УДК 629.114.2

# К РАСЧЕТУ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ МОТОРНО-ТРАНСМИССИОННОЙ УСТАНОВКИ ТРАНСПОРТНЫХ И ТЯГОВЫХ МАШИН

*Б.М. Позин*

# CALCULATION OF THE NATURAL FREQUENCY OF TORSIONAL VIBRATIONS OF ENGINE-TRANSMISSION UNIT OF TRANSPORT AND TOWING VEHICLES

*B.M. Pozin*

**Предлагается метод расчета собственных частот крутильных колебаний моторно-трансмиссионной установки транспортных и тяговых машин без составления и решения частотных уравнений.**
*Ключевые слова: тяговая машина, моторно-трансмиссионная установка, крутильные колебания, собственная частота.*

**Method is proposed for calculating the natural frequencies of torsional vibrations of a motor vehicle transmission setting and traction machines without setting up and solving the frequency equations.**
*Keywords: traction machine, the motor-transmission unit, torsional oscillations, the natural frequency.*

В практике машиностроения крутильные колебания, возникающие в двигателе внутреннего сгорания (ДВС) или моторно-трансмиссионной установке (МТУ) транспортных и тяговых машин, неоднократно становились непреодолимым препятствием при создании разного рода машин. Известен опыт Челябинского тракторного завода, Курганмашзавода и др., когда неверное задание некоторых параметров этих систем на ранней стадии проектирования серьезно задержало, а в ряде случаев сделало невозможным доводку машин.

Существуют методы оптимального совмещения характеристик ДВС и гидротрансформатора (ГДТ), обеспечивающие машине наивысшую эффективность путем введения между ними согласующего редуктора [1], однако в практике отечественного и зарубежного тракторостроения не удалось решить проблему крутильных колебаний в системе ДВС – редуктор – ГДТ даже при постановке довольно мощных гасителей.

Методы расчета крутильных колебаний сложных машинных систем достаточно хорошо разработаны. Однако они довольно трудоемки. Расчет включает в себя два основных этапа: составление уравнений движения колебательной системы и нахождение частот собственных колебаний как результат решения частотного уравнения [2, 3].

Покажем, как упростить нахождение собственных частот, если известна динамическая модель системы, без составления и решения частотных уравнений, сведя задачу к нахождению корней характеристического уравнения некоторой матрицы, численное решение которой дается в пакете Mathcad, встроенными процедурами.

Рассмотрим для примера динамическую модель МТУ (рис. 1).

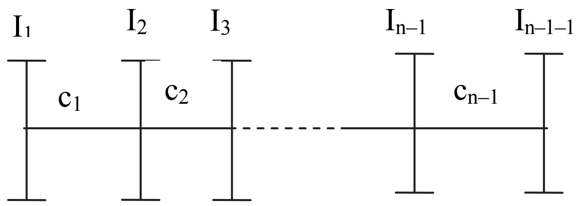


**Рис. 1. Динамическая модель МТУ**

Математическая модель движения этой динамической системы может быть представлена в виде системы $n$ дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{array}{l} I_1\ddot{\varphi}_1 = c_1\left(\varphi_2 - \varphi_1\right); \\ I_2\ddot{\varphi}_2 = -c_1\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) + c_2\left(\varphi_3 - \varphi_2\right); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_{n-1}\ddot{\varphi}_{n-1} = c_{n-1}\left(\varphi_n - \varphi_{n-1}\right) - c_{n-2}\left(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\right); \\ I_n\ddot{\varphi}_n = -c_{n-1}\left(\varphi_n - \varphi_{n-1}\right), \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где $c_i$ – жесткость $i$-го участка трансмиссии; $I_i$ – момент инерции $i$-й массы; $\varphi_i$ – угол поворота $i$-й массы.

Решениями системы (1) являются уравнение равномерного вращения $\varphi_0 = a_0 + \omega t$ и уравнения упругих колебаний:

$$\varphi_i = a_i \sin\left(pt + \alpha\right). \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) получим:

$$\left.\begin{array}{l} c_1\left(a_2 - a_1\right) = -I_1 p^2 a_1; \\ c_2(a_3 - a_2) - c_1(a_2 - a_1) = -I_2 p^2 a_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n-1}\left(a_n - a_{n-1}\right) - c_{n-2}\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) = -I_{n-1} p^2 a_{n-1}; \\ -c_{n-1}\left(a_n - a_{n-1}\right) = -I_n p^2 a_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Элементарными преобразованиями система (3) приводится к виду:

$$\left.\begin{array}{l} (-c_1 + I_1 p^2)a_1 + c_1 a_2 = 0; \\ c_1 a_1 + (-c_1 - c_2 + I_2 p^2)a_2 + c_2 a_3 = 0; \\ c_2 a_2 + (-c_2 - c_3 + I_3 p^2)a_3 + c_3 a_4 = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n-2}a_{n-2} + (-c_{n-2} - c_{n-1} + I_{n-1}p^2)a_{n-1} = 0; \\ c_{n-1}a_{n-1} + (-c_{n-1} + I_n p^2)a_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Система (4) есть система однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд. Условием существования ненулевого решения этой системы является равенство нулю определителя матрицы А (рис. 2).

$$A := \begin{pmatrix} -c_1 + I_1 p^2 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & -c_1 - c_2 + I_2 p^2 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_2 & -c_2 - c_3 + I_3 p^2 & c_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-2} & -c_{n-2} - c_{n-1} + J_{n-1} p^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-1} & -c_{n-1} + I_n p^2 \end{pmatrix}$$

**Рис. 2. Матрица А**

Это обстоятельство и служит основанием для составления частотного уравнения. Действительно, вычисляя определитель матрицы А, получаем алгебраическое уравнение порядка $n$ относительно квадратов частот. Решая это уравнение тем или иным способом, получим $n$ – 1 частот собственных колебаний и одну скорость общего вращения. Можно, однако, предложить другой способ нахождения собственных частот системы без составления и решения частотного уравнения.

Разделим в матрице А каждый $j$-й столбец на $-I_j$.

Матрица А преобразуется к виду (рис. 3).

$$A_1 := \begin{bmatrix} \left(\frac{c_1}{I_1}\right) - p^2 & \left(\frac{-c_1}{I_2}\right) & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \left(\frac{-c_1}{I_1}\right) & \left(\frac{c_1 + c_2}{I_2}\right) - p^2 & \left(\frac{-c_2}{I_3}\right) & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \left[\frac{(-c)_2}{J_2}\right] & \left(\frac{c_2 + c_3}{I_3}\right) - p^2 & \left(\frac{-c_3}{I_4}\right) & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \left(\frac{-c_{n-2}}{I_{n-2}}\right) & \left(\frac{c_{n-2} + c_{n-1}}{I_{n-1}}\right) - p^2 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \left(\frac{c_{n-1}}{I_{n-1}}\right) & \left(\frac{c_{n-1}}{I_n}\right) - p^2 \end{bmatrix}$$

**Рис. 3. Матрица $A_1$**

Ясно, что определители этих матриц равны.

Матрица $A_1$ является характеристической матрицей матрицы $A_2$ (рис. 4) [4].

$$A_2 := \begin{bmatrix} \left(\frac{c_1}{I_1}\right) & \left(\frac{-c_1}{I_2}\right) & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \left(\frac{-c_1}{I_1}\right) & \left(\frac{c_1 + c_2}{I_2}\right) & \left(\frac{-c_2}{I_3}\right) & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \left[\frac{(-c)_2}{J_2}\right] & \left(\frac{c_2 + c_3}{I_3}\right) & \left(\frac{-c_3}{I_4}\right) & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \left(\frac{-c_{n-2}}{I_{n-2}}\right) & \left(\frac{c_{n-2} + c_{n-1}}{I_{n-1}}\right) & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \left(\frac{c_{n-1}}{I_{n-1}}\right) & \left(\frac{c_{n-1}}{I_n}\right) \end{bmatrix}$$

**Рис. 4. Матрица $A_2$**

Характеристические корни $A_2$ имеют, таким образом, в рассматриваемой задаче смысл квадратов собственных частот колебаний.

В пакете Mathcad имеется встроенная программа нахождения характеристических корней матрицы eigenvals, применив которую к матрице $A_2$ получим весь спектр квадратов собственных частот.

Пример. Путь имеется трехмассовая система с характеристиками: $c_1 = 211 \cdot 10^6$; $c_2 = 14{,}8 \cdot 10^6$; $I_1 = 17\,000$; $I_2 = 85\,000$; $I_3 = 27\,000$; $p = \omega = 122{,}166$ (пример заимствован у Я.Г. Пановко [4]).

Составим матрицу $A_2$ и применим к ней встроенную процедуру eigenvals (рис. 5).

Извлекая квадратные корни из членов результирующей матрицы, получим собственные частоты: $p^1$ = 26,303 (26,3) $c^{-1}$; $p^2$ = 122,147 (122,5) $c^{-1}$; частоту общего вращения $p^3$ = 0. В скобках приведены собственные частоты, вычисленные Я.Г. Пановко.

$$\mathrm{eigenvals}\left(A_2\right) := \begin{pmatrix} 1.492\cdot 10^{4} \\ -3.305\cdot 10^{-13} \\ 691.833 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{bmatrix} \dfrac{c_1}{I_1} & \dfrac{-c_1}{I_2} & \\ \dfrac{-c_1}{I_1} & \dfrac{\left(c_1 + c_2\right)}{I_2} & \dfrac{-c_2}{I_3} \\ & \dfrac{-c_2}{I_2} & \dfrac{c_2}{I_3} \end{bmatrix}$$

**Рис. 5. Применение процедуры eigenvals к матрице $A_2$**

***Литература***


*1. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1963. – 559 с.*

*2. Злотник, М.И. К вопросу оптимального совмещения характеристик двигателя и гидротрансформатора / М.И. Злотник // Тракторы и сельхозмашины. – 1967. – № 6. – С. 18–19.*

*3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Физматгиз, 1968. – 431 с.*

*4. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.*


***Поступила в редакцию 27 февраля 2012 г.***


**Позин Борис Михайлович.** Доктор технических наук, профессор кафедры «Автомобили», Южно-Уральский государственный университет. Область научных интересов – колесные, гусеничные и дорожно-строительные машины (теория движения, устойчивость, оптимальное проектирование). Тел.: (351) 772-83-40; e-mail: POBOR1@mail.ru

**Boris M. Pozin.** The doctor of engineering science, professor of “Automobile” department, South Urals state university. The area of scientific interests – wheel, track and road-construction vehicles (the theory of motion, stability, optimum design). Tel.: (351) 772-83-40; e-mail: POBOR1@mail.ru