

УТОЧНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК, РАБОТАЮЩИХ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

П.И. Болтаев

THE CALCULATED DEPENDANCES REFINEMENT OF THE BEARING CAPACITY OF METAL-COMPOSITE ENVELOPES OPERATING IN STABILITY

P.I. Boltayev

На основе разработанной автором методики сопоставления и согласования расчетных и экспериментальных значений несущей способности слоистых оболочек, работающих при сжимающих нагрузках, осуществлена процедура корректировки расчетных значений по имеющимся экспериментальным данным. При этом полученная уточненная расчетная зависимость позволяет снижать статистические характеристики, определяющие разброс расчетных и экспериментальных значений, оцениваемых по коэффициенту K . А это, в свою очередь, дает возможность более обоснованно подходить к назначению коэффициентов безопасности при проектировании металлокомпозитных конструкций.

Ключевые слова: методика, несущая способность, слоистая оболочка, металлокомпозитная конструкция, разброс расчетных и экспериментальных значений, корректирующая функция.

Based on the author's methodology the refinement of calculated values in accordance with available experimental data was performed. The above methodology correlates and aligns experimental and calculated values of the bearing capacity of multilayer envelopes operating under contraction conditions. In this respect the obtained calculated dependance enables to reduce statistical characteristics defining calculated and experimental variations estimate by the K -coefficient. In such a way it allows to make more solid approach to the safety coefficient definition at the metal-composite structures design.

Keywords: methodology, bearing capacity, layered envelope, metal-composite structure, spread in calculated and experimental values, correction function.

В статье автора [1] охарактеризована методика сопоставления и согласования расчетных и экспериментальных значений несущей способности слоистых оболочек, работающих на устойчивость. Напомним вкратце сущность разработанной методики.

Основываясь на проведенных ранее исследованиях [2], заметим, что величина критической нагрузки будет зависеть от комплекса структурных и геометрических параметров: числа слоев в пакете N , толщины слоя h , угла укладки слоя α , соотношения слоев φ , уложенных под различными углами, последовательности укладки слоев в пакете, коэффициента армирования слоя ψ , безразмерных параметров $\frac{L}{R}$ и $\frac{H}{R}$ (L – длина, R – радиус, H – толщина пакета оболочки), а также от упругих характеристик исходных компонентов, составляющих однонаправленный слой композиционного материала. В связи с этим, очевидно, в зависимости от комплекса этих параметров будет изменяться также и функция согласия экспериментальных и расчетных данных.

Следовательно, каждому комплексу геометрических и структурных параметров оболочки соответствует определенное значение критической нагрузки.

Это говорит о том, что критическая нагрузка оболочки, спроектированная из однонаправленных слоев в пакете, может описываться функцией от целого ряда параметров геометрического и структурного характера:

$$q = F\left(\frac{L}{R}; \frac{H}{R}; N; \varphi; \psi; \alpha; \Pi; E_a; E_c; \nu_a; \nu_c; G_a; G_c\right), \quad (1)$$

где Π – вариант порядка расположения слоев в пакете.

В многомерном пространстве геометрических, структурных и упругих параметров в логарифмических координатах критическую нагрузку можно представить в виде гиперплоскости.

$$\lg q = a_1 \cdot \lg \frac{L}{R} + a_2 \cdot \lg \frac{H}{R} + \dots + a_k \lg G_c + C_1. \quad (2)$$

Уравнение (2) удобно представить в виде:

$$Z' = \sum_{j=1}^k a'_j \cdot X_j + C'. \quad (3)$$

Поскольку теоретические значения критической нагрузки представляют собой гиперплоскость, то, следовательно, и экспериментальные значения должны с некоторым отклонением также аппроксимироваться уравнением гиперплоскости. Поэтому, используя методы аналитической геометрии, мы можем найти корректирующую функцию для расчетных значений.

Строго говоря, использование уравнения (2) наиболее эффективно в том случае, когда есть уверенность, что критическая нагрузка имеет экспоненциальную зависимость от входящих параметров или близкую к ней. В случае если это не имеет места, то результаты согласования могут быть менее эффективны. Как показано в классической литературе [3], поведение критической нагрузки в зависимости от геометрических параметров $\frac{L}{R}$ и $\frac{H}{R}$ имеет экспоненциальный характер. Следовательно, в нашем случае данный подход является приемлемым и обоснованным.

Допустим, экспериментальные значения критических нагрузок аппроксимируются следующим уравнением гиперплоскости:

$$Z'' = \sum_{j=1}^k a''_j \cdot X_j + C''. \quad (4)$$

Тогда, вычитая из (4) уравнение (3), мы получим значение корректирующей функции:

$$Z'' - Z' = \sum_{j=1}^k a_j \cdot X_j + C. \quad (5)$$

Действительно, обозначив правую часть уравнения (5) $\lg K$, будем иметь:

$$Z'' - Z' = \lg K. \quad (6)$$

Подставив в левую часть уравнения (6) истинные значения, будем иметь:

$$\lg q_3 - \lg q_p = \lg K = \lg \left(\frac{q_3}{q_p} \right). \quad (7)$$

И окончательно будем иметь:

$$q_3 = K q_p. \quad (8)$$

Отсюда, зная K , мы можем корректировать расчетные значения критических нагрузок, согласовывая их с экспериментальными данными.

Перепишем уравнение (5):

$$Z = \sum_{j=1}^k a_j \cdot X_j + C. \quad (9)$$

Найдем методом наименьших квадратов уравнение гиперплоскости корректирующей функции. Используя методы, предложенные в работе [4], запишем систему, определяющую коэффициенты a_j , C по экспериментальным данным:

Расчет и конструирование

$$a_j = \frac{L_j}{L}; \quad C = \frac{L_c}{L}; \quad (10)$$

$$\text{где } L = \begin{vmatrix} l_{11}l_{12}\dots l_{1k} \\ l_{21}l_{22}\dots l_{2k} \\ \dots \\ l_{k1}l_{k2}\dots l_{kk} \end{vmatrix}; \quad L_j = \begin{vmatrix} l_{11}l_{12}\dots l_{10}\dots l_{1k} \\ l_{21}l_{22}\dots l_{20}\dots l_{2k} \\ \dots \\ l_{k1}l_{k2}\dots l_{k0}\dots l_{kk} \end{vmatrix}; \quad L_c = \begin{vmatrix} l_{11}l_{12}\dots l_{1,k-1}\dots l_{10} \\ l_{21}l_{22}\dots l_{2,k-1}\dots l_{20} \\ \dots \\ l_{k1}l_{k2}\dots l_{k,k-1}\dots l_{k0} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Элементы, входящие в определители L , L_j , L_c , определяются следующим образом:

$$l_{rs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ri} \cdot X_{si};$$

$$l_{pk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{pi}; \quad 1 \leq r \leq s \leq p \leq k; \quad (12)$$

$$l_{po} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \cdot X_{pi}.$$

Определители L_j получаются из определителя L заменой j -го столбца (т. е. элементов l_{1s} , l_{2s} ... l_{ks}) столбцом из элементов l_{10} , l_{20} ... l_{k0} . А определитель L_c заменой последнего столбца столбцом из элементов l_{10} , l_{20} ... l_{k0} .

Скорректированная зависимость (8), отражающая влияние экспериментальных данных, позволяет определить разброс уточненной расчетной зависимости, который удобно определять через коэффициент K . Следует заметить, что разброс по коэффициенту K должен быть наименьшим, поскольку корректирующую функцию мы находим по методу наименьших квадратов.

Используя разработанную методику, проведем согласование теоретических расчетных значений имеющимся экспериментальным данным, взятым из работы [5] и представленным в таблице.

Кольцевая укладка $\psi \approx 0,3$.

Параметры оболочки

№ п/п	h , мм	N	L , мм	ψ	$\frac{R}{H}$	$\frac{L}{R}$	$q_{\text{в}}$, МПа	$q_{\text{р}}$, МПа	K	q^* , МПа	K^*	$K_1 = \frac{q_{\text{э}}}{q^*_{\text{р}}}$	$(K_1 - \bar{K}_1)^2$
1	0,184	9	178	0,328	36,76	2,92	5,4	5,51	0,9800	5,454	0,9898	0,9901	0,001807
2	0,173	13	177	0,345	27,03	2,91	10,2	11,88	0,8586	9,730	0,8190	1,0483	0,000246
3	0,224	12	180	0,271	22,68	2,96	13,1	15,45	0,8479	12,788	0,8277	1,0244	0,000067
4	0,227	12	180	0,266	22,32	2,96	14,5	15,90	0,9119	13,046	0,8205	1,1114	0,006216
5	0,210	15	181	0,287	19,34	2,97	16,1	23,20	0,6939	17,978	0,7749	0,8955	0,018788
6	0,183	15	182	0,330	22,22	2,99	15,1	17,40	0,8678	15,168	0,8717	0,9955	0,001376
7	0,200	14	180	0,296	21,74	2,96	17,8	17,70	1,0056	14,316	0,8088	1,2434	0,044416
8	0,196	14	180	0,296	22,17	2,96	13,0	16,70	0,7784	13,652	0,8175	0,9522	0,006459

Для наглядности графического изображения корректирующую функцию представим зависимой только от геометрических безразмерных параметров $\frac{L}{R}$ и $\frac{H}{R}$. В данном случае берем обратную величину $\frac{R}{H} = 1 / \frac{H}{R}$ также из условия удобства изображения и наглядности. Поскольку

перейти от одной величины к другой не представляет труда, то $\lg \frac{R}{H} = -\lg \frac{H}{R}$.

Представим корректирующую функцию в следующем виде:

$$\lg K = a \cdot \lg \frac{R}{H} + b \cdot \lg \frac{L}{R} + C. \tag{13}$$

Применяя процедуру метода наименьших квадратов и используя данные таблицы из 8 оболочек кольцевой укладки пакета при коэффициенте армирования $\psi = 0,3$, найдем уравнение плоскости, которое будет отражать корректирующую функцию. Система уравнений (10), определяющая неизвестные коэффициенты a, b, C , будет иметь вид:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}; \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}; \quad C = \frac{\Delta_c}{\Delta}, \tag{14}$$

$$\text{где } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\sum X_i^2}{n} & \frac{\sum Y_i X_i}{n} & \frac{\sum X_i}{n} \\ \frac{\sum X_i Y_i}{n} & \frac{\sum Y_i^2}{n} & \frac{\sum Y_i}{n} \\ \frac{\sum X_i}{n} & \frac{\sum Y_i}{n} & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} \frac{\sum Z_i X_i}{n} & \frac{\sum Y_i X_i}{n} & \frac{\sum X_i}{n} \\ \frac{\sum Z_i Y_i}{n} & \frac{\sum Y_i^2}{n} & \frac{\sum Y_i}{n} \\ \frac{\sum Z_i}{n} & \frac{\sum Y_i}{n} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \frac{\sum X_i^2}{n} & \frac{\sum Z_i X_i}{n} & \frac{\sum X_i}{n} \\ \frac{\sum X_i Y_i}{n} & \frac{\sum Z_i Y_i}{n} & \frac{\sum Y_i}{n} \\ \frac{\sum X_i}{n} & \frac{\sum Z_i}{n} & 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_c = \begin{vmatrix} \frac{\sum X_i^2}{n} & \frac{\sum Y_i X_i}{n} & \frac{\sum Z_i X_i}{n} \\ \frac{\sum X_i Y_i}{n} & \frac{\sum Y_i^2}{n} & \frac{\sum Z_i Y_i}{n} \\ \frac{\sum X_i}{n} & \frac{\sum Y_i}{n} & \frac{\sum Z_i}{n} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

В определителях (15) приняты следующие обозначения:

$$X_i = \lg \frac{R_i}{H_i}; \quad Z_i = \lg K_i; \quad Y_i = \lg \frac{L_i}{R_i}. \tag{16}$$

Используя (14), (15) и (16), уравнение (13) будет иметь вид:

$$\lg K^* = 0,54648 \cdot \lg \frac{R}{H} + 6,24507 \cdot \lg \frac{L}{R} - 3,7662. \tag{17}$$

Зависимость (17) удобнее представить в виде:

$$\lg K^x = 0,54648 \cdot \lg \frac{R}{H} + 6,24507 \cdot \lg \frac{L}{R} - \lg 5837. \tag{18}$$

Отсюда:

$$K^* = \frac{1}{5837} \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^{0,54648} \cdot \left(\frac{L}{R}\right)^{6,24507}. \tag{19}$$

С учетом (19) и теоретической расчетной зависимости, приведенной в работе [6], уравнение уточненной расчетной зависимости (8) будет иметь вид:

$$q_p = 1,713 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^{0,54648} \cdot \left(\frac{L}{R}\right)^{6,24507} \cdot \frac{1}{R\lambda_n^2} \cdot \left(a_{33} - \frac{a_{13}^2 a_{22} + a_{23}^2 a_{11} - 2a_{12} a_{23} a_{13}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \right). \tag{20}$$

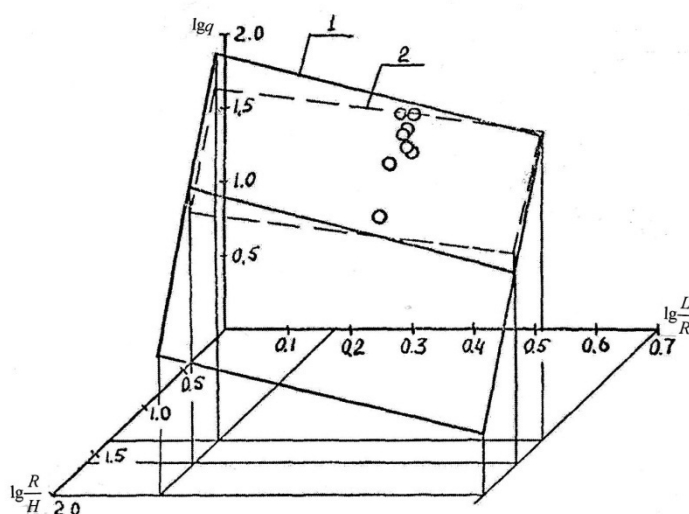
На рисунке показана процедура корректировки расчетных значений, построенная по данным таблицы (точками показаны экспериментальные значения). По уточненной расчетной зависимости (20) рассчитан коэффициент K_1 , значения которого показаны в двух последних колонках таблицы. Среднее его значение равно $\overline{K_1} = 1,03261$, а коэффициент вариации $v_{k_1} = 0,103$.

Расчет и конструирование

Таким образом, разброс экспериментальных и расчетных значений по коэффициенту K составляет порядка 10,3 %.

Подобная величина разброса объясняется малым числом испытаний и сравнительно большим диапазоном значений коэффициента армирования ψ .

Корректирующая согласующая функция (19), строго говоря, соответствует лишь тем экспериментальным данным, которые представлены в таблице. К сожалению, экспериментальные точки по параметру $\frac{L}{R}$ мало отличаются друг от друга, поэтому корректирующая функция (19), а следовательно, и уточненная расчетная зависимость (20), показанная на рисунке цифрой 2 в направлении $\frac{L}{R}$, отражает согласие, очевидно, только в этом малом диапазоне изменения этого параметра.



Сопоставление расчетных и экспериментальных значений критических нагрузок слоистых боралюминиевых оболочек при $\psi = 0,3$ и $\varphi = 0$: 1 – расчетная плоскость; 2 – уточненная по экспериментальным данным плоскость

Для более надежного экстраполирования необходимо получение экспериментальных значений в более широком диапазоне изменения параметра $\frac{L}{R}$.

Таким образом, разработанная методика согласования расчетных и экспериментальных значений, основанная на представлении зависимости в виде гиперплоскости логарифмических величин входящих параметров, позволяет определять уточненную расчетную зависимость благодаря введению корректирующей функции, найденной методом наименьших квадратов.

Использование уточненной расчетной зависимости позволяет снижать статистические характеристики, определяющие разброс расчетных и экспериментальных значений по коэффициенту K , и тем самым более обоснованно подходить к назначению коэффициентов безопасности конструкций.

Литература

1. Болтаев, П.И. Методика согласования расчетных и экспериментальных значений несущей способности слоистых оболочек из композиционных материалов / П.И. Болтаев // *Технология. Сер. «Конструкции из композиционных материалов»*. – 1987. – Вып. 1. – С. 47–52.
2. Болтаев, П.И. Исследование схем проектирования тонкостенных цилиндрических оболочек из боралюминия, работающих на устойчивость при внешнем давлении / П.И. Болтаев, М.Р. Романов // *Техника, экономика, информация. Сер. «Техника. Конструкции из композиционных материалов»*. – 1981. – Вып. 2. – С. 41–48.
3. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

4. Смирнов, Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

5. Ершов, Н.П. Сопоставление несущей способности оболочек из алюминивно-магниевого сплава, боралюминия и стеклопластика / Н.П. Ершов, С.Т. Милейко // *Материалы межотраслевых научно-технических конференций, совещаний, семинаров и выставок.* – М.: Всерос. ин-т межотраслевой информации, 1976. – Вып. 3 (6). – С. 100–106.

6. Болтаев, П.И. Основные уравнения анизотропной цилиндрической оболочки / П.И. Болтаев // *Конструкции из композиционных материалов.* – 2008. – № 1. – С. 3–11.

Поступила в редакцию 22 марта 2012 г.

Болтаев Петр Иванович. Доктор технических наук, помощник Генерального конструктора, Государственный ракетный центр имени академика В.П. Макеева. Область научных интересов – проектирование конструкций из композиционных материалов, устойчивость металлокомпозитных конструкций летательных аппаратов. Тел.: (351) 328-61-29; e-mail: src@makeyev.ru

Petr I. Boltayev. Doctor of engineering science, General designer assistant, “Academician V.P. Makeyev state rocket centre”. The area of scientific interests – composite material structural design, stability of metal-composite structures of airborne devices. Tel.: (351) 328-61-29; e-mail: src@makeyev.ru