

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕСА С ГРУНТОМ ПРИ ПОВОРОТЕ МАШИНЫ

Н.К. Носков¹, И.П. Трояновская^{1,2}, С.А. Титов^{1,3}

¹Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия,

²Южно-Уральский государственный аграрный университет, г. Троицк, Россия,

³Тюменское высшее военно-инженерное командное училище, г. Тюмень, Россия

Для исследования поведения машины на повороте используются уравнения движения, в которые входят реакции со стороны грунта. Область применений модели движения полностью определяется адекватностью описания силового взаимодействия в контакте.

Сегодня многие модели основаны на эмпирических зависимостях, что ограничивает их широкое применение. Часто допущения, принимаемые при описании сил в контакте, приводят к нарушению законов механики. В статье рассмотрены основные ошибки, наиболее часто используемые при описании силового взаимодействия колеса с грунтом при повороте машины.

В статье предложена новая модель силового взаимодействия, основанная на законах механики и математической теории трения. Предложенная модель описывает силы реакции грунта как функции координат мгновенного скольжения пятна контакта, что сводит силовую задачу к кинематике движения колеса. Это позволяет совместно решать силовую и кинематическую задачи, что подтверждает их взаимосвязь и взаимозависимость.

Преимущества новой модели в том, что она описывает каждое колесо индивидуально. Это позволяет учесть режим движения колеса (ведущий, ведомый или тормозной), упругие свойства пневматической шины и деформацию грунта, ввести разные размеры, форму контакта и величину нормальной нагрузки на колесах. Модель допускает дальнейшее ее усовершенствование для учета анизотропных свойств контакта.

Модель опробована при расчете параметров криволинейного движения малогабаритного трактора и подтверждена экспериментом.

Ключевые слова: скольжение колеса на повороте, математическая теория трения, реакции грунта на повороте, силы и момент трения.

Введение

Решение задач устойчивости, управляемости, проходимости или маневренности не обходится без построения математической модели поворота машины, включающей в себя уравнения движения. В правую часть уравнений движения всегда входят реакции со стороны грунта. Допущения, принимаемые при описании реакций грунта, определяют впоследствии область применения самой модели криволинейного движения. Однако авторы не всегда декларируют используемые ими допущения, что порой приводит к применению моделей движения в тех областях, где это недопустимо и, как следствие, приводит к серьезным ошибкам в результатах расчетов.

1. Анализ наиболее распространенных ошибок

Рассмотрим ошибки, наиболее часто встречаемые при описании силового взаимодействия колеса с грунтом при повороте машины.

1.1. Достижение боковой силой предела по сцеплению

На повороте машины всегда возникает центробежная сила инерции. В результате на колесо со стороны грунта действует боковая реакция P_y . При малом значении бокового усилия возникает явление бокового упругого увода за счет деформации шины, обнаруженное Дж. Брулье в 1925 году [1]. Французский физик И. Рокар исследовал зависимость поперечного перемещения центра колеса от поперечной реакции [2]. Им была предложена гипотеза, подразумевающая линейную зависимость боковой силы P_y от угла увода γ : $P_y = k\gamma$, где k – коэффициент боковой жесткости

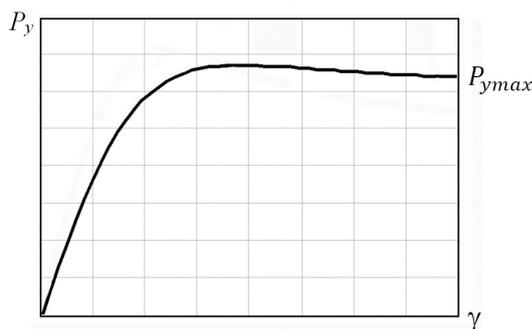


Рис. 1. Экспериментальная зависимость боковой силы P_y от угла увода γ

введения нелинейной зависимости $P_y(\gamma)$ боковой силы от угла увода [7], приравнивая при этом максимальное значение боковой силы пределу по сцеплению $P_{y \max} = \phi N$, где ϕ – предельный коэффициент трения скольжения, N – вертикальная сила на колесе [8].

Ошибочность такого допущения очевидна. При скольжении обе касательные силы в контакте (продольная сила тяги P_x и боковая реакция грунта P_y) являются составляющими одной силы трения P , ограниченной пределом по сцеплению $P_{\max} = \phi N$. Составляющие связаны между собой соотношением $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$. Следовательно, если боковая составляющая достигает предела по сцеплению $P_{y \max} = \phi N$, то продольная составляющая должна быть равна нулю $P_x = 0$, что противоречит самой возможности движения. Следовательно, максимальное значение боковой силы всегда меньше предела сцепления $P_y < \phi N$.

1.2. Сведение всех сил в контакте к одной результирующей силе, приложенной в центре

В действительности, при повороте машины в контакте колеса с грунтом возникает множество элементарных сил трения. Задача описания силового взаимодействия в таком случае сводится к задаче приведения всех элементарных сил к одной результирующей силе. Наиболее часто авторы предполагают, что результирующая сила приложена в центре пятна контакта [9, 10].

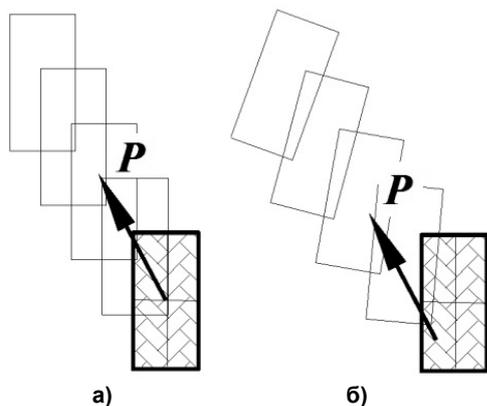


Рис. 2. Движение тела под действие силы: а – сила приложена в центре масс; б – сила смещена от центра масс

1.3. Независимость результирующей силы и момента трения

В общем случае приведения всех элементарных сил трения к центру пятна контакта мы имеем совокупность результирующей силы P и результирующего момента M , получившего название стабилизирующего (рис. 3).

Для расчета стабилизирующего момента M авторы используют различные эмпирические зависимости [11–13]. Однако, несмотря на многообразие используемых для расчета момента M формул, модели силового взаимодействия объединяет то, что значение результирующей силы у всех авторов равно пределу по сцеплению $P = \phi N$.

пневматической шины. Такой подход нашел широкое применение в моделях криволинейного движения автомобиля, движущегося с большими радиусами поворота без скольжения колес по грунту [3–5].

Однако экспериментально было замечено, что с ростом боковой силы линейный характер ее зависимости от угла увода теряется (рис. 1).

Е.А. Чудаков доказал [6], что это явление объясняется не увеличением упругих свойств шины, а быстро прогрессирующим боковым скольжением шины. Некоторые ученые предприняли попытку учета скольжения в рамках гипотезы Рокара, путем

Однако, согласно законам механики, под действием силы, приложенной в центре масс, тело совершает только поступательное движение. Следовательно, одна равнодействующая силе в центре давлений пятна контакта способствует поступательному скольжению (рис. 2а). Это противоречит природе криволинейного движения. Изменение направления равнодействующей приведет только к изменению траектории скольжения, но не обеспечит поворот площадки контакта, который имеет место при криволинейном движении. Следовательно, в общем случае криволинейного движения равнодействующая сила должна иметь некоторое смещение относительно центра контакта, за счет которого колесо совершает скольжение по законам плоскопараллельного движения (рис. 2б).

Это предположение является ошибочным. Результирующая сила P_p является результатом сложения элементарных сил $P_p = \sum dP_{pi}$, одинаковых по величине и направлению (рис. 4а). Если она достигла предела сцепления, то каждая элементарная сила dP_{pi} в точке тоже достигла предела по сцеплению. Момент M тоже является результатом сложения других элементарных сил dP_{Mi} , различных по модулю и направлению (рис. 4б). Результирующая сила в каждой точке определяется векторной суммой обеих составляющих $dP_i = dP_{pi} + dP_{Mi}$ (рис. 4в). Поскольку закон Кулона должен выполняться в каждой точке $dP_i \leq \phi dN$, то достижение одной из составляющих предела сцепления возможно лишь только при отсутствии другой. Если $dP_p = \phi dN$, то $dP_M = 0$, это соответствует прямолинейному движению. Другой предельный случай, когда $dP_M = \phi dN$ и $dP_p = 0$, соответствует повороту колеса вокруг центра пятна контакта.

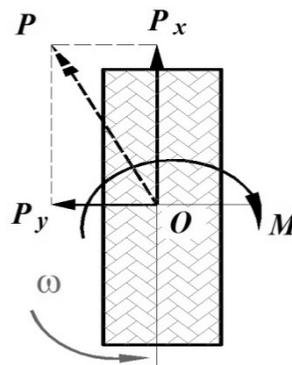


Рис. 3. Силовые факторы в контакте колеса с грунтом при повороте машины

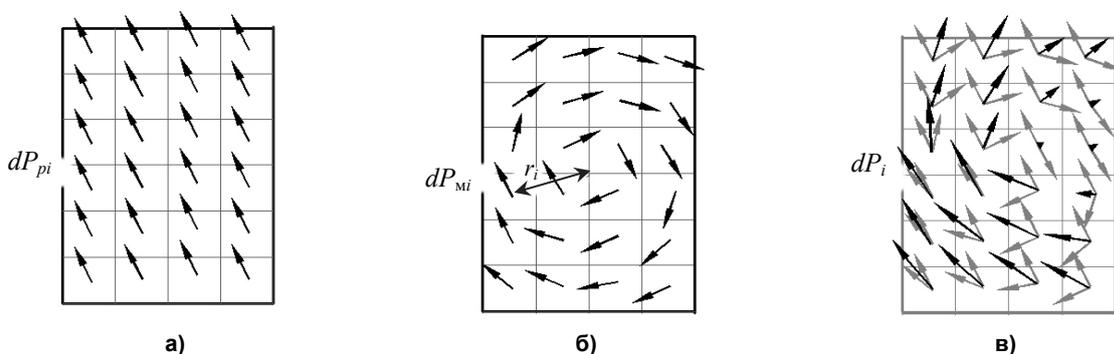


Рис. 4. Формирование результирующей силы $P = \sum dP_{pi}$ и результирующего момента $M = \sum dP_{Mi}h_i$

Другими словами, при плоскопараллельном скольжении значения результирующей силы P в контакте и стабилизирующего момента M взаимосвязаны (чем больше момент M , тем меньше результирующая сила P) [14]. Это объясняется тем, что сила P и момент M имеют одну физическую природу – трение, ограниченное по сцеплению в своей совокупности. Следовательно, на повороте максимальное значение равнодействующей силы всегда меньше предела сцепления $P < \phi N$. Это доказывает, что принцип суперпозиции при связях с трением недопустим [15].

2. Постановка задачи исследования

Для учета влияния величины продольной силы P_x на боковую составляющую P_y , некоторые авторы используют различные эмпирические зависимости между продольным буксованием и коэффициентом бокового увода [16]. Аналогично с помощью эмпирических формул вводят зависимость между результирующей силой P и моментом M . Однако любые эмпирические зависимости ограничены законом подобия и потому не имеют широкого применения.

Задачей представленного исследования являлась разработка математической модели силового взаимодействия колеса с грунтом при повороте машины на основе законов механики и теории трения, позволяющей учитывать режим движения колеса, его скольжение, форму и размер пятна контакта и анизотропию взаимодействия.

3. Построение базовой модели силового взаимодействия

Первые труды, посвященные силам трения при плоскопараллельном движении, были сделаны Н.Н. Шиллером [17] и Н.Е. Жуковским [18]. На их основе Ф.А. Опейко разработал математическую теорию трения [19].

Построение базовой модели силового взаимодействия подробно описано в работе [20]. Свяжем систему координат Oxy с центром пятна контакта (ось x – вдоль плоскости качения колеса, ось y – поперек плоскости качения). Выделим на площадке контакта элементарную площадку с координатами ξ, η и рассмотрим плоскопараллельное скольжение пятна контакта колеса относительно грунта как мгновенно вращательное движение. Скорость V скольжения каждой точки всегда направлена перпендикулярно радиус-вектору, проведенному из мгновенного

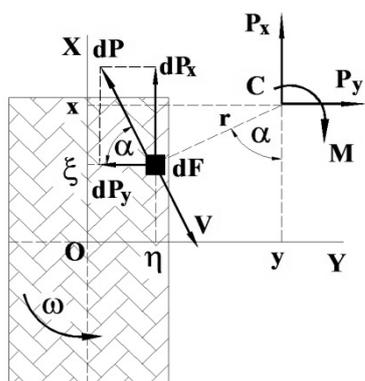


Рис. 5. Формирование силовых факторов в контакте колеса с грунтом при повороте машины

Учитывая, что при скольжении каждая элементарная сила достигла предела по сцеплению $dP = \varphi dN$, то уравнения (1) приобрели вид:

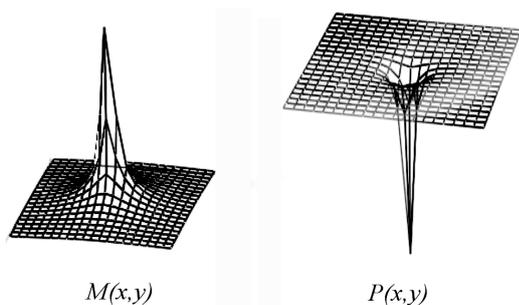
$$dP_x = \frac{\varphi(y-\eta)dN}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}, \quad dP_y = \frac{-\varphi(x-\xi)dN}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}. \quad (3)$$

В случае приведения элементарной силы dP к мгновенному центру скольжения C получили элементарный момент трения $dM = dP\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. В результате сложения всех элементарных сил и элементарных моментов трения получили выражения

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \varphi q \iint_{\eta\xi} \frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \\ P_y &= -\varphi q \iint_{\eta\xi} \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \\ M &= \varphi q \iint_{\eta\xi} \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $q = N/F$ – нормальное давление в контакте, F – площадь пятна контакта.

Силовые факторы P_x, P_y, M в контакте колеса с грунтом в (4) представлены в виде функций координат x, y мгновенного центра скольжения C [21]. Качественная зависимость силы P и момента M от координат мгновенного центра скольжения x, y представлена на рис. 6.



Взаимосвязь между силой и моментом [22] наиболее активно проявляется при малых значениях координат x, y , что соответствует движению с небольшими радиусами поворота машины, когда скольжение наиболее вероятно.

Рис. 6. Зависимость силы P и момента M трения от координат x, y мгновенного центра скольжения в пространстве

3.1. Учет формы и размера контакта

Контакт колеса с грунтом имеет сложную форму, зависящую от рисунка протектора (рис. 7а). Однако В.В. Редчиц в работе [23] экспериментально показал, что величина силовых факторов в контакте колеса с грунтом определяется размерами описываемого наружного контура. Это позволило упростить форму контакта до фигуры прямоугольника или овала (рис. 7б).

В интегральных зависимостях (4) размеры и форма пятна контакта учитываются с помощью пределов интегрирования. В случае прямоугольной формы контакта пределы интегрирования силовых функций (4) имеют вид

$$-0,5b \leq \eta \leq 0,5b, \quad -0,5L \leq \xi \leq 0,5L, \quad (5)$$

где L, b – длина и ширина прямоугольного контакта (см. рис. 6).

При овальном контакте пределы интегрирования имеют вид

$$-c \leq \eta \leq c,$$

$$-d \frac{\sqrt{c^2 - \xi^2}}{c} \leq \xi \leq d \frac{\sqrt{c^2 - \xi^2}}{c}.$$

Площадь контакта F равна:
 - для прямоугольника $F = bL$;
 - для эллипса $F = \pi cd$.

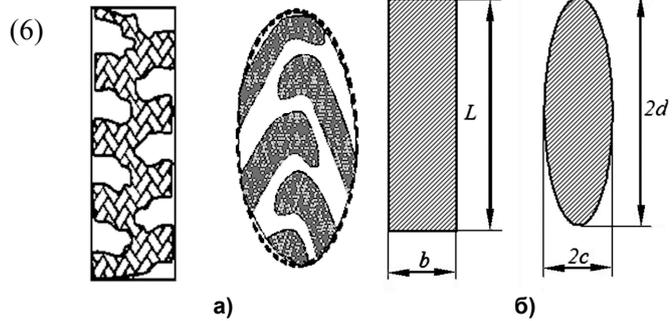


Рис. 7. Формы контакта колеса с грунтом: а – реальная, б – принятая при моделировании

3.2. Учет неравномерного давления в контакте

Для колесных машин в расчетах часто используют среднее значение нормального давления $q = N/F$. Однако для более точного решения задачи нужен учет реального закона изменения давления по площадке контакта колеса с грунтом. В представленной модели учет распределения нормального давления (рис. 8) был сделан путем введения q в формулах (4) под знак интеграла:

- $q(\xi, \eta) = q_{\max} \sqrt{1 - (\eta/b)^2}$ – распределение давления по прямоугольному контакту (рис. 8а);

- $q(\xi, \eta) = q_{\max} \sqrt{1 - (2\eta/c)^2 - (2\xi/d)^2}$ – распределение давления по овальному контакту (рис. 8б).

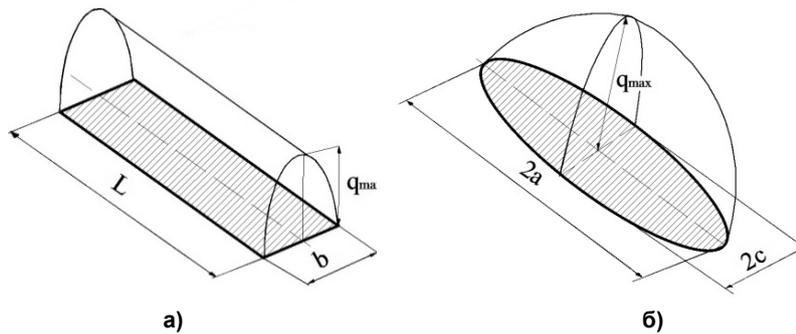


Рис. 8. Законы распределения давления в контакте колеса: а – прямоугольной формы, б – овальной формы

3.3. Учет анизотропии взаимодействия

Наличие несимметричного рельефа протектора приводит к неодинаковым сцепным свойствам колеса с грунтом в продольном и поперечном направлении. Это явление называют анизотропией взаимодействия.

При анизотропном взаимодействии годограф вектора коэффициента трения ϕ описывает эллипс и направление скольжения не совпадает с направлением действия результирующей силы (рис. 9). Вопросы анизотропного трения подробно освещены в работе [19].

Продольная сила P_x выражалась с помощью продольного коэффициента трения $\phi_{x\max}$, а поперечная сила P_y – с помощью поперечного коэффициента трения $\phi_{y\max}$. Тогда результирующий момент M вычислялся как сумма моментов от продольной и поперечной составляющей $dM = dP_x y + dP_y x$. Интегральные зависимости силовых факторов трения (4) с учетом разных коэффициентов трения вдоль $\phi_{x\max}$ и поперек $\phi_{y\max}$ плоскости качения колеса приобрели вид

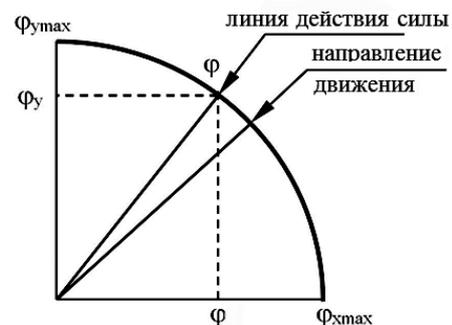


Рис. 9. Годограф коэффициента анизотропного трения ϕ

Расчет и конструирование

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \iint_{\eta\xi} q\varphi_{x\max} \frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \\ P_y &= - \iint_{\eta\xi} q\varphi_{y\max} \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \\ M &= \iint_{\eta\xi} \frac{\varphi_{x\max}(y-\eta)^2 + \varphi_{y\max}(x-\xi)^2}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3.4. Учет упругих свойств шины и грунта

Для учета упругих свойств пневматической шины и деформации грунта был использован переменный коэффициент трения φ , зависящий от величины скольжения S . В этом случае коэффициент φ приобретает смысл элементарной удельной касательной силы $\varphi = dP/dN$.

Сегодня существуют модели силового взаимодействия колеса с грунтом, где силы в контакте зависят от скорости скольжения. В основном эти модели разработаны для прямолинейного движения машины и касаются продольной составляющей силы трения. Характер изменения удельного тягового усилия φ от буксования S представлен на рис. 10.

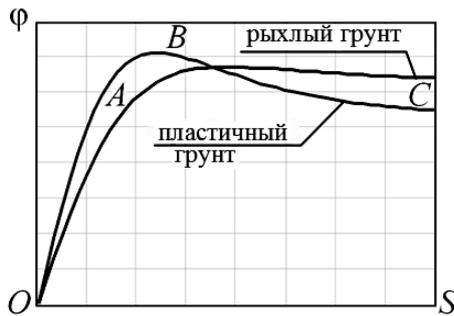


Рис. 10. Экспериментальная зависимость удельной касательной силы φ от скольжения S

Данная кривая описывает все стадии взаимодействия:

- линейный участок OA характеризует упругую деформацию шины и грунта (псевдоскольжение);
- участок AB характеризует срыв поверхностного слоя грунта и присущ только пластичным грунтам;
- участок BC характеризует полное скольжение колес относительно грунта.

Существует множество различных эмпирических функций, описывающих эту зависимость $\varphi(S)$ [24]. Выбор рациональной формулы осуществлялся по критерию наименьшего числа используемых эмпирических коэффициентов. Преимущество имеет формула В.В. Кацыгина [25], содержащая всего два эмпирических коэффициента a_1 и a_2

$$\varphi = \varphi_m \left(1 + \frac{a_1}{ch(dS/a_2)} \right) th \left(\frac{dS}{a_2} \right), \quad (8)$$

где φ_m – максимальный коэффициент сцепления.

Кроме того, формула (8) позволяет описывать характеристики как пластичного, так и рыхлого типа грунта (рис. 10):

- при $a_1 = 0$ получаем рыхлый грунт (кривая $OABC$);
- при $a_1 \neq 0$ получаем пластичный грунт (кривая OBC).

Поскольку зависимость боковой силы P_y от бокового скольжения S_y имеет аналогичный вид (см. рис. 1), то формула (8) была применена для обеих составляющих сил в контакте колеса с грунтом. Анизотропные свойства отражались в разных эмпирических коэффициентах a_1 и a_2 .

Введение функции (8) в подынтегральных зависимостях (4) позволило учесть продольные и поперечные упругие свойства пневматической шины и деформацию грунта в обоих направлениях. Формулы (7) силовых факторов P_x , P_y , M приобрели вид:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \iint_{\eta\xi} q\varphi_{x\max} \left(1 + \frac{a_1}{ch(dS_x/a_2)} \right) th \left(\frac{dS_x}{a_2} \right) \frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \\ P_y &= - \iint_{\eta\xi} q\varphi_{y\max} \left(1 + \frac{a_1}{ch(dS_y/a_2)} \right) th \left(\frac{dS_y}{a_2} \right) \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \\ M &= \iint_{\eta\xi} \frac{\varphi_{x\max} \left(1 + \frac{a_1}{ch(dS_x/a_2)} \right) th \left(\frac{dS_x}{a_2} \right) (y-\eta)^2 + \varphi_{y\max} \left(1 + \frac{a_1}{ch(dS_y/a_2)} \right) th \left(\frac{dS_y}{a_2} \right) (x-\xi)^2}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где dS_x , dS_y – продольное и поперечное скольжение в точке контакта с координатами ξ , η .

Влияние упругости шины и грунта на взаимную зависимость силы $P(x, y)$ и момента $M(x, y)$ представлено на рисунке (рис. 11). Для наглядности зависимости результирующей силы от величины момента трения внизу наложен квадратный след размером 120×120 мм.

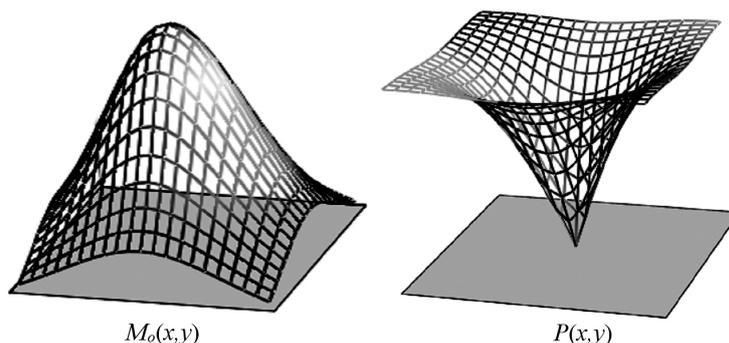


Рис. 11. Зависимость силы P и момента M трения от координат x, y мгновенного центра скольжения в пространстве с учетом упругих свойств шины и грунта

3.5. Выявление зон скольжения и упругой деформации в контакте

Скольжение в каждой точке контакта однозначно определяется удаленностью от мгновенного центра скольжения.

Буксование (продольное скольжение) считалось как $S_x = V_\delta / V_t$, где $V_\delta = \omega x$ – скорость буксования колеса, $V_t = \omega x_c$ – теоретическая скорость колеса, ω – угловая скорость движения колеса, x_c – координата мгновенного центра скольжения колеса относительно центра поворота всей машины. Тогда буксование в точке с координатами ξ, η имело вид $S_x = (x - \xi) / x_c$.

Аналогично определялось и боковое скольжение $dS_y = (y - \eta) / y_c$, где y_c – координаты мгновенного центра скольжения колеса относительно центра поворота всей машины.

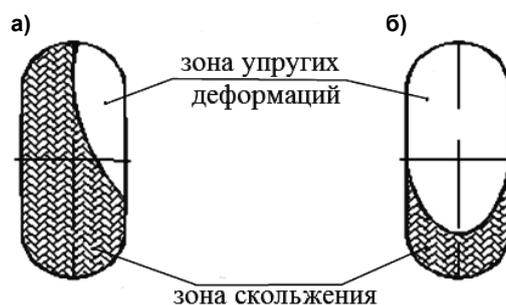


Рис. 12. Распределение упругих зон и зон скольжения в контакте ведущего (а) и ведомого (б) колеса при повороте машины налево

Таким образом, по известным координатам мгновенного центра скольжения по формулам (4), (7), (9) были вычислены не только результирующая сила P и момент M в контакте колеса с грунтом, но и удельные силы φ в каждой точке контакта. Согласно рис. 10 определялись зоны скольжения и упругой деформации. Результаты расчетов для ведомого и ведущего колеса представлены на рис. 12.

3.6. Апробация модели силового взаимодействия

Предлагаемая модель силового взаимодействия колеса с грунтом была опробована при расчете криволинейного движения малогабаритного трактора «Уралец» производства Челябинского тракторного завода [26]. Эта машина имеет нетрадиционную схему поворота. У нее на повороте при передних ведомых управляемых колесах на задней оси только одно колесо (наружное заднее) является ведущим, а другое (заднее внутреннее) колесо является тормозным. Расчет показал, что даже при полном торможении заднего внутреннего колеса (буксование 100 %) максимальное значение силы трения в контакте его с грунтом составило $P_{\max} = 0,7\varphi N$. Расчетные значения были подтверждены экспериментом [27]. Это объясняется тем, что на повороте за счет присутствия момента трения результирующая сила всегда меньше, чем при прямолинейном движении.

4. Заключение

Модель силового взаимодействия в контакте описывает силовые факторы P_x, P_y, M как функции координат x, y мгновенных центров скольжения. Такой подход имеет ряд преимуществ:

- в основе предложенного подхода положены законы механики трения, а не эмпирические зависимости, что значительно расширило область его применения;
- сведение силовых факторов к кинематике плоскопараллельного движения позволило совместно решать силовую и кинематическую задачи, что полностью соответствует физической сути криволинейного движения;
- описание силовых факторов для каждого колеса индивидуально позволило учесть разный режим движения колес (ведомый, ведущий, тормозной);
- введение разных коэффициентов сцепления вдоль и поперек плоскости качения колеса позволило учесть анизотропию взаимодействия с учетом рисунка протектора;
- интегральные зависимости позволили учесть форму пятна контакта (овал и прямоугольник) путем изменения пределов интегрирования;
- введение нормального давления q под знак интеграла позволило учесть реальный закон распределения вертикальной нагрузки по площадке контакта;
- использование интегральных зависимостей позволило выявить зоны упругой деформации и скольжения в контакте.

Данная модель была опробована при расчете стационарного поворота минитрактора и получила экспериментальное подтверждение [27].

Литература

1. Broulhiet G. *La suspension de la direction de la voiture automobile. Schimmi et dandinement. Société des ingénieurs civils de France, 1925, Bul., 78 p.*
2. Рокар, И. *Неустойчивость в механике. Автомобили, самолеты, висячие мосты / И. Рокар. – М.: ИИЛ, 1959. – 288 с.*
3. Гладов, Г.И. *Параметры криволинейного движения специальных транспортных средств / Г.И. Гладов, Л.А. Пресняков // Автомобильная промышленность. – 2017. – № 5. – С. 22–23.*
4. *Работа автомобильной шины / В.И. Кнороз и др. – М.: Транспорт, 1976. – 238 с.*
5. Ларин, В.В. *Методы прогнозирования опорной проходимости многоосных колесных машин на местности / В.В. Ларин. – М.: Изд-во МГТУ, 2007. – 223 с.*
6. Чудаков, Е.А. *Влияние боковой эластичности колес на движение автомобиля / Е.А. Чудаков. – М.-Л.: Изд-во АН наук СССР. – 1947. – № 10. – 125 с.*
7. Абдулгасис, А.У. *Динамическая модель взаимосвязи углов увода эластичной шины автомобиля с ее жесткостными характеристиками / А.У. Абдулгасис // Ученые записки Крымского инж.-пед. ун-та. – 2016. – № 53 (3). – С. 51–54.*
8. Кравец, В.Н. *Исследование скольжения колес при повороте автомобиля / В.Н. Кравец, Р.А. Мусарский // Изв. высш. учеб. заведений. Сер. «Машиностроение». – 2014. – № 651 (6). – С. 35–38.*
9. Рождественский, Ю.Л. *О формировании реакций при качении упругого колеса по недеформируемому основанию в режимах бортового поворота / Ю.Л. Рождественский, К.Ю. Машиков // Вопросы расчета и конструирования гусеничных машин: труды МВТУ. – 1982. – № 390. – С. 56–63.*
10. Беляев, А.Н. *Определение сил при повороте трактора со всеми управляемыми колесами / А.Н. Беляев, В.В. Свистов, Т.В. Тришина // Вестник Воронеж. гос. аграр. ун-та. – 2016. – № 50 (3). – С. 132–140.*
11. Смирнов, Г.А. *Теория движения колесных машин / Г.А. Смирнов. – М.: Изд-во Машиностроение, 1990. – 272 с.*
12. Радионов, А.А. *Математическая модель движения автомобиля / А.А. Радионов, А.Д. Чернышев // Инновац. транспорт. – 2015. – № 18 (4). – С. 69–73. DOI: 10.20291/2311-164X-2015-4-69-73*
13. Горелов, В.А. *Прогнозирование характеристик криволинейного движения автомобиля с колесной формулой 6×6 при различных законах управления поворотом колес задней оси / В.А. Горелов, Г.О. Котиев // Изв. высш. учеб. заведений. Сер. «Машиностроение». – 2008. – № 1. – С. 44–55.*

14. Ефименко, А.Н. До апроксимації сили та моменту відведення пружного колеса / А.Н. Ефименко // Вісник Донецької академії автомобільного транспорту. – 2015. – № 2. – С. 39–43.
15. Опейко, Ф.А. Колесный и гусеничный ход / Ф.А. Опейко. – Минск: Изд-во Акад. сельско-хозяйств. наук БССР, 1960. – 228 с.
16. Котиев, Г.О. Математическая модель криволинейного движения автомобиля с колёсной формулой 8×8 при различных способах управления поворотом / Г.О. Котиев, Н.В. Чернышев, В.А. Горелов // Журнал автомобил. инженеров. – 2009. – № 55 (25). – С. 34–39.
17. Шиллер, Н.Н. Заметки о равновесии твердого тела при действии трения на некоторую плоскую часть его поверхности / Н.Н. Шиллер // Труды отделения физических наук общества любителей естествознания. – 1892. – Вып. 5. – № 1. – С. 17–19.
18. Жуковский, Н.Е. Условия равновесия твердого тела опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением / Н.Е. Жуковский // Труды отделения физ. наук любителей естествознания. – 1897. – Вып. 9. – № 1. – С. 339–354.
19. Опейко, Ф.А. Математическая теория трения / Ф.А. Опейко. – Минск: Акад. сельско-хозяйств. наук БССР, 1971. – 149 с.
20. Trojanovskaya, I.P. Forces of friction at the wheel-to-ground contact in a turning vehicle / I.P. Trojanovskaya, V.M. Pozin // Procedia Engineering. Elsevier Ltd. – 2015. – № 129. – P. 156–160. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.12.025
21. Трояновская, И.П. Взаимодействие колесного движителя с грунтом на повороте с точки зрения механики / И.П. Трояновская // Тракторы и сельхозмашины. – 2011. – № 3. – С. 29–35.
22. Монастырский, Ю.А. Закономерности движения колесной машины на повороте при принудительном регулировании вращения ведущих колес / Ю.А. Монастырский, В.О. Систук // Вісник НТУ «ХПИ». Серія «Автомобіле та тракторобудування». – 2013. – № 1002 (29). – С. 65–70.
23. Редчиц, В.В. О явлении относительного поворота контактного отпечатка движущегося колеса / В.В. Редчиц // Автомобил. пром-сть. – 1974. – № 3. – С. 28–30.
24. Анкинович, Г.Г. Оценка влияния активизации колес полуприцепа на тягово-динамические свойства автопоезда / Г.Г. Анкинович, В.А. Горелов, О.И. Чудаков // Изв. высш. учеб. заведений. Сер. «Машиностроение». – 2017. – № 682 (1). – С. 44–54.
25. Кацыгин, В.В. О закономерности сопротивления почв сжатию / В.В. Кацыгин // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – 1962. – № 4. – С. 28–31.
26. Мицын, Г.П. Модель стационарного поворота транспортной (тяговой) машины / Г.П. Мицын, Б.М. Позин, И.П. Трояновская // Техника и технологии строительства и эксплуатации автомобильных дорог: сб. науч. тр. МАДИ(ТУ). – М., 2000. – С. 88–92.
27. Мицын, Г.П. Стационарный поворот минипогрузчика (экспериментальные результаты) / Г.П. Мицын и др. // Проблемы проектирования, строительства и эксплуатации автомобильных дорог: сб. науч. тр. МАДИ(ТУ). – М., 2001. – С. 233–237.

Носков Никита Константинович, инженер, аспирант кафедры «Колесные и гусеничные машины», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, esso_07@mail.ru.

Трояновская Ирина Павловна, доктор технических наук, почетный машиностроитель РФ, профессор кафедры «Колесные и гусеничные машины», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; профессор кафедры «Прикладная механика», Южно-Уральский государственный аграрный университет, г. Троицк, tripav@ Rambler.ru.

Титов Сергей Александрович, преподаватель, Тюменское высшее военно-инженерное командное училище, г. Тюмень; соискатель кафедры «Колесные и гусеничные машины», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, titov_sergeii@mail.ru.

Поступила в редакцию 28 августа 2017 г.

MATHEMATICAL MODEL OF FORCE INTERACTIONS WHEEL GROUND WHEN THE MACHINE TURNS

N.K. Noskov¹, ecco_07@mail.ru,
I.P. Troyanovskaya^{1,2}, tripav@rambler.ru,
S.A. Titov^{1,3}, titov_sergeii@mail.ru

¹South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,

²South Ural State Agrarian University, Troitsk, Russian Federation,

³Tyumen Higher Military Engineering Command School, Tyumen, Russian Federation

The behavior of the car at the turn is described by the equations of motion into which the reactions from the side of the soil necessarily enter. The scope of applications of the motion model is determined by the description of the force interaction in the contact.

Today, many models are based on empirical dependencies. This limits their wide application. Often the assumptions made when describing the forces in contact lead to a violation of the laws of mechanics. The article examines the main errors most frequently encountered in describing the force interaction of the wheel with the ground when the machine is turned.

The article proposes a new model of force interaction, based on the laws of mechanics and the mathematical theory of friction. This model describes the ground reaction forces as a function of the coordinates of the instantaneous sliding of the contact spot. This reduces the power problem to the kinematics of the motion of the wheel. Power and kinematic problems are solved together, which confirms their interconnection and interdependence.

The advantages of the new model is that it describes each wheel individually. This allows you to take into account the mode of motion of the wheel (drive, non-drive or braking), the elastic properties of the pneumatic tire and deformation of the ground, enter different sizes, the shape of the contact and the value of the normal load on the wheel. The model allows to take into account the anisotropic properties of the contact in the future. The model is tested and confirmed by experiment when turning a small tractor.

Keywords: wheel slip on the turn, mathematical theory of friction, ground reaction on the turn, force and friction moment.

References

1. Broulhiet G. [La suspension de la direction de la voiture automobile. Schimmi et dandinement]. Société des ingénieurs civils de France, 1925, Bul., 78 p.
2. Rocar I. *Neustojchivost v mehanike. avtomobili, samoljoty, visjachie mosty* [Instability in Mechanics; Cars, Airplanes, Suspension Bridges]. Paris, Masson, 1954. 288 p.
3. Gladov G.I., Presnyakov L.A. [The Parameters of Curvilinear Motion Special Vehicles]. *Automobile Industry*, 2017, no. 5, pp. 22–23. (in Russ.)
4. Knoroz V.I. et al. *Rabota avtomobilnoj shiny* [The Work of a Car Tire]. Moscow, Transport, 1976. 238 p.
5. Larin V.V. *Metody prognozirovaniya opornoj prokhodimosti mnogoosnykh kolesnykh mashin na mestnost* [Methods for Predicting the Reference Patency of Multi-Axis Wheeled Vehicles on the Terrain]. Moscow, Publishing House of Moscow State Technical University, 2007. 223 p.
6. Chudakov E.A. *Vliyanie bokovoj j elastichnosti koljos na dvizhenie avtomobilya* [The Influence of Wheels' Lateral Elasticity on Vehicle Movement]. Moscow-Leningrad: USSR Academy of Sciences, 1947, no. 10. 125 p.
7. Abdulgazis A.U. [Dynamic Model of the Interconnection of the Vehicular Elastic Tyre Slip Angles and its Rigidity Characteristics]. *Scholarly notes of the Crimean Engineering and Pedagogical University*, 2016, no. 53 (3), pp. 51–54. (in Russ.)
8. Kravets V.N., Musarsky R.A. [Studying the Wheel Slip When Turning a Car]. *University News. Ser. Mechanical Engineering*, 2014, no. 651 (6), pp. 35–38. (in Russ.)
9. Rojdestvenskiy U.L., Mashkov K.U. [About Formation of Reactions at Rolling an Elastic Wheel on Not Deformable Basis in Modes of Onboard Turn]. *Proceedings of the Moscow Higher Technical School*, 1982, no. 390, pp. 56–63. (in Russ.)

10. Belyaev A.N., Svistov V.V., Trishina T.V. [Determining the Forces of a Tractor Turn with All Steerable Wheels]. *Bulletin of Voronezh State Agrarian University*, 2016, no. 50 (3), pp. 132–140. (in Russ.)
11. Smirnov G.A. *Teoriya dvizheniya koljosnyh mashin* [The Theory of Movement of Wheel Machines]. Moscow, Mechanical Engineering, 1990. 272 p.
12. Radionov A.A., Chernyshev A.D. [Mathematical model of vehicle motion]. *Innovative Transport*, 2015, no. 18 (4), pp. 69–73. (in Russ.) DOI: 10.20291/2311-164X-2015-4-69-73
13. Gorelov V.A., Kotiev G.O. [Forecasting the Characteristics of Non-Linear Vehicular Movement with a 6×6 Wheel Arrangement Given Different Laws of Real Axle Wheel Turn Control. University News]. *Series Mechanical Engineering*, 2008, no. 1, pp. 44–55. (in Russ.)
14. Efimenko A.N. [To the Approximation of the Force and Moment Slip Elastic Wheels]. *Bulletin of Donetsk Academy of Motor Transport*, 2015, no. 2, pp. 39–43. (in Ukr.)
15. Opeiko F.A. *Koljosnyj i gusenichnyj hod* [Wheeled and Track Mover]. Minsk: Academy of Agricultural Sciences of the BSSR, 1960. 228 p.
16. Kotiev G.O., Chernyshev N.V., Gorelov V.A. [Mathematical Model of the Nonlinear Vehicular Movement with and 8×8 Wheel Arrangement at Different Turn Control Methods]. *Journal of Automotive Engineers*, 2009, no. 55 (25), pp. 34–39. (in Russ.)
17. Shiller N.N. [Notes on Hard Body Equilibrium under the Influence of Friction on the Flat Part of its Surface]. *Proceedings of the department of physical sciences of the Society of Naturalists*, 1892, no. 5 (1), pp. 17–19. (in Russ.)
18. Zhukovsky N.E. [Equilibrium Conditions of a Hard Body Resting on a Motionless Plane by Some Site and Movable Along this Plane with Friction]. *Proceedings of the department of physical sciences of the Society of Naturalists*, 1897, no. 9 (1), pp. 339–354. (in Russ.)
19. Opeiko F.A. *Matematicheskaya teoriya treniya* [Mathematical Theory of Friction]. Minsk: Academy of Agricultural sciences of the BSSR, 1971. 149 p.
20. Troyanovskaya I.P., Pozin B.M. [Forces of Friction at the Wheel-to-Ground Contact in a Turning Vehicle]. *Procedia Engineering. Elsevier Ltd*, 2015, no. 129, pp. 156–160. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.12.025
21. Troyanovskaya I.P. [Wheeled Running Gear-to-Ground Interaction on Turns from the Perspective of Mechanics]. *Tractors and Agricultural Machines*, 2011, no. 3, pp. 29–35. (in Russ.)
22. Monastyrsky Yu.A., Sistuk V.O. [Laws of Wheeled Vehicle Movement when Turning given Positive Driving Wheel Rotation Control]. *Bulletin of the National Technical University Kharkov Polytechnic Institute. Series: Motor car and tractor Building*, 2013, no. 1002 (29), pp. 65–70. (in Russ.)
23. Redchits V.V. [About the Phenomenon of the Relative Turn of the Moving Wheel's Contact Print]. *Automobile Industry*, 1974, no. 3, pp. 28–30. (in Russ.)
24. Ankinovich G.G., Gorelov V.A., Chudakov O.I. [Assessment of the Impact of Semitrailer Wheel Activation on Combination Traction and Dynamic Properties]. *University News. Series Mechanical Engineering*, 2017, no. 682 (1), pp. 44–54. (in Russ.)
25. Katsygin V.V. [On the Law of Soil Resistance to Compression]. *Mechanization and Electrification of Socialist Agriculture*, 1962, no. 4, pp. 28–31. (in Russ.)
26. Mitsyn G.P., Pozin B.M., Troyanovskaya I.P. [Model of Stationary Turning of a Transport (Traction) Machine]. *Engineering and technology of construction and operation of highways. Proceedings of Moscow automobile-road state technical university*, 2000, pp. 88–92. (in Russ.)
27. Mitsyn G.P., Pozin B.M., Troyanovskaya I.P. [Fixed-Turn Steer Loader (Experimental Results)]. *Problems of Design Engineering, Construction and Operation of Highways. Proceedings of Moscow automobile-road state technical university*, 2001, pp. 233–237. (in Russ.)

Received 28 August 2017

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Носков, Н.К. Математическая модель силового взаимодействия колеса с грунтом при повороте машины / Н.К. Носков, И.П. Трояновская, С.А. Титов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2017. – Т. 17, № 3. – С. 5–15. DOI: 10.14529/engin170301

FOR CITATION

Noskov N.K., Troyanovskaya I.P., Titov S.A. Mathematical Model of Force Interactions Wheel Ground when the Machine Turns. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 5–15. (in Russ.) DOI: 10.14529/engin170301