3$ которого вычисляются по формулам $\overline{e}_j^1 = \overline{e}_{j2} \times \overline{e}_{j3} / d_j$, $\overline{e}_j^2 = \overline{e}_{j3} \times \overline{e}_{j1} / d_j$, $\overline{e}_j^3 = \overline{e}_{j1} \times \overline{e}_{j2} / d_j$, $j = 1, 2, 3$, где $d_j = \overline{e}_{j1} \cdot \overline{e}_{j2} \times \overline{e}_{j3}$. Векторы $\overline{e}_j^1, \overline{e}_j^2, \overline{e}_j^3$ некомпланарны, так как некомпланарны векторы $\overline{e}_{j1}, \overline{e}_{j2}, \overline{e}_{j3}$.

Утверждение 2. Разложение силы $\overline{F}_{rj}$ по векторам репера j-й ТК имеет вид

$$\overline{F}_{rj} = \sum_{i=1}^{3} \left(H_{ji} - Q_{ji} \right) \overline{e}_j^i . \qquad (5)$$

Доказательство. Для трёх звеньев (i = 1, 2, 3) ТК из (3) получим систему трёх уравнений $\overline{e}_{j1} \cdot \overline{F}_{rj} = H_{j1} - Q_{j1}$, $\overline{e}_{j2} \cdot \overline{F}_{rj} = H_{j2} - Q_{j2}$, $\overline{e}_{j3} \cdot \overline{F}_{rj} = H_{j3} - Q_{j3}$. Используя формулу вычисления вектора по трём скалярным произведениям и понятие репера j-й ТК, получим искомую формулу (5). *Утверждение доказано.*

3. Выражение ОДС через НОДС. Из (1) можно выразить ОДС звеньев любой ТК.

Утверждение 3. ОДС звеньев первой ОТК выражаются через ОДС второй и третьей ОТК, а также остальные силовые факторы по формуле

$$Q_{1i} = H_{1i} - \overline{e}_{1i} \cdot \left(\overline{E}_{01} - \sum_{j=2}^{3} \overline{F}_{rj} \right), \; i = 1,2,3, \qquad (6)$$

где $\overline{E}_{01}$ – левая часть УД (1).

Доказательство. Подставим в УД (1) вместо $\overline{F}_{r1}$ формулу (5). Тогда получим

$$\overline{E}_{01} = \sum_{i=1}^{3} \left(H_{1i} - Q_{1i} \right) \overline{e}_1^i + \sum_{j=2}^{3} \overline{F}_{rj} .$$

Отсюда для определения искомых ОДС получим векторное уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} \left(Q_{1i} - H_{1i} \right) \overline{e}_1^i = \sum_{j=2}^{3} \overline{F}_{rj} - \overline{E}_{01} . \qquad (7)$$

Представим его в виде

$$\left[\left(Q_{11} - H_{11} \right) \overline{\mathrm{e}}_{12} \times \overline{\mathrm{e}}_{13} + \left(Q_{12} - H_{12} \right) \overline{\mathrm{e}}_{13} \times \overline{\mathrm{e}}_{11} + \left(Q_{13} - H_{13} \right) \overline{\mathrm{e}}_{11} \times \overline{\mathrm{e}}_{12} \right] / d_1 = \sum_{j=2}^{3} \overline{F}_{rj} - \overline{E}_{01} .$$

Умножим последовательно это равенство скалярно на $\overline{e}_{11}, \overline{e}_{12}, \overline{e}_{13}$. Тогда получим три равенства $Q_{1i} - H_{1i} = \overline{e}_{1i} \cdot \left(\sum_{j=2}^{3} \overline{F}_{rj} - \overline{E}_{01} \right)$ (i = 1,2,3). Отсюда следует искомая формула (6). *Утверждение доказано.*

Из (2) можно выразить три ОДС через остальные силовые факторы. Уравнение, позволяющее это сделать, содержит выражение

$$Q_{21} \overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^1 + Q_{22} \overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^2 + Q_{23} \overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^3 + Q_{31} \overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^1 + Q_{32} \overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^2 + Q_{33} \overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^3 , \qquad (8)$$

где $\overline{r}_{13} = \overline{O_{t1} O_{t3}}$, $\overline{r}_{12} = \overline{O_{t1} O_{t2}}$.

Определение 1. Три линейно независимых вектора из множества

$$\overline{RE} = \left\{ \overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^1, \; \overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^2, \; \overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^3, \; \overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^1, \; \overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^2, \; \overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^3 \right\}$$

обозначим через $\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$, $\overline{s}_3$ и назовём *трёхопорным базисом (ТБ)* ША. Три вектора $\overline{s}_{o1}$, $\overline{s}_{o2}$, $\overline{s}_{o3}$ из множества $\overline{E} = \left\{ \overline{e}_2^1, \; \overline{e}_2^2, \; \overline{e}_2^3, \; \overline{e}_3^1, \; \overline{e}_3^2, \; \overline{e}_3^3 \right\}$ (из реперов 2-й и 3-й ОТК), соответствующие векторам ТБ, т. е. являющиеся векторными множителями в формулах их вычисления, назовём *порождающими векторами ТБ*. ОДС Q_{s1}, Q_{s2}, Q_{s3} из множества $Q = \left\{ Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} \right\}$, соответствующие векторам ТБ в (8), т. е. являющиеся скалярными множителями перед векторами ТБ в (8), назовём *зависимыми ОДС*. Оставшиеся величины множеств $\overline{RE}$, $\overline{E}$ и Q обозначим соответственно через $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \overline{c}_3$; $\overline{c}_{o1}, \overline{c}_{o2}, \overline{c}_{o3}$ и Q_1, Q_2, Q_3. Последние три скалярные величины составляют НОДС.

Введение ТБ связано с необходимостью представления суммы (8) в виде

$$\sum_{k=1}^{3}\left(Q_{sk}\overline{s}_k + Q_k\overline{c}_k\right).$$

Вопрос существования ТБ рассмотрим в последнем разделе. Здесь введём в обращение понятие *трёхопорного репера (ТР)* ША, векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ которого вычисляются по формулам $\overline{e}_1 = \overline{s}_2 \times \overline{s}_3 / s$, $\overline{e}_2 = \overline{s}_3 \times \overline{s}_1 / s$, $\overline{e}_3 = \overline{s}_1 \times \overline{s}_2 / s$, где $s = \overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 \times \overline{s}_3$.

Утверждение 4. Зависимые ОДС второй и третьей ОТК выражаются через НОДС и остальные силовые факторы ША по формулам

$$Q_{si} = H_i - \overline{e}_i \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k\overline{c}_k, \quad i = 1, 2, 3, \tag{9}$$

$$H_i = \overline{e}_i \cdot \left[\overline{r}_{01} \times \overline{E}_{01} + \sum_{k=1}^{3}\left(H_{2k}\overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^k + H_{3k}\overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^k\right) - \overline{E}_{11}\right], \tag{10}$$

где $\overline{E}_{11}$ – левая часть УД (2).

Доказательство. Подставим в УД (2) вместо $\overline{F}_{rj}$ формулу (5). Тогда получим

$$\overline{E}_{11} = \sum_{j=1}^{3}\overline{r}_{0j} \times \overline{F}_{rj} = \overline{r}_{01} \times \sum_{i=1}^{3}\left(H_{1i} - Q_{1i}\right)\overline{e}_1^i + \overline{r}_{02} \times \sum_{i=1}^{3}\left(H_{2i} - Q_{2i}\right)\overline{e}_2^i + \overline{r}_{03} \times \sum_{i=1}^{3}\left(H_{3i} - Q_{3i}\right)\overline{e}_3^i.$$

Вместо $\sum_{i=1}^{3}\left(Q_{1i} - H_{1i}\right)\overline{e}_1^i$ подставим выражение (7), где вместо $\overline{F}_{r2}$, $\overline{F}_{r3}$ подставим выражения из (5). Тогда получим

$$\overline{E}_{11} = -\overline{r}_{01} \times \sum_{j=2}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(H_{jk} - Q_{jk}\right)\overline{e}_j^k + \overline{r}_{01} \times \overline{E}_{01} + \overline{r}_{02} \times \sum_{k=1}^{3}\left(H_{2k} - Q_{2k}\right)\overline{e}_2^k + \overline{r}_{03} \times \sum_{k=1}^{3}\left(H_{3k} - Q_{3k}\right)\overline{e}_3^k =$$

$$= \left(\overline{r}_{02} - \overline{r}_{01}\right) \times \sum_{k=1}^{3}\left(H_{2k} - Q_{2k}\right)\overline{e}_2^k + \left(\overline{r}_{03} - \overline{r}_{01}\right) \times \sum_{k=1}^{3}\left(H_{3k} - Q_{3k}\right)\overline{e}_3^k + \overline{r}_{01} \times \overline{E}_{01} = \overline{r}_{01} \times \overline{E}_{01} +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\left(H_{2k}\overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^k + H_{3k}\overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^k\right) - \overline{r}_{12} \times \left(Q_{21}\overline{e}_2^1 + Q_{22}\overline{e}_2^2 + Q_{23}\overline{e}_2^3\right) - \overline{r}_{13} \times \left(Q_{31}\overline{e}_3^1 + Q_{32}\overline{e}_3^2 + Q_{33}\overline{e}_3^3\right).$$

Выделим в последнем выражении ТБ. Тогда для определения зависимых ОДС второй и третьей ОТК с учётом равенств $\overline{r}_{13} = \overline{r}_{03} - \overline{r}_{01}$, $\overline{r}_{12} = \overline{r}_{02} - \overline{r}_{01}$ получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{3} Q_{sk}\overline{s}_k = \overline{r}_{01} \times \overline{E}_{01} + \sum_{k=1}^{3}\left(H_{2k}\overline{r}_{12} \times \overline{e}_2^k + H_{3k}\overline{r}_{13} \times \overline{e}_3^k\right) - \overline{E}_{11} - \sum_{k=1}^{3} Q_k\overline{c}_k.$$

Отсюда по формулам коэффициентов разложения вектора с учётом введённых обозначений получаем искомую формулу (9). *Утверждение доказано.*

Замечание 1. Если начало АСК поместить в точку O_{t1}, то $\overline{r}_{01} = 0$, $\overline{r}_{13} = \overline{r}_{03}$, $\overline{r}_{12} = \overline{r}_{02}$ и

$$H_i = \overline{e}_i \cdot \left[\sum_{k=1}^{3}\left(H_{2k}\overline{r}_{02} \times \overline{e}_2^k + H_{3k}\overline{r}_{03} \times \overline{e}_3^k\right) - \overline{E}_{11}\right].$$

Утверждение 5. ОДС звеньев первой ОТК выражаются через НОДС и остальные силовые факторы ША по формулам

$$Q_{1i} = h_i - \overline{e}_{1i} \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k\overline{q}_k, \quad i = 1, 2, 3, \tag{11}$$

где $h_i = H_{1i} - \overline{e}_{1i} \cdot \left(\overline{E}_{01} - \sum_{j=2}^{3}\sum_{k=1}^{3} H_{jk}\overline{e}_j^k + \sum_{j=1}^{3} H_j\overline{s}_{oj}\right)$, $\overline{q}_k = \overline{c}_{ok} - \sum_{j=1}^{3}\left(\overline{e}_j \cdot \overline{c}_k\right)\overline{s}_{oj}$.

Доказательство. Из (6) и (5) получим

$$Q_{1i} = H_{1i} - \bar{e}_{1i} \cdot \left(\bar{E}_{01} - \sum_{j=2}^{3} \sum_{k=1}^{3} H_{jk} \ \bar{e}_j^k \right) - \bar{e}_{1i} \cdot \sum_{j=2}^{3} \sum_{k=1}^{3} Q_{jk} \ \bar{e}_j^k \ .$$

Выделим в последнем выражении три зависимые и три независимые ОДС. Тогда получим

$$Q_{1i} = H_{1i} - \bar{e}_{1i} \cdot \left(\bar{E}_{01} - \sum_{j=2}^{3} \sum_{k=1}^{3} H_{jk} \ \bar{e}_j^k \right) - \bar{e}_{1i} \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} Q_{sk} \bar{s}_{ok} + \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{c}_{ok} \right).$$

Если вместо зависимых ОДС подставить выражения из (9), то получим

$$Q_{1i} = H_{1i} - \bar{e}_{1i} \cdot \left(\bar{E}_{01} - \sum_{j=2}^{3} \sum_{k=1}^{3} H_{jk} \ \bar{e}_j^k \right) - \bar{e}_{1i} \cdot \sum_{j=1}^{3} \left(H_j - \bar{e}_j \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{c}_k \right) \bar{s}_{oj} - \bar{e}_{1i} \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{c}_{ok} \ .$$

С использованием обозначения h_i получим

$$Q_{1i} = h_i + \bar{e}_{1i} \cdot \sum_{j=1}^{3} \left(\bar{e}_j \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{c}_k \right) \bar{s}_{oj} - \bar{e}_{1i} \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{c}_{ok} = h_i - \bar{e}_{1i} \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \left[\bar{c}_{ok} - \sum_{j=1}^{3} \left(\bar{e}_j \cdot \bar{c}_k \right) \ \bar{s}_{oj} \right].$$

С учётом обозначения $\bar{q}_k$ получим искомую формулу (11). *Утверждение доказано.*

4. Оптимальные НОДС. Полученные формулы вычисления шести ОДС звеньев ОТК через НОДС этих ОТК эффективно использовать при решении задачи поиска оптимальных программных движений (ходьбы) ША по известным алгоритмам. Если при этом минимизируется сумма квадратов ОДС (с заданными весовыми коэффициентами), то можно использовать

Утверждение 6. Значения НОДС ША, минимизирующих функцию

$$J = \sum_{i=1}^{3} \left(k_{1i} Q_{1i}^2 + k_{2i} Q_{2i}^2 + k_{3i} Q_{3i}^2 \right),$$

вычисляются по формулам

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $a_j = \sum_{i=1}^{3} \left(k_{si} H_i \bar{e}_i \cdot \bar{c}_j + k_{1i} h_i \bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_j \right)$, $a_{jj} = k_j + \sum_{i=1}^{3} \left[k_{1i} \left(\bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_j \right)^2 + k_{si} \left(\bar{e}_i \cdot \bar{c}_j \right)^2 \right]$,

$a_{12} = \sum_{i=1}^{3} \left(k_{1i} \bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_2 \bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_1 + k_{si} \bar{e}_i \cdot \bar{c}_2 \bar{e}_i \cdot \bar{c}_1 \right)$, $a_{13} = \sum_{i=1}^{3} \left(k_{1i} \bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_3 \bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_1 + k_{si} \bar{e}_i \cdot \bar{c}_3 \bar{e}_i \cdot \bar{c}_1 \right)$,

$a_{23} = \sum_{i=1}^{3} \left(k_{1i} \bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_3 \bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_2 + k_{si} \bar{e}_i \cdot \bar{c}_3 \bar{e}_i \cdot \bar{c}_2 \right)$, k_{si}, k_i – коэффициенты функции *J*, соответствующие ОДС Q_{si} и Q_i.

Доказательство. Минимизируемая функция имеет вид

$$J = \sum_{i=1}^{3} \left(k_{1i} Q_{1i}^2 + k_{2i} Q_{2i}^2 + k_{3i} Q_{3i}^2 \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(k_{1i} Q_{1i}^2 + k_{si} Q_{si}^2 + k_i Q_i^2 \right).$$

Здесь из ОДС 2-й и 3-й ОТК выделены НОДС. Подставим вместо Q_{1i} и Q_{si} их выражения (11) и (9). Тогда получим

$$J = \sum_{i=1}^{3} \left[k_{1i} \left(h_i - \bar{e}_{1i} \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{q}_k \right)^2 + k_{si} \left(H_i - \bar{e}_i \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{c}_k \right)^2 + k_i Q_i^2 \right].$$

Из необходимых условий экстремума получим для *j* = 1, 2, 3

$$\frac{\partial J}{\partial Q_j} = \sum_{i=1}^{3} \left[2k_{1i} \left(h_i - \bar{e}_{1i} \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{q}_k \right) \left(-\bar{e}_{1i} \cdot \bar{q}_j \right) + 2k_{si} \left(H_i - \bar{e}_i \cdot \sum_{k=1}^{3} Q_k \bar{c}_k \right) \left(-\bar{e}_i \cdot \bar{c}_j \right) \right] + 2k_j Q_j = 0 \ .$$

После элементарных преобразований получим

$$\sum_{k=1}^{3} Q_k \sum_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_k\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_j + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_k\overline{e}_i\cdot\overline{c}_j\right) + k_j Q_j = \sum_{i=1}^{3}\left(k_{si}H_i\overline{e}_i\cdot\overline{c}_j + k_{1i}h_i\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_j\right),$$

где j = 1, 2, 3. Эта система с учётом обозначения для a_j представима в виде $\sum\limits_{k=1}^{3} a_{jk}Q_k = a_j$,

где $a_{11} = k_1 + \sum\limits_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_1\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_1 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_1\overline{e}_i\cdot\overline{c}_1\right)$, $a_{12} = \sum\limits_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_2\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_1 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_2\overline{e}_i\cdot\overline{c}_1\right)$,

$$a_{13} = \sum_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_3\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_1 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_3\overline{e}_i\cdot\overline{c}_1\right),\ a_{21} = \sum_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_1\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_2 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_1\overline{e}_i\cdot\overline{c}_2\right),$$

$$a_{22} = k_2 + \sum_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_2\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_2 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_2\overline{e}_i\cdot\overline{c}_2\right),\ a_{23} = \sum_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_3\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_2 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_3\overline{e}_i\cdot\overline{c}_2\right),$$

$$a_{31} = \sum_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_1\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_3 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_1\overline{e}_i\cdot\overline{c}_3\right),\ a_{32} = \sum_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_2\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_3 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_2\overline{e}_i\cdot\overline{c}_3\right),$$

$$a_{33} = k_3 + \sum_{i=1}^{3}\left(k_{1i}\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_3\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_3 + k_{si}\overline{e}_i\cdot\overline{c}_3\overline{e}_i\cdot\overline{c}_3\right).$$

Отсюда с учётом введённых обозначений получим формулу (12). *Утверждение доказано*.

5. Пример. Выведем формулы вычисления реакций и оптимального распределения ОДС в опорных точках многоногого ША с ПКП совершающего равномерное прямолинейное перемещение вдоль горизонтальной прямой так, что первая опорная нога расположена по правому борту ША, а две другие по – левому.

Оси $O_1\overline{i}_1$, $O_1\overline{k}_1$ СКК расположим в плоскости, проходящей через точки подвеса опорных ног (j = 1, 2, 3). Ось $O_1\overline{j}_1$ направим против $\overline{g}$, т. е. $\overline{g} = -g\,\overline{j}_1$. В качестве $\overline{p}_{j1}$, $\overline{p}_{j2}$, $\overline{p}_{j3}$ выберем орты $\overline{j}_{j1}$, $\overline{j}_{j2}$, $\overline{j}_{j3}$. ПКП устроены так, что $\overline{p}_{j1} = \overline{j}_{j1} = \pm\overline{k}_1$, $\overline{p}_{j2} = \overline{j}_{j2} = \pm\overline{i}_1$, $\overline{p}_{j3} = \overline{j}_{j3} = -\overline{j}_1$. Здесь и везде в дальнейшем верхний знак перед векторами соответствует ногам правого борта ША, а нижний знак соответствует ногам левого борта. По определению $\overline{e}_{ji} = \overline{j}_{ji}$. Следовательно, векторы репера j-й ноги определяются по формулам $\overline{e}_j^1 = \mp\overline{i}_1\times\overline{j}_1/(-1) = \pm\overline{k}_1$, $\overline{e}_j^2 = \mp\overline{j}_1\times\overline{k}_1/(-1) = \pm\overline{i}_1$, $\overline{e}_j^3 = \overline{k}_1\times\overline{i}_1/(-1) = -\overline{j}_1$, ($j$ = 1, 2, 3), так как $d_j = \overline{j}_{j1}\cdot\overline{j}_{j2}\times\overline{j}_{j3} = -\overline{k}_1\cdot\overline{i}_1\times\overline{j}_1 = -1$. Величины H_{ji} вычисляются по формуле $H_{ji} = \overline{j}_{ji}\cdot\sum\limits_{k=i}^{3} m_{0k}\left(\overline{W}_{jk} - \overline{g}\right)$, где $m_{0k} = m_{jk}$. Здесь считается, что все ноги ША одинаковы.

Для равномерного прямолинейного движения $H_{ji} = \overline{j}_{ji}\cdot\sum\limits_{k=i}^{3} m_{0k}\left(-\overline{g}\right) = -\overline{j}_{ji}\cdot(-g\,\overline{j}_1)\sum\limits_{k=i}^{3} m_{0k}$, т. е. $H_{j1} = H_{j2} = 0$ и $H_{j3} = -m_{03}g$. Следовательно,

$$\overline{F}_{rj} = \sum_{i=1}^{3}\left(H_{ji} - Q_{ji}\right)\overline{e}_j^i = \pm\left(-F_{j1}\right)\overline{k}_1 \pm\left(-F_{j2}\right)\overline{i}_1 + \left(m_{03}g + F_{j3}\right)\overline{j}_1 = \mp F_{j1}\overline{k}_1 \mp F_{j2}\overline{i}_1 + \left(m_{03}g + F_{j3}\right)\overline{j}_1,$$

так как $Q_{ji} = F_{ji}$. В последнем выражении верхний знак (минус) перед движущими силами F_{j1}, F_{j2} соответствует ногам правого борта ША, а нижний знак (плюс) – ногам левого борта.

ОДС звеньев первой опорной ноги выражаются через ОДС второй и третьей опорной ноги по формуле (6), где $\overline{E}_{01} = -\overline{g}\ m_0 - \overline{g}\ \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{3} m_{0i} = -M\overline{g} = Mg\,\overline{j}_1$, М – масса ША. Так как первая опорная нога расположена по правому борту ША, а две другие – по левому, из (6) получим

$$F_{11}=-\bar{k}_1\cdot\left[\mathrm{Mg}\,\bar{j}_1-F_{21}\bar{k}_1-F_{22}\bar{i}_1-\left(m_{03}g+F_{23}\right)\bar{j}_1-F_{31}\bar{k}_1-F_{32}\bar{i}_1-\left(m_{03}g+F_{33}\right)\bar{j}_1\right]=F_{21}+F_{31},$$

$$F_{12}=-\bar{i}_1\cdot\left[Mg\,\bar{j}_1-F_{21}\bar{k}_1-F_{22}\bar{i}_1-\left(m_{03}g+F_{23}\right)\bar{j}_1-F_{31}\bar{k}_1-F_{32}\bar{i}_1-\left(m_{03}g+F_{33}\right)\bar{j}_1\right]=F_{22}+F_{32},$$

$$F_{13}=-m_{03}g+\bar{j}_1\cdot\left[\mathrm{Mg}\,\bar{j}_1-F_{21}\bar{k}_1-F_{22}\bar{i}_1-\left(m_{03}g+F_{23}\right)\bar{j}_1-F_{31}\bar{k}_1-F_{32}\bar{i}_1-\left(m_{03}g+F_{33}\right)\bar{j}_1\right]=$$

$$=-m_{03}g+Mg-m_{03}g-F_{23}-m_{03}g-F_{33}.$$

Начало АСК поместим в точку O_{t1}, тогда $\bar{r}_{01}=0$, $\bar{r}_{31}=\bar{r}_{03}$, $\bar{r}_{21}=\bar{r}_{02}$. Из множества

$$\overline{RE}=-\left\{\bar{r}_{02}\times\bar{k}_1,\bar{r}_{02}\times\bar{i}_1,\bar{r}_{02}\times\bar{j}_1,\bar{r}_{03}\times\bar{k}_1,\bar{r}_{03}\times\bar{i}_1,\bar{r}_{03}\times\bar{j}_1\right\}$$

выберем ТБ $\{s_1,s_2,s_3\}$, где $\bar{s}_1=-\bar{r}_{02}\times\bar{j}_1=-r_{02}\bar{p}$, $\bar{s}_2=-\bar{r}_{03}\times\bar{j}_1=-r_{03}\bar{q}$, $\bar{s}_3=-\bar{r}_{02}\times\bar{i}_1=-r_{02}s_\varphi\bar{j}_1$, где $s_\varphi=\sin\varphi$, φ – угол от $\bar{r}_{02}$ до $\bar{i}_1$. Единичный вектор $\bar{p}$ лежит в ОП и направлен перпендикулярно вектору $\bar{r}_{02}$ так, что $\{\bar{r}_{02},\bar{j}_1,\bar{p}\}$ – правый базис. Единичный вектор $\bar{q}$ лежит в ОП и направлен перпендикулярно вектору $\bar{r}_{03}$ так, что $\{\bar{r}_{03},\bar{j}_1,\bar{q}\}$ – правый базис. Тогда $\bar{s}_{o1}=\bar{e}_2^3=-\bar{j}_1$, $\bar{s}_{o2}=\bar{e}_3^3=-\bar{j}_1$, $\bar{s}_{o3}=\bar{e}_2^2=-\bar{i}_1$, $Q_{s1}=Q_{23}=F_{23}$, $Q_{s2}=Q_{33}=F_{33}$, $Q_{s3}=Q_{22}=F_{22}$, $\bar{c}_1=-\bar{r}_{02}\times\bar{k}_1=-r_{02}s_\alpha\bar{j}_1$, $\bar{c}_2=-\bar{r}_{03}\times\bar{k}_1=-r_{03}s_\beta\bar{j}_1$, $\bar{c}_3=-\bar{r}_{03}\times\bar{i}_1=-r_{03}s_\gamma\bar{j}_1$, $\bar{c}_{o1}=-\bar{k}_1$, $\bar{c}_{o2}=-\bar{k}_1$, $\bar{c}_{o3}=-\bar{i}_1$, $Q_1=Q_{21}=F_{21}$, $Q_2=Q_{31}=F_{31}$, $Q_3=Q_{32}=F_{32}$, где $s_\alpha=\sin\alpha$, $s_\beta=\sin\beta$, $s_\gamma=\sin\gamma$, α – угол от $\bar{r}_{02}$ до $\bar{k}_1$, β – угол от $\bar{r}_{03}$ до $\bar{k}_1$, γ – угол от $\bar{r}_{03}$ до $\bar{i}_1$.

Зависимые ОДС выражаются через НОДС по формуле (9), где

$$H_i=\bar{e}_i\cdot\left(H_{23}\bar{r}_{02}\times\bar{e}_2^3+H_{33}\bar{r}_{03}\times\bar{e}_3^3+M\bar{R}_c\times\bar{g}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}m_{0k}\overline{O_{j1}^oC}_{jk}\times\bar{g}\right)=$$

$$=\bar{e}_i\cdot\bar{j}_1\times\left(H_{23}\bar{r}_{02}+H_{33}\bar{r}_{03}+Mg\bar{R}_c+g\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}m_{0k}\overline{O_{j1}^oC}_{jk}\right).$$

Векторы ТР вычисляются по формулам

$$\bar{e}_1=\bar{s}_2\times\bar{s}_3/(-s_ar_{02}^2r_{03})=(-r_{03}\bar{q})\times(-r_{02}s_\varphi\bar{j}_1)/(-s_ar_{02}^2r_{03})=-\bar{q}_a/(s_\psi r_{02}),$$

$$\bar{e}_2=\bar{s}_3\times\bar{s}_1/(-s_ar_{02}^2r_{03})=-r_{02}s_\varphi\bar{j}_1\times(-r_{02}\bar{p})/(-s_ar_{02}^2r_{03})=\bar{p}_a/(s_\psi r_{03}),$$

$$\bar{e}_3=\bar{s}_1\times\bar{s}_2/(-s_ar_{02}^2r_{03})=(-r_{02}\bar{p})\times(-r_{03}\bar{q})/(-s_ar_{02}^2r_{03})=-\bar{j}_1/(s_\varphi r_{02}),$$

так как $s=\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2\times\bar{s}_3=(-r_{02}\bar{p})\cdot(-r_{03}\bar{q})\times(-r_{02}s_\varphi\bar{j}_1)=-s_ar_{02}^2r_{03}$, $s_a=s_\psi s_\varphi$, $s_\psi=\sin\psi$, ψ – угол от $\bar{p}$ до $\bar{q}$ (от $\bar{r}_{02}$ до $\bar{r}_{03}$). Единичный вектор $\bar{q}_a$ лежит в ОП и направлен перпендикулярно вектору $\bar{q}$ так, что $\{\bar{q},\bar{j}_1,\bar{q}_a\}$ – правый базис. $\bar{q}_a$ коллинеарен вектору $\bar{r}_{03}$. Единичный вектор $\bar{p}_a$ лежит в ОП и направлен перпендикулярно вектору $\bar{p}$ так, что $\{\bar{p},\bar{j}_1,\bar{p}_a\}$ – правый базис. $\bar{p}_a$ коллинеарен вектору $\bar{r}_{02}$. Следовательно, $H_3=0$.

ОДС звеньев первой опорной ноги выражаются через НОДС по формулам (11), где $h_i=H_{1i}-\bar{e}_{1i}\cdot\left(Mg\,\bar{j}_1-\sum_{j=2}^{3}H_{j3}\,\bar{e}_j^3+\sum_{j=1}^{3}H_j\bar{s}_{oj}\right)$. Отсюда $h_1=-\bar{k}_1\cdot\bar{j}_1\left(Mg\ +\sum_{j=2}^{3}H_{j3}-\sum_{j=1}^{2}H_j\right)=0$, $h_2=-\bar{i}_1\cdot\bar{j}_1\left(Mg\ +\sum_{j=2}^{3}H_{j3}-\sum_{j=1}^{2}H_j\right)=0$. По формуле $\bar{q}_k=\bar{c}_{ok}+\sum_{j=1}^{3}\left(\bar{e}_j\cdot\bar{c}_k\right)\bar{s}_{oj}$ получим

$$\bar{q}_1=-\bar{k}_1-\bar{q}_a/(s_\psi r_{02})\cdot(s_\alpha r_{02}\bar{j}_1)\bar{j}_1+\bar{p}_a/(s_\psi r_{03})\cdot(s_\alpha r_{02}\bar{j}_1)\bar{j}_1-\bar{j}_1/(s_\varphi r_{02})\cdot(s_\alpha r_{02}\bar{j}_1)\bar{i}_1=-\bar{k}_1-s_\alpha\bar{i}_1/s_\varphi;$$

$$\bar{q}_2=-\bar{k}_1-\bar{q}_a/(s_\psi r_{02})\cdot(s_\beta r_{03}\bar{j}_1)\bar{j}_1+\bar{p}_a/(s_\psi r_{03})\cdot(s_\beta r_{03}\bar{j}_1)\bar{j}_1-\bar{j}_1/(s_\varphi r_{02})\cdot(s_\beta r_{03}\bar{j}_1)\bar{i}_1=-\bar{k}_1-s_\beta r_{03}\bar{i}_1/(s_\varphi r_{02});$$

$$\bar{q}_3=-\bar{i}_1-\bar{q}_a/(s_\psi r_{02})\cdot(s_\gamma r_{03}\bar{j}_1)\bar{j}_1+\bar{p}_a/(s_\psi r_{03})\cdot(s_\gamma r_{03}\bar{j}_1)\bar{j}_1-\bar{j}_1/(s_\varphi r_{02})\cdot(s_\gamma r_{03}\bar{j}_1)\bar{i}_1=-\bar{i}_1-s_\gamma r_{03}\bar{i}_1/(s_\varphi r_{02}).$$

Оптимальные НОДС ША, минимизирующие функцию J, вычисляются по формуле (2), где $a_j = \sum_{i=1}^{3}\left(k_{si}H_i\overline{e}_i\cdot\overline{c}_j + k_{1i}h_i\overline{e}_{1i}\cdot\overline{q}_j\right) = k_{s1}H_1\overline{e}_1\cdot\overline{c}_j + k_{s2}H_2\overline{e}_2\cdot\overline{c}_j + k_{13}h_3\overline{e}_{13}\cdot\overline{q}_j$,

$\overline{e}_{13}\cdot\overline{q}_1 = -\overline{j}_1\cdot(-\overline{k}_1 - s_\alpha\overline{i}_1/s_\varphi) = 0$, $\overline{e}_{13}\cdot\overline{q}_2 = -\overline{j}_1\cdot(-\overline{k}_1 - s_\beta r_{03}\overline{i}_1/(s_\varphi r_{02})) = 0$,

$\overline{e}_{13}\cdot\overline{q}_3 = -\overline{j}_1\cdot(-\overline{i}_1 - s_\gamma r_{03}\overline{i}_1/(s_\varphi r_{02})) = 0$, $\overline{e}_1\cdot\overline{c}_1 = -\overline{q}_a/(s_\varphi r_{02})\cdot(-r_{02}s_\alpha\overline{j}_1) = 0$,

$\overline{e}_1\cdot\overline{c}_2 = -\overline{q}_a/(s_\varphi r_{02})\cdot(-r_{03}s_\beta\overline{j}_1) = 0$, $\overline{e}_1\cdot\overline{c}_3 = -\overline{q}_a/(s_\varphi r_{02})\cdot(-r_{03}s_\gamma\overline{j}_1) = 0$,

$\overline{e}_2\cdot\overline{c}_1 = \overline{p}_a/(s_\psi r_{03})\cdot(-r_{02}s_\alpha\overline{j}_1) = 0$, $\overline{e}_2\cdot\overline{c}_2 = \overline{p}_a/(s_\psi r_{03})\cdot(-r_{03}s_\beta\overline{j}_1) = 0$,

$\overline{e}_2\cdot\overline{c}_3 = \overline{p}_a/(s_\psi r_{03})\cdot(-r_{03}s_\gamma\overline{j}_1) = 0$.

Следовательно, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ и НОДС $F_{21} = F_{31} = F_{32} = 0$. По (11) $Q_{1i} = F_{1i} = h_i$, т. е. $F_{11} = F_{12} = 0$, $F_{13} = h_3 = H_{13} - (-\overline{j}_1)\cdot\overline{j}_1\left(Mg + \sum_{j=2}^{3}H_{j3} - \sum_{j=1}^{2}H_j\right) = -m_{03}g + Mg - 2m_{03}g - H_1 - H_2$.

Заключение. Предложен новый вид УД ША с ТК, которые можно использовать для решения различных задач динамики и управления ходьбой такими ША. Получены формулы вычисления динамических реакций и оптимальных ОДС в ОТК для заданных программных движений ША. Эти формулы можно использовать для решения первой задачи динамики ША, а также в алгоритмах оптимального управления ходьбой ША, описанных в работе [1].

Литература

1. Охоцимский, Д.Е. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата / Д.Е. Охоцимский, Ю.Ф. Голубев. – М.: Наука, 1984. – 312 с.

2. Телегин, А.И. Алгоритмы решения первой задачи динамики произвольных систем тел / А.И. Телегин, А.В. Абросов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2001. – Вып. 1. – № 6 (06). – С. 3–9.

Телегин Александр Иванович. Доктор физико-математических наук, профессор, декан электротехнического факультета, заведующий кафедрой «Системы управления и математическое моделирование», Южно-Уральский государственный университет, филиал в г. Миассе, mail@miass.susu.ru.

Фёдоров Виктор Борисович. Кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизация механосборочного производства», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), vbf64@mail.ru.

Поступила в редакцию 25 марта 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mechanical Engineering Industry"
2014, vol. 14, no. 2, pp. 5–14

THE OPTIMUM DISTRIBUTION OF DRIVING FORCES AND MOMENTA OF WALKING APPARATUS WITH THREE-PART LIMBS

A.I. Telegin, *South Ural State University, branch in the Miass, Miass, Russian Federation, mail@miass.susu.ru,*
V.B. Fedorov, *South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, vbf64@mail.ru*

General dynamics equations (DE) of walking apparatus (WA) with three-part limbs (TPL) have been suggested. Formulas for calculating dynamic reactions in fulcrums devices have been derived. For (WA) in three-fulcrum condition six generalized driving forces (GDF) of the parts of fulcrum TPL (FTPL) three-part limbs have been expressed through the remaining three GDF generalized driving forces of these fulcrum three-part (FTP) limbs. Formulas for calculating GDF the generalized driving forces of the parts of fulcrum three-part limbs FTP minimizing the quadratic (the rest of GDF) quality criterion have been obtained. An example has been given.

Keywords: walking apparatus, dynamics equation, the first task of dynamics, dynamic reactions, driving forces and force moments, optimization.

References

1. Okhotsimskii D.E., Golubev Yu.F. *Mechanika i Upravlenie Dvizheniem avtomaticheskogo shagaiushego apparata* [Mechanics and Motion Control automatic walking machine]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 312 p.

2. Telegin A.I., Abrosov A.V. Algorithms for solving the first problem of the dynamics of arbitrary systems of bodies. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2001, iss. 1, no. 6 (06), pp. 3–9. (in Russ.)

Received 25 March 2014