

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН В ОБЛАСТИ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

В.В. Кириллов

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

В различных областях науки и техники необходимо рассчитывать процессы переноса тепла в областях различной формы, границы которых изменяются с течением времени. К ним относятся задачи типа Стефана о промерзании грунта и кристаллизации слитка, для которых при определённых допущениях удаётся получить аналитическое решение. Далее появились работы по расчёту температурного поля в шашках горящего топлива, термическому разложению твёрдых составов, плавлению, абляции теплозащитных покрытий. Математические модели таких процессов включают в себя уравнение теплопроводности, начальные и граничные условия, а также условия перемещения границ. Вместе с тем существуют задачи, связанные с расчётом процессов тепло- и массообмена при течении жидкости и газа в областях, границы которых перемещаются с течением времени. Математические модели таких задач включают в себя системы уравнений в частных производных, решение которых возможно только численными методами. В данной работе предлагается эффективный численный метод решения таких задач на основе метода конечных разностей, который позволяет отслеживать положение границ области при существенном их перемещении на адаптивной разностной сетке.

Ключевые слова: теплообмен, математическая модель, численный метод, перемещение границ.

В работе [1] содержится обзор задач о переносе тепла теплопроводностью в области с движущейся границей. Математические модели этих процессов включают в себя уравнение теплопроводности в декартовой или цилиндрической системах координат, условия перемещения границ области, начальное и граничные условия.

В дальнейшем круг расчёта тепло- и массообмена в областях с перемещающимися границами расширился и теплопроводность стала их частью. Можно выделить следующие задачи.

1. Расчёт переходных процессов в обогреваемых каналах с кипящим теплоносителем в ядерных реакторах и паровых котлах [2–19].
2. Процессы внутренней баллистики в камере сгорания с зарядами торцевого горения [20].
3. Внутренняя баллистика низкотемпературных газогенераторов с твёрдым охладителем [21–24].

Математические модели данных задач достаточно сложны, что не позволяет получить аналитические решения в практически важных случаях. Основным методом решения таких задач становится прямое численное интегрирование уравнений математических моделей.

В обогреваемом канале можно выделить три характерных участка, отличающихся состоянием теплоносителя (рис. 1).

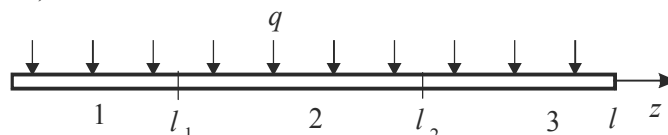


Рис. 1. Схема обогреваемого канала: 1 – участок без кипения, $0 < z < l_1$; 2 – участок поверхностного кипения, $l_1 \leq z < l_2$; 3 – участок объёмного кипения, $l_2 \leq z \leq l$

В переходных процессах, вызванных изменением граничных условий и величины теплового потока q , положение границ участков меняется.

В камере сгорания с зарядом твёрдого топлива, горящего с торца, с течением времени увеличивается пространство между торцом заряда и критическим сечением (рис. 2).

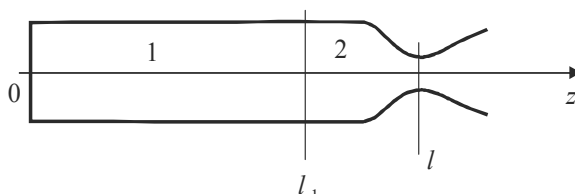


Рис. 2. Схема камеры сгорания: 1 – заряд топлива $0 < z \leq l_1$;
2 – канал камеры сгорания, $l_1 \leq z \leq l$

В камере охлаждения низкотемпературного газогенератора можно выделить область с гранулами охладителя и область, свободную от гранул (рис. 3). По мере разложения охладителя под действием газового потока гранулы перемещаются в направлении течения.

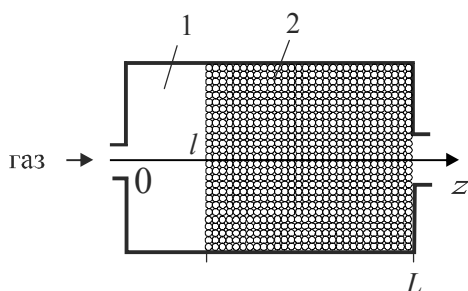


Рис. 3. Схема камеры охлаждения:
1 – свободная от гранул область, $0 < z \leq l$;
2 – область с гранулами, $l \leq z \leq L$

Во многих практически важных случаях для расчёта нестационарных режимов работы применяются одномерные математические модели, которые включают в себя дифференциальные уравнения в частных производных неразрывности, импульса и энергии для рабочего тела. Дополнительно в математические модели могут включаться уравнения теплопроводности для стенки канала, заряда твёрдого топлива, гранулы охладителя, уравнения неразрывности компонентов, из которых состоит рабочее тело, например, уравнение генерации пара в обогреваемом канале, уравнения неразрывности компонентов продуктов сгорания топлива и т. п.

Для решения системы уравнений широко применяется метод конечных разностей с использованием фиксированной разностной сетки [25]. Однако в этом случае положение границ между участками можно определить с точностью до шага сетки. В целом ряде случаев для обеспечения нужной точности требуется применять сетки с мелким шагом и интерполяцию.

В работах [1, 26] рассмотрено применение координат, связанных с границей области интегрирования. Применение такого преобразования позволяет точно отслеживать положение границ области.

Запишем систему уравнений неразрывности, импульса и энергии в векторной форме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = F, \tag{1}$$

где в случае течения жидкости или газа

$$\Phi = \begin{bmatrix} \rho S \\ G \\ \rho e S \end{bmatrix}; \quad \Psi = \begin{bmatrix} G \\ Gw + pS \\ Ge + pwS \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} J_m \\ -\xi \frac{\rho w^2 \Pi}{8} + J_{imp} - g\rho \sin \gamma \\ \Pi_w q_w + J_e \end{bmatrix}, \tag{2}$$

а в случае течения кипящего теплоносителя

$$\Phi = \begin{bmatrix} \rho S \\ G \\ \chi S \end{bmatrix}; \quad \Psi = \begin{bmatrix} G \\ \frac{G^2}{S\rho_2} + pS \\ Gh \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ -\xi \frac{G^2 \Pi}{8S^2 \rho} - g\rho \sin \gamma \\ \Pi_w q_w \end{bmatrix};$$

$$\chi = (1 - \varphi)\rho' h' + \varphi \rho'' h'' - p; \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{(1-x)^2}{(1-\varphi)\rho'} + \frac{x^2}{\varphi \rho''}. \tag{3}$$

Уравнение неразрывности i -го компонента рабочего тела можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho S g_i}{\partial \tau} + \frac{\partial G g_i}{\partial z} = J_i. \tag{4}$$

Расчет и конструирование

В области, занятой гранулами охладителя $S = S_0 \varepsilon$, где S_0 – площадь сечения пустой камеры охлаждения, а ε – пористость.

В (1)...(4) G – расход; p – давление; w – скорость; S – площадь сечения; e – внутренняя энергия; h – энтальпия; ρ – плотность; τ – время; z – координата; Π – периметр сечения; g – ускорение свободного падения; γ – угол между осью канала и горизонталью; q – плотность теплового потока; ξ – коэффициент гидравлического сопротивления; φ – истинное объемное паросодержание; x – массовое паросодержание; J_m – поток массы; J_{imp} – поток импульса; J_e – поток энергии; J_i – источник массы i -го компонента; g_i – массовая доля данного компонента; индексы ' и ' обозначают параметры жидкости и пара на линии насыщения.

В области $l_1(\tau) \leq z \leq l_2(\tau)$ введём координату y следующим образом [26]

$$y = \frac{z - l_1(\tau)}{l_2(\tau) - l_1(\tau)}. \quad (5)$$

Система уравнений (1) преобразуется к дивергентному виду

$$\frac{\partial \Delta l \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Psi - \left[(1-y) \frac{dl_1}{d\tau} + y \frac{dl_2}{d\tau} \right] \Phi \right\} = \Delta l F, \quad \Delta l = l_2 - l_1. \quad (6)$$

Уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{\partial \Delta l \rho S g_i}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ G g_i - \left[(1-y) \frac{dl_1}{d\tau} + y \frac{dl_2}{d\tau} \right] \rho S g_i \right\} = \Delta l J_i. \quad (7)$$

В области $0 \leq y \leq 1$ строится равномерная разностная сетка с шагом $1/(N-1)$, где N – число узлов сетки. При изменении границ области $l_1(\tau)$, $l_2(\tau)$ изменяются z -координаты узлов сетки, а y -координаты остаются постоянными.

Уравнение (6) аппроксимируется неявной разностной схемой

$$\frac{\Phi_n^{m+1} \Delta l^{m+1} - \Phi_n^m \Delta l^m}{\Delta \tau} + \frac{\Theta_n^{m+1} - \Theta_{n-1}^{m+1}}{\Delta y} = \Delta l^{m+1} F_n^{m+1}, \quad (8)$$

$$\Theta = \Psi - \left[(1-y) \frac{dl_1}{d\tau} + y \frac{dl_2}{d\tau} \right] \Phi. \quad (9)$$

Векторы Φ, Ψ, F нелинейны относительно вектора неизвестных $Y = |G, T, p|^t$ или $Y = |G, h, p|^t$. Разложим векторы $\Phi_n^{m+1}, \Psi_n^{m+1}, F_n^{m+1}$ в ряд Тейлора с сохранением первого члена ряда. Получим двухточечное разностное уравнение

$$A_n Y_n^{m+1} - B_{n-1} Y_{n-1}^{m+1} = C_n, \quad (10)$$

где

$$A_n = \Delta l^{m+1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)_n^{\overline{m+1}} \Delta y + \Delta \tau \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_n^{\overline{m+1}} - \Delta \tau \Delta y \Delta l^{m+1} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)_n^{\overline{m+1}}; \quad B_{n-1} = \Delta \tau \Delta y \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)_{n-1}^{\overline{m+1}};$$

$$C_n = \Phi_n^m \Delta l^m \Delta y - \Phi_n^{\overline{m+1}} \Delta l^{\overline{m+1}} \Delta y - \Delta \tau \left(\Theta_n^{\overline{m+1}} - \Theta_{n-1}^{\overline{m+1}} \right) + \Delta \tau \Delta y \Delta l^{m+1} F_n^{\overline{m+1}} + A_n Y_n^{\overline{m+1}} - B_{n-1} Y_{n-1}^{\overline{m+1}}. \quad (11)$$

В (11) индекс $\overline{m+1}$ обозначает значение параметра на предыдущей итерации ($m+1$)-го слоя по времени. В (9) A_n, B_{n-1} – квадратные матрицы размерности 3×3 , C_n – векторы размерности 3.

Граничные условия для задач 1...3 записываются следующим образом.

Задача 1:

$$p(0, \tau) = p_1(\tau) - \Delta p_1; \quad h(0, \tau) = h_1(\tau); \quad p(l, \tau) = p_l(\tau) + \Delta p_l. \quad (12)$$

Задача 2:

$$G(0, \tau) = u_{\tau} \rho_{\tau} F; \quad T(0, \tau) = T_{\text{top}}; \quad G(l, \tau) = G_{\text{кр}}. \quad (13)$$

Задача 3:

$$\frac{k}{k-1} R_{\text{кк}} T_{\text{кк}}(\tau) = \frac{k}{k-1} \frac{p(\tau, 0)}{\rho(\tau)} + \frac{G^2(\tau, 0)}{2S^2 \rho};$$

$$p_{\text{кк}}(\tau) = p(\tau, 0) + \frac{G^2}{\rho(\tau, 0) S^2}(\tau, 0);$$

$$G(\tau, l) = \mu S_{\text{вых}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \rho p \left[\left(\frac{p_{\text{н}}}{p} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_{\text{н}}}{p} \right)^{(k+1)/k} \right]}. \quad (14)$$

В (11)...(14) Δp – местные потери давления; R – газовая постоянная; k – отношение теплоёмкостей; μ – коэффициент расхода; $u_{\text{т}}$ – скорость горения; F – площадь горения; $S_{\text{вых}}$ – площадь выходного патрубка; индексы кк – камера сгорания; т – топливо; н – наружная среда.

Таким образом, граничные условия для задач 1–3 можно записать в обобщённой форме. При $z = 0$

$$f_1(p, t, w)_{z=0} = 0; \quad f_2(p, t, w)_{z=0} = 0. \quad (15)$$

При $z = l$

$$f_3(p, t, w)_{z=l} = 0. \quad (16)$$

Положение границы начала участка поверхностного кипения определяется из условия $t_w = t_s + \Delta t$, где t_w и t_s – температура стенки и температура насыщения соответственно, а начало участка объёмного кипения определяется из условия $h = h'$. Температура стенки определяется из решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \Delta t}{\partial \tau} - \left\{ \left[(1-y) \frac{dl_1}{d\tau} + y \frac{dl_2}{d\tau} \right] t \right\} = \frac{a_w}{\Delta l} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + a_w \Delta l \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{a_w \Delta l}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{q_v \Delta l}{\rho_w c_w} \quad (17)$$

с граничными условиями третьего рода на боковых поверхностях трубы и адиабатными условиями на торцах трубы. В (17) q_v – плотность внутренних источников тепловыделения, индекс w означает параметры стенки.

Положение поверхности горения заряда топлива в задаче 2 определяется из уравнения

$$\frac{dl}{d\tau} = -u_{\text{т}} \quad (18)$$

с начальным условием $l(0) = l_0$.

Положение границы области с гранулами определяется из следующих соображений. При обтекании потоком газа гранул охладителя они уменьшаются в размерах и смещаются в сторону движения газа таким образом, что пористость слоя остаётся постоянной и равной начальной.

В разностной аппроксимации граничные условия (15) запишем в виде

$$A_1 Y_1^{m+1} = C_1, \quad (19)$$

где A_1 – прямоугольная матрица размерности 2×3 , а C_1 – вектор размерности 2.

$$A_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial G} & \frac{\partial f_1}{\partial p} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial G} & \frac{\partial f_2}{\partial p} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix}_1^{\overline{m+1}}; \quad C_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial G} G + \frac{\partial f_1}{\partial p} p + \frac{\partial f_1}{\partial t} t \\ \frac{\partial f_2}{\partial G} G + \frac{\partial f_2}{\partial p} p + \frac{\partial f_2}{\partial t} t \end{vmatrix}_1^{\overline{m+1}} - \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix}_1^{\overline{m+1}}.$$

Граничные условия (16) в разностной форме запишем в виде

$$B_N Y_N^{m+1} = C_N, \quad (20)$$

где B_N – матрица 1×3 , C_N – скаляр.

$$B_N = \left| \frac{\partial f_N}{\partial G} \quad \frac{\partial f_N}{\partial p} \quad \frac{\partial f_N}{\partial t} \right|_N^{\overline{m+1}}; \quad C_N = \left| \frac{\partial f_N}{\partial G} G + \frac{\partial f_N}{\partial p} p + \frac{\partial f_N}{\partial t} t \right|_N^{\overline{m+1}} - f_N^{\overline{m+1}}.$$

Расчет и конструирование

Для решения краевой задачи (10), (19), (20) применяется метод ортогональной прогонки [27]. Уравнение теплопроводности (17) решается методом продольно-поперечной прогонки [27].

Уравнение (7) аппроксимируется неявной разностной схемой

$$\frac{(\rho S g)_n^{m+1} \Delta l^{m+1} - (\rho S g)_n^m \Delta l^m}{\Delta \tau} + \frac{(G - \chi \rho S)_n^{m+1} g_n^{m+1} - (G - \chi \rho S)_{n-1}^{m+1} g_{n-1}^{m+1}}{h} =$$

$$= \Delta l^{m+1} J_n^{m+1}, \quad \chi = (1 - y) \frac{dl_1}{d\tau} + y \frac{dl_2}{d\tau}, \quad (21)$$

откуда определяется массовая доля i -го компонента

$$g_n^{m+1} = \frac{b_{n-1} g_{n-1}^{m+1} + c_n}{a_n}. \quad (22)$$

$$a_n = (\rho S)_n^{m+1} \Delta l^{m+1} h + \Delta \tau (G - \chi \rho S)_n^{m+1}; \quad b_{n-1} = \Delta \tau (G - \chi \rho S)_{n-1}^{m+1};$$

$$c_n = (\rho S g)_n^m h \Delta l^m - \mathcal{Q} (G - \chi \rho S)_n^m g_n^m + \Delta \tau h \Delta l^{m+1} J_n^{m+1}. \quad (23)$$

На рис. 4 представлены результаты расчёта переходного процесса в парогенерирующем канале при скачкообразном увеличении теплового потока на 21 % от стационарного состояния, а на рис. 5 представлены результаты расчёта переходного процесса при скачкообразном уменьшении энтальпии на входе в канал на 26 % от стационарного состояния.

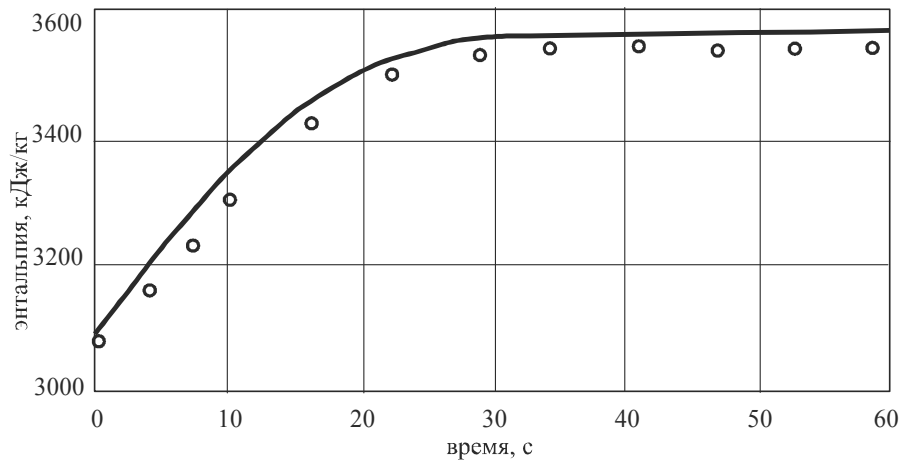


Рис. 4. Изменение энтальпии на выходе из канала при увеличении обогрева

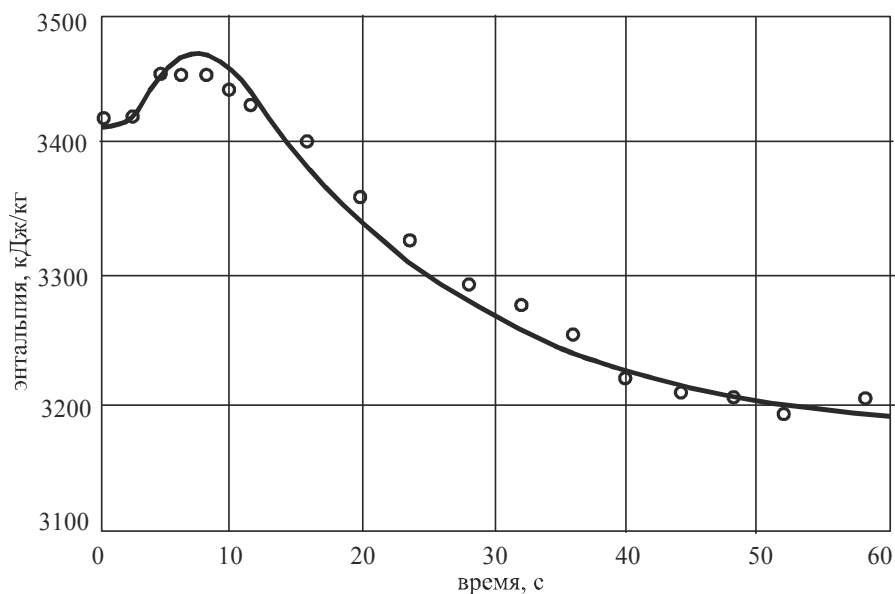


Рис. 5. Изменение энтальпии на выходе из канала при уменьшении энтальпии теплоносителя на входе

На рис. 6, 7 представлены результаты расчёта низкотемпературного газогенератора с твёрдым охладителем.

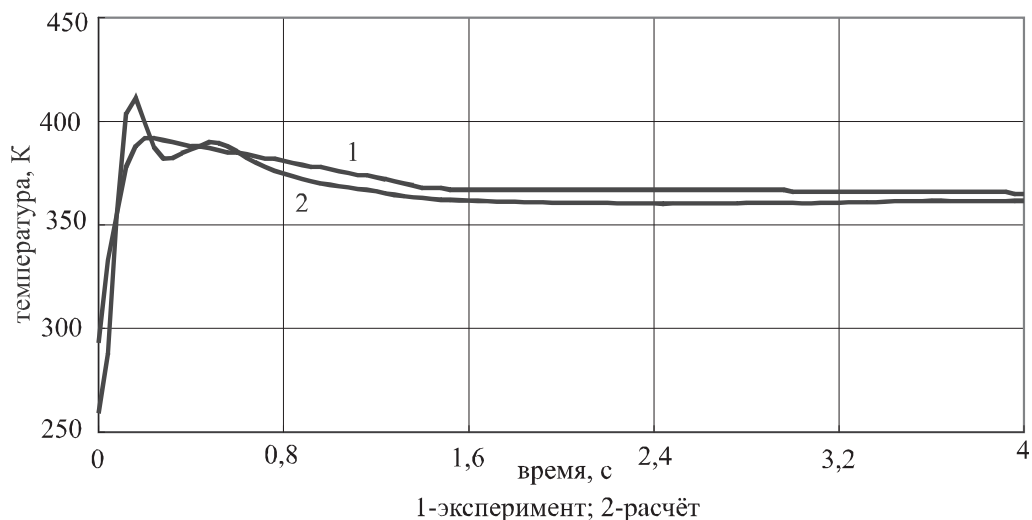


Рис. 6. Изменение температуры на выходе из газогенератора

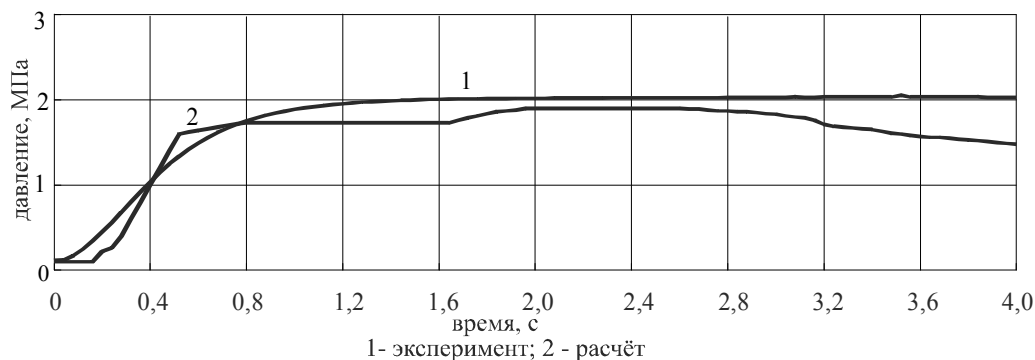


Рис. 7. Изменение давления на выходе из газогенератора

Выводы

1. Предложенный метод расчёта нестационарных режимов тепло- и массообмена позволяет точно определять положение границ расчётных областей.
2. Метод обладает высокой вычислительной эффективностью. Применение неявных разностных схем позволяет существенно сократить затраты машинного времени.

Литература

1. Коздоба, Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности / Л.А. Коздоба. — М.: Наука, 1975. — 227 с.
2. Морозов, И.И. Устойчивость кипящих аппаратов / И.И. Морозов, В.А. Герлига. — М.: Атомиздат, 1969. — 280 с.
3. Таиров, Э.А. О движении точки закипания в парогенерирующем канале / Э.А. Таиров, Б.П. Корольков // Теплоэнергетика. — 1978. — № 8. — С. 35–37.
4. Леончук, М.П. Расчёт переходных режимов парогенератора на ЦВМ / М.П. Леончук // Атомная энергия. — 1968. — Т. 24. — Вып. 6. — С. 564–572.
5. Azpitarte, O.C. Numerical evaluation of two-fluid model solutions for turbulent fully developed bubbly two phase flows / O.C. Azpitarte, G.C. Buscaglia // Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004. — P. 87–94.
6. Garcia-Cascales, J.R. A conservative scheme for the study of multi-dimensional two-phase flow / J.R. Garcia-Cascales, H. Paillre // Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004. — P. 313–320.

7. Wang, L. Numerical simulation of two-phase flows using a volume-of-fluid model with various interface reconstruction schemes / L. Wang, B. Sunden // *Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004.* – P. 1411–1418.
8. Wajs, K. Modelling of instability of water and steam water flow in evaporator / K. Wajs, P. Szulc // *Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004.* – P. 1507–1512.
9. Graf, U. Simulation of two-phase flows in vertical tubes with CFD code Flubox / U. Graf, P. Pagadimitrion // *Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004.* – P. 1513–1517.
10. Helmy, A. Numerical Modelling of Two-Phase Flow in an Effervescent Atomizer Using Volume of Fluid Method / A. Helmy, S. Wilson, A. Siam, A. Balabel // *International Journal of Modern Physics and Applications.* – 2015. – Vol. 1, № 4. – P. 186–192.
11. Garma, R. Numerical Investigation of Nucleate Boiling Flow in Water Based Bubbles Bumps / R. Garma, M. Bouronis, A. Bellagi // *International Journal of Fluid Mechanics & Thermal Sciences.* – 2015. – Vol. 1, № 2. – P. 36–41.
12. Liang, S.M. Numerical modeling of two-phase refrigerant flow through adiabatic capillary tubes / S.M. Liang, T.M. Wong // *Applied Thermal Engineering.* – 2001. – № 21. – P. 1035–1038.
13. Yang, Z. Numerical and experimental investigation of the phase flow during boiling in a coiled tube / Z. Yang, X.F. Peng, P. Ye // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 2008. – № 51. – P. 1003–1016.
14. Simulation of refrigerant flow boiling in serpentine tubes / H.L. Wu, X.F. Peng, P. Ye, Y. Gong // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 2007. – № 50. – P. 1186–1195.
15. Welch, S.W.J. A volume of fluid based method for fluid flows with phase change / S.W.J. Welch, J. Wilson // *J. Comput. Phys.* – 2000. – № 160. – P. 662–682.
16. Esmaeli, A. Computations of film boiling. Part 1. Numerical method / A. Esmaeli, G. Tryggvason // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 2004. – № 57. – P. 5451–5461.
17. Kattan, N. Flow boiling in horizontal tubes. Part 1: Development of adiabatic two-phase & flow pattern map / N. Kattan, J.R. Thome, D. Favrat // *Int. J. Heat Transfer.* – 1998. – Vol. 120. – P. 140–147.
18. Gross, S. *Numerical Methods for Two-Phase Incompressible Flows* / S. Gross, A. Rensken. – Springer, 2011. – 482 p.
19. Degha, A.L. Numerical Study of Subcooled Boiling in Vertical Tubes Using Relap5/Mod3.2 / A.L. Degha, A. Chaker // *J. Electron Devices.* – 2010. – Vol. 7. – P. 240–245.
20. Численный эксперимент в теории РДТТ / А.М. Липанов, В.П. Бобрышев А.В. Алиев и др. – Екатеринбург: ИПМ УИФ Наука, 1994. – 303 с.
21. Теоретическое и экспериментальное исследование низкотемпературных газогенераторов / Д.Д. Аксёненко, С.Д. Ваулин, В.Г. Зезин и др.; под общ. ред. акад. А.М. Липанова. – Ижевск: ИПМ УрО РАН, 2008. – 264 с.
22. The design and numerical simulation study of gas generator sealing device / H.G. Cheng, J.S. Zhou, T.B. Wang, C.G. Dong // *Proceedings of the third international conference on mechanical engineering and mechanics.* – 2009. – Vol. 1 and 2. – P. 1213–1217.
23. Turbocharged solid propellant ramjet for actical missile / S. Yang, G.Q. He, Y. Liu, J. Li // *Applied Mechanics and Materials.* – 2012. – Vol. 152–154. – P. 204–209.
24. Ozerov, A. Analytical modelling of the gas generator frequency response in hybrid rocket boosters / A. Ozerov, B. Natan, A. Gany // *ACTA Astronautics.* – 1986. – Vol. 39, № 8. – P. 589–598.
25. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
26. Landau, H.G. Heat conduction in a melting solid / H.G. Landau // *Quart. Appl. Math.* – 1950. – Vol. 8. – P. 81–85.
27. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Кириллов Валерий Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры «Двигатели летательных аппаратов», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, valery.v.kirillov@gmail.com.

Поступила в редакцию 29 мая 2017 г.

HEAT AND MASS TRANSFER IN AN AREA WITH MOVING BORDERS

V.V. Kirillov, valery.v.kirillov@gmail.com

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Various fields of science and technology require calculations of heat transfer processes in regions of different shapes, the boundaries of which move with time. These are such tasks as a Stefan problem of ground freezing and ingot crystallization, which can be solved analytically under certain assumptions. Later appeared works on calculating the temperature field in burning fuel grains, thermal decomposition of solid mixtures, melting and ablation of heat-resistant coatings. Mathematical models of such processes include the heat equation, initial and boundary conditions, as well as the conditions of boundary displacement. At the same time, there are tasks associated with the calculation of heat and mass transfer processes, when liquid and gas flow in the regions, the boundaries of which move with time. Mathematical models of such problems include systems of partial differential equations, which can be solved only by numerical methods. This paper proposes an effective numerical method for solving such problems on the basis of the finite difference method, which allows tracking the position of region boundaries when they considerably move on the adaptive computational mesh.

Keywords: heat and mass transfer, numerical method, mathematical model, moving boundaries.

References

1. Kozdoba L.A. *Metody reshenia nelineinykh zadach teploprovodnosti* [Solving Method in Non-Linear Heat Conductivity]. Moscow, 1975. 227 p.
2. Morozov I.I., Gerliga V.A. *Ustoichivost kipiashchih apparatov* [Stability of Boiling Set]. Moscow, 1969. 280 p.
3. Tairov E.A., Korolkov B.P. *O dvizhenii tochki zakipania v parogeneriruischem kanale* [On the Motion of the Boiling Point in the Steam Generating Channel]. *Teploenergetika* [Thermal power engineering], 1978, no. 8, pp. 35–37.
4. Leonchuk M.P. *Raschet perehodnykh regimov parogeneratora na TSVM* [Calculation of Transient Modes of the Steam Generator by Computer]. *Atomna energiya* [Atomic energy], 1968, vol. 24, no. 6, pp. 564–572.
5. Azpitarte O.C., Buscaglia G.C. Numerical Evaluation of Two-Fluid Model Solutions for Turbulent Fully Developed Bubbly Two Phase Flows. *Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation*, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004, pp. 87–94.
6. Garcia-Cascales J.R., Paillre H. A Conservative Scheme for the Study of Multi-Dimensional Two-Phase Flow. *Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation*, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004, pp. 313–320.
7. Wang L., Sunden B. Numerical Simulation of Two-Phase Flows Using a Volume-of-Fluid Model with Various Interface Reconstruction Schemes. *Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation*, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004, pp. 1411–1418.
8. Wajs K., Szulc P. Modelling of Instability of Water and Steam Water Flow in Evaporator. *Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation*, Pisa, Italy, 22–25 September, 2004, pp. 1507–1512.
9. Graf U., Pagadimitrion P. Simulation of Two-Phase Flows in Vertical Tubes with CFD Code Flubox. *Proceedings of the Second International Symposium on Two-Phase Modelling and Experimentation*. Pisa, Italy, 22–25 September, 2004, pp. 1513–1517.
10. Helmy A., Wilson S., Siam A., Balabel A. Numerical Modelling of Two-Phase Flow in an Effervescent Atomizer Using Volume of Fluid Method. *International Journal of Modern Physics and Applications*, 2015, vol. 1, no. 4, pp. 186–192.
11. Garma R., Bouronis M., Bellagi A. Numerical Investigation of Nucleate Boiling Flow in Water Based Bubbles Bumps. *International Journal of Fluid Mechanics & Thermal Sciences*, 2015, vol. 1, no. 2, pp. 36–41.

12. Liang S.M., Wong T.M. Numerical modeling of two-phase refrigerant flow through adiabatic capillary tubes. *Applied Thermal Engineering*, 2001, no. 21, pp. 1035–1038.
13. Yang Z., Peng X.F., Ye P. Numerical and experimental investigation of the phase flow during boiling in a coiled tube. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 2008, no. 51, pp. 1003–1016.
14. Wu H.L., Peng X.F., Ye P., Gong Y. Simulation of refrigerant flow boiling in serpentine tubes. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 2007, no. 50, pp. 1186–1195.
15. Welch S.W.J., Wilson J. A volume of fluid based method for fluid flows with phase. *J. Comput. Phys.*, 2000, no. 160, pp. 662–682.
16. Esmaeeli A., Tryggvason G. Computations of film boiling. Part 1. Numerical method. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 2004, no. 57, pp. 5451–5461.
17. Kattan N., Thome J.R., Favrat D. Flow boiling in horizontal tubes. Part 1: Development of adiabatic two-phase & flow pattern map. *Int. J. Heat Transfer*, 1998, vol. 120, pp. 140–147.
18. Gross S., Rensken A. Numerical Methods for Two-Phase Incompressible Flows. Springer, 2011. 482 p.
19. Degha A.L., Chaker A. Numerical Study of Subcooled Boiling in Vertical Tubes Using Relap5/Mod3.2. *J. Electron Devices*, 2010, vol. 7, pp. 240–245.
20. Lipanov A.M., Bobryshev V.P., Aliev A.V., Spiridonov F.F., Lisitsa V.D. *Chislenny experiment v teorii RDTT* [Calculation Experiment in the RESF Theory]. Ekaterinburg, IAM Science Publ., 1994. 303 p.
21. Lipanov A.M., Aksionenko D.D., Vaulin S.D., Zezin V.G., Kirillov V.V., Mazitov R.Z., Mariash V.I., Savchenkov V.I., Feofilaktov V.I. *Teoreticheskoe i eksperimentalnoe issledovanie nizkotemperaturnih gazogeneratorov* [Theoretical and Experimental Study of Low-Temperature Gas Generators]. Izshevsk, IAM Science Publ., 2008. 264 p.
22. Cheng H.G., Zhou J.S., Wang T.B., Dong C.G. The Design and Numerical Simulation Study of Gas Generator Sealing Device. *Proceedings of the third international conference on mechanical engineering and mechanics*, 2009, vol. 1 and 2, pp. 1213–1217.
23. Yang S., He G.Q., Liu Y., Li J. Turbocharged Solid Propellant Ramjet for Tactical Missile. *Applied Mechanics and Materials*, 2012, vol. 152–154, pp. 204–209. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.152-154.204
24. Oserov A., Natan B., Gany A. Analytical Modelling of the Gas Generator Frequency Response in Hybrid Rocket Boosters. *ACTA Astronautics*, 1986, vol. 39, no. 8, pp. 589–598.
25. Samarsky A.A. *Teoria raznostnyh shem* [Theory of the Difference Schemes]. Moscow, 1983. 616 p.
26. Landau H.G. Heat Conduction in a Melting Solid. *Quart. Appl. Math.*, 1950, vol. 8, pp. 81–85.
27. Samarsky A.A., Nikolaev E.S. *Metody reshenia setochnykh uravneniy* [Calculations Methods for Difference Equations]. Moscow, 1978. 601 p.

Received 29 May 2017

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Кириллов, В.В. Тепло- и массообмен в области с движущимися границами / В.В. Кириллов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2017. – Т. 17, № 2. – С. 20–28. DOI: 10.14529/engin170203

FOR CITATION

Kirillov V.V. Heat and Mass Transfer in an Area with Moving Borders. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 20–28. (in Russ.) DOI: 10.14529/engin170203
