

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО ПОВОРОТА ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

С.А. Титов^{1,2}, И.П. Трояновская^{1,3}, Н.К. Носков¹

¹Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,

²Тюменское высшее военно-инженерное командное училище, г. Тюмень,

³Южно-Уральский государственный аграрный университет, г. Троицк

Статья посвящена методике построения математической модели криволинейного движения произвольного транспортного средства. Предлагаемый подход позволяет описать поворот машины с любой схемой трансмиссии при ее движении по любому грунтовому фону. Вертикальными колебаниями корпуса на данном этапе пренебрегли и ограничились рассмотрением плоского движения. Поэтому уравнения движения имеют вид алгебраических уравнений. Входящие в них неизвестные реакции грунта записаны на основе математической теории трения. В этом случае тяговое усилие, боковая сдвигающая сила и стабилизирующий момент в контакте колеса с грунтом являются функцией неизвестных координат мгновенного центра скольжения. Это сводит силовую задачу к кинематике движения колеса и позволяет решать их одновременно, учитывая их взаимосвязь и взаимозависимость. Далее в статье рассмотрена кинематика движения колеса при повороте машины и выведены недостающие уравнения голономных и неголономных связей, накладываемых на неизвестные координаты мгновенных центров скольжения. Уравнения голономных (геометрических) связей отражают положение колеса и угол установки его относительно корпуса машины. Уравнений неголономных (кинематических) связей описывают тип трансмиссии и режим движения колеса (ведущее, ведомое, тормозное). В статье даны примеры уравнений неголономных связей для различных видов трансмиссий. Описание каждого колеса индивидуально, с учетом его размеров контакта и нормальной нагрузки, в результате позволяет получить развиваемое им тяговое усилие и величину буксования. Для наглядности реализации предложенной методики в статье приведен пример составления математической модели для колесного малогабаритного трактора «Уралец» производства Челябинского тракторного завода с нетрадиционной схемой управления поворотом. Данная модель проверена экспериментально, что подтверждает применимость предложенного подхода.

Ключевые слова: стационарный поворот транспортного средства, модель криволинейного движения, уравнения движения, контакт движителя с грунтом, голономные и неголономные связи.

Введение

В настоящий момент особую актуальность приобрели автоматизированные системы управления различных транспортных средств [1, 2]. Однако разработка алгоритма управления напрямую зависит от адекватности самой модели движения машины [3]. Наибольший интерес вызывает криволинейное движение транспортного средства, где решаются задачи входа и выхода из поворота [4], вопросы маневрирования [5, 6], оценивается устойчивость от опрокидывания [7] или заноса [8], обеспечивается безопасность движения [9] и другие.

Сегодня существует множество различных моделей поворота колесных машин [10, 11]. В зависимости от типа решаемой задачи в них принимаются те или иные упрощения. При этом используются совершенно разные подходы к построению математической модели поворота.

Например, для описания криволинейного движения автомобиля по твердой асфальтовой дороге используют модель на основе теории бокового увода, где оправдано пренебрежение буксованием колес относительно грунта [12, 13]. А вот для тракторных агрегатов и других тяговых машин буксование является неотъемлемой частью их движения [14]. Для машин с бортовым поворотом, движение которых характеризуется повышенным боковым скольжением колес, используются модели, где упрощены упругие свойства шины [15].

Однако в общем случае криволинейного движения транспортного средства оба явления всегда имеют место и в математической модели необходимо учитывать и скольжение колес по грун-

ту, и упругие свойства шины. Кроме того, при проектировании новых машин и рациональном выборе схемы управления требуется сравнительная оценка различных конструктивных схем по различным критериям (радиус поворота, потребная мощность, буксование колес, тяговые усилия и другие). В данной статье предложена общая методика составления модели стационарного поворота произвольного транспортного средства с произвольной схемой управления поворотом.

1. Методика составления математической модели

Математическая модель стационарного поворота представляет собой совокупность уравнений движения и уравнений связи, которые отражают схему управления трансмиссией и конструктивные параметры машины [16]. Набор уравнений собирается, как конструктор Lego. Изменение схемы управления производится путем замены одного уравнения связи на другое при сохранении всех остальных.

Любая модель поворота включает в себя уравнения движения. При решении плоской задачи (без учета вертикальных колебаний) число этих уравнений равно трем.

1.1. Уравнения движения

Первым этапом проектирования всегда является построение модели стационарного поворота, потому что она исключает воздействие со стороны водителя и позволяет оценить потенциальные возможности самого транспортного средства. Стационарный поворот характеризуется постоянным радиусом поворота ρ и модулем скорости V . Тогда уравнения движения представляют собой алгебраические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} ma_{nx} &= \Sigma F_x \\ ma_{ny} &= \Sigma F_y \\ 0 &= \Sigma M \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где m – масса транспортного средства; a_{nx} , a_{ny} – проекции нормального ускорения на продольную и поперечную оси машины; ΣF_x , ΣF_y , ΣM – сумма проекций всех сил на продольную и поперечную оси машины и моментов относительно центра масс.

В правую часть уравнений (1) входят реакции со стороны грунта. Именно допущения, принимаемые при их описании, и определяют впоследствии область применения всей модели движения [17].

1.2. Описание сил в контакте колеса с грунтом при повороте машины

Требования к описанию силового взаимодействия:

- учет буксования ведущих колес;
- учет бокового скольжения колес относительно грунта;
- учет формы и размеров контакта колеса с грунтом;
- учет разного давления колеса на грунт.

Для удовлетворения сформулированных выше требований необходимо индивидуальное описание контакта каждого колеса с грунтом. Описание силового взаимодействия было сделано на основе математической теории трения Ф.А. Опейко [18].

При повороте машины каждое колесо совершает мгновенно вращательное скольжение и в его контакте с грунтом возникают элементарные силы трения (сцепления), которые в случае приведения их к мгновенному центру скольжения C этого колеса (рис. 1) записываются в виде интегральных зависимостей [19]:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \iint_{\eta\xi} \varphi q \frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \\ P_y &= - \iint_{\eta\xi} \varphi q \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta, \\ M &= \iint_{\eta\xi} \varphi q \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где P_x , P_y , M – результирующие силовые факторы в контакте колеса с грунтом; q – нормальное давление в контакте колеса с грунтом; ξ , η – размеры контакта колеса с грунтом; x , y – координаты мгновенного центра скольжения колеса с грунтом; φ – коэффициент трения скольжения коле-

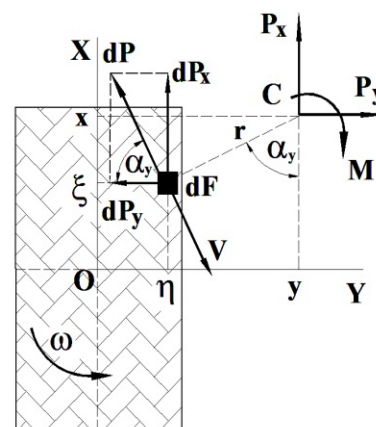


Рис. 1. Силы трения скольжения в контакте колеса с грунтом при его вращательном скольжении

Расчет и конструирование

са относительно грунта. При учете упругих свойств шины коэффициент φ является переменным в зависимости от величины скольжения [19, 20].

Анализ зависимостей $P_x(y)$ и $P_y(x)$ показал, что они имеют одинаковый качественный характер (рис. 2):

- при отсутствии смещения мгновенного центра скольжения относительно центра контакта ($x = 0$ и $y = 0$) составляющие силы трения равны нулю $P_x(0) = 0$ и $P_y(0) = 0$.
- при малых смещениях наблюдается практически линейная зависимость $P_x(y)$ и $P_y(x)$;
- при дальнейшем увеличении смещения значение силы трения в контакте стремится к своему предельному значению $\varphi q S$ (где S – площадь контакта).

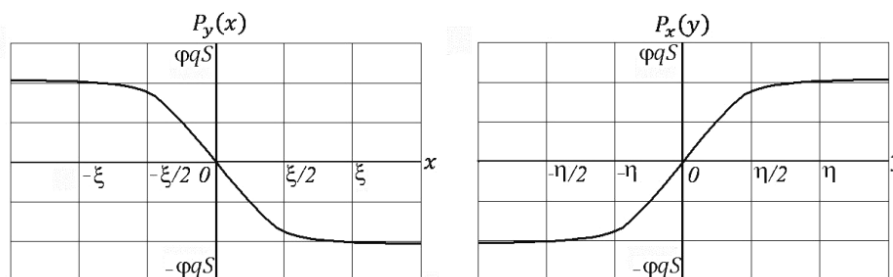


Рис. 2. Зависимости составляющих результирующей силы трения P_x, P_y от координат мгновенного центра скольжения x, y

Стабилизирующий момент M имеет одностороннюю зависимость от обеих координат мгновенного центра скольжения $M(x, y)$ (рис. 3). Он достигает своего максимального значения когда мгновенный центр скольжения находится в центре контакта ($x = 0$ и $y = 0$). В этом случае имеет место поворот колеса на месте.

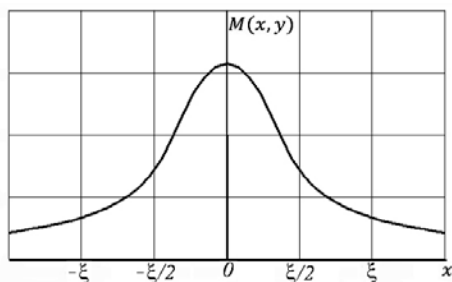


Рис. 3. Зависимость момента трения M от координат мгновенного центра скольжения x, y

Согласно формулам (2), силовые факторы P_x, P_y, M в контакте каждого колеса с грунтом представляют собой функции координат x, y соответствующего мгновенного центра скольжения. Это свело силовую задачу по определению сил в контакте к кинематике движения. Таким образом, получена возможность совместного решения силовой и кинематической задачи поворота, что свидетельствует об их взаимосвязи.

1.3. Кинематические зависимости на повороте машины

Рассмотрим подробнее кинематические соотношения при движении колеса на горизонтальной площадке. Колесо вращается вокруг оси y_1 , которая при криволинейном движении поворачивается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси z_2 , проходящей через центр поворота машины O_c (рис. 4). За счет скольжения действительная скорость V_{O_1} центра колеса отличается от теоретической по модулю и направлению. Свяжем местную систему координат xOy с опорной площадкой. Площадка контакта при повороте транспортного средства совершает мгновенно вращательное скольжение. Мгновенный центр скольжения C опорной площадки в общем случае имеет некоторое продольное x и поперечное y смещение относительно центра контакта O (рис. 5). Тогда полная скорость скольжения V_o центра контакта равна

$$V_o = \sqrt{V_{ck}^2 + V_{\delta}^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3)$$

где $V_{\delta} = \omega \cdot y$ – скорость буксования (продольная составляющая скорости скольжения); $V_{ck} = \omega \cdot x$ – скорость поперечного скольжения.

Для ведомого колеса буксование отсутствует $V_{\delta} = 0$, что соответствует отсутствию поперечного смещения мгновенного центра скольжения $y = 0$. Значит, мгновенный центр скольжения ведомого колеса лежит в плоскости вращения колеса и центр площадки контакта колеса имеет место только поперечное скольжение V_{ck} , зависящее от продольного смещения x мгновенного центра скольжения C .

Поскольку скорость скольжения мгновенного центра скольжения C равна нулю, то скорость точки корпуса, лежащая над мгновенным центром скольжения, обладает теоретической скоростью колеса и направлена вдоль плоскости его вращения. На основании этого нами сформулирована **теорема ортогональности** [12]: *при криволинейном движении транспортного средства мгновенный центр скольжения площадки контакта колеса с грунтом лежит на перпендикуляре, опущенном из центра поворота машины на плоскость его вращения.*

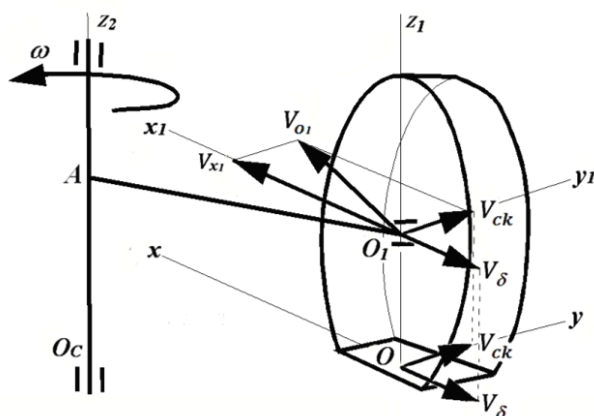


Рис. 4. Кинематика колеса при повороте машины

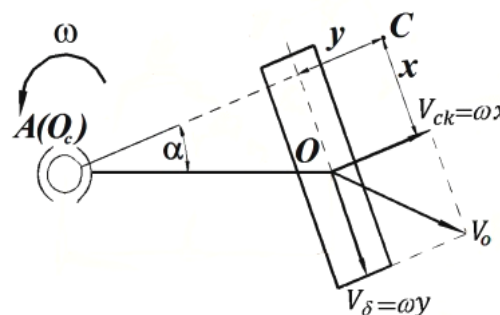


Рис. 5. Скорости скольжения пятна контакта колеса при повороте машины

1.3.1. Голономные геометрические связи

На основании теоремы ортогональности для каждого колеса были записаны уравнения геометрической связи

$$y_c \sin \alpha = x_c \cos \alpha, \quad (4)$$

где α – угол поворота колеса относительно корпуса машины; x_c, y_c – координаты мгновенного центра скольжения относительно центра поворота машины.

Число уравнений равно числу колес и характеризует наличие управляемых колес (угол поворота) и их взаимное расположение (задние, передние и т. д.).

1.3.2. Неголономные кинематические связи

Кроме геометрических связей, наложенных на перемещения (4), кинематика движения колеса характеризуется еще и связями, накладываемыми на скорости движения. Уравнения неголономных кинематических связей тоже выведены на основании теоремы ортогональности.

Поскольку точка корпуса машины, лежащая над мгновенным центром скольжения колеса C , равна его теоретической скорости V_t , то уравнение кинематических связей имеет вид

$$V_t = \omega \sqrt{x_c^2 + y_c^2}, \quad (5)$$

где ω – угловая скорость движения машины.

Однако часто уравнения кинематических связей удобнее выразить в виде силовых соотношений. Например:

1. Ведомое колесо характеризуется отсутствием тягового усилия (продольной составляющей силы трения скольжения), что соответствует отсутствию поперечного смещения мгновенного центра скольжения:

$$P_x = 0 \text{ или } y = 0. \quad (6)$$

2. Заторможенное колесо не имеет теоретической скорости и его мгновенный центр скольжения совпадает с центром поворота всей машины

$$\sqrt{x_c^2 + y_c^2} = 0. \quad (7)$$

3. Межколесный дифференциал обеспечивает равные крутящие моменты между ведущими i и j колесом, что при одинаковых радиусах колес соответствует равенству тяговых усилий

$$P_{xi} = P_{xj}. \quad (8)$$

4. Межосевой дифференциал обеспечивает раздачу крутящего момента между i и j осями с коэффициентом пропорциональности μ

$$P_{xi} = \mu P_{xj}. \quad (9)$$

5. Блокировка дифференциала между i и j колесом обеспечивает им выравнивание теоретических скоростей, что при одинаковой угловой скорости ω имеет вид

Расчет и конструирование

$$\sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2} = \sqrt{x_{cj}^2 + y_{cj}^2}. \quad (10)$$

6. Силовой поворот при заданном k соотношении теоретических скоростей между i и j бортом

$$\sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2} = k \sqrt{x_{cj}^2 + y_{cj}^2}. \quad (11)$$

7. Ведущие мотор-колеса с индивидуальным приводом описываются уравнением общего вида (5).

Таким образом, уравнения кинематических связей отражают режим движения колеса (ведущий, ведомый или тормозной) и схему управления поворотом.

1.4. Число уравнений и неизвестных

Для рассмотрения всей машины в целом были введены следующие системы координат (рис. 6):

- общая система координат всей машины, связанная с центром поворота всей машины,
- местные системы координат, связанные с центрами контакта каждого колеса.

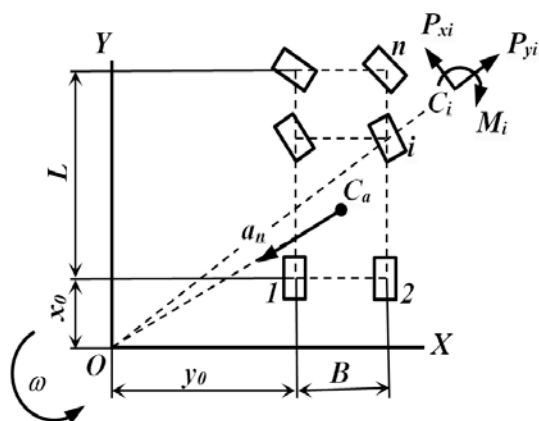


Рис. 6. Схема стационарного поворота произвольного транспортного средства

Для произвольного транспортного средства с n количеством колес число неизвестных равно $2n + 2$. В качестве неизвестных выступают:

x_i, y_i – координаты мгновенных центров скольжения i колеса ($i = 1 \dots n$) в местной системе координат;

x_0, y_0 – координаты центра поворота в общей системе машины.

Число уравнений равно числу неизвестных. Для произвольной машины модель состоит:

- из трех уравнений движения (1);
- n уравнений геометрических связей (4);
- n уравнений кинематических связей (5–11) в зависимости от схемы трансмиссии.

1.5. Результат математической модели

Результатом решения системы из $2n + 2$ алгебраических уравнений являются все силовые и кинематические параметры поворота транспортного средства:

- тяговое усилие P_{xi} на i ведущем колесе (2);
- боковая сдвигающая сила P_{yi} на каждом i колесе (2);
- стабилизирующий момент M_i на каждом i колесе (2);
- радиус поворота $\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$;

– буксование i ведущего колеса $\delta_i = x_i / \sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2}$;

– требуемая на поворот мощность $N = \sum P_{xi} \cdot \sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2}$.

2. Пример модели стационарного поворота

Для примера был взят колесный трактор «Уралец» производства Челябинского тракторного завода (рис. 7) с нетрадиционной схемой управления поворотом (рис. 8). Колесная формула трактора 4×2 с управляемой передней осью и ведущей задней. Особенность этого трактора такова, что на повороте у него только одно наружное заднее колесо является ведущим. При этом схема управления обеспечивает два режима движения: с отключением или торможением заднего внутреннего колеса.

На рис. 8 приведена модель стационарного поворота трактора «Уралец».



Рис. 7. Малогабаритный трактор «Уралец» производства Челябинского тракторного завода

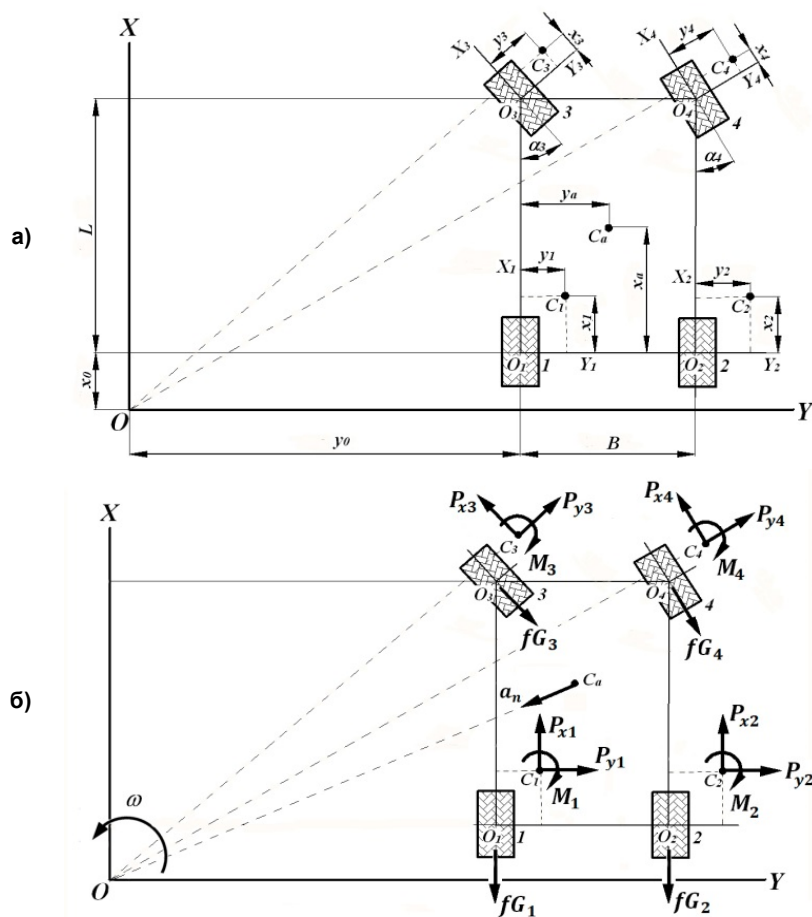


Рис. 8. Схема стационарного поворота малогабаритного трактора «Уралец»: а – геометрическая схема; б – схема сил

2.1. Три уравнения движения

В проекциях на поперечную ось трактор

$$m\omega(x_0 + x_a) = P_{y1} + P_{y2} + P_{y3}\cos\alpha_3 - (P_{x3} - fG_3)\sin\alpha_3 + P_{y4}\cos\alpha_4 - (P_{x4} - fG_4)\sin\alpha_4. \quad (12)$$

В проекциях на продольную ось трактор

$$m\omega(y_0 + y_a) = P_{x1} - fG_1 + P_{x2} - fG_2 + P_{y3}\sin\alpha_3 + (P_{x3} - fG_3)\cos\alpha_3 + P_{y4}\sin\alpha_4 + (P_{x4} - fG_4)\cos\alpha_4. \quad (13)$$

Уравнение моментов относительно центра поворота

$$0 = P_{x1}\sqrt{x_{c1}^2 + y_{c1}^2} - fG_1(\sqrt{x_{c1}^2 + y_{c1}^2} - x_1) - M_1 + P_{x2}\sqrt{x_{c2}^2 + y_{c2}^2} - fG_2(\sqrt{x_{c2}^2 + y_{c2}^2} - x_2) - M_2 + P_{x3}\sqrt{x_{c3}^2 + y_{c3}^2} - fG_3(\sqrt{x_{c3}^2 + y_{c3}^2} - x_3) - M_3 + P_{x4}\sqrt{x_{c4}^2 + y_{c4}^2} - fG_4(\sqrt{x_{c4}^2 + y_{c4}^2} - x_4) - M_4, \quad (14)$$

где используются обозначения (рис. 8): ω – угловая скорость движения трактора; α_3, α_4 – углы поворота передних колес; x_a, y_a – координаты центра тяжести Ca трактора; $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$ – неизвестные координаты мгновенных центров скольжения колес в местных системах координат; $P_{x1}, P_{y1}, M_1; P_{x2}, P_{y2}, M_2; P_{x3}, P_{y3}, M_3; P_{x4}, P_{y4}, M_4$ – силовые факторы, возникающие в контакте колес с грунтом (2), как функции координат мгновенных центров скольжения; fG_1, fG_2, fG_3, fG_4 – сопротивление качению колес по грунту; $x_{c1}, y_{c1}; x_{c2}, y_{c2}; x_{c3}, y_{c3}; x_{c4}, y_{c4}$ – координаты мгновенных центров скольжения в общей системе координат всей машины.

Преобразование координат:

$$x_{c1} = x_0 + x_1;$$

$$y_{c1} = y_0 + y_1;$$

$$x_{c2} = x_0 + x_2;$$

$$\begin{aligned}y_{c2} &= y_0 + B + y_2; \\x_{c3} &= x_0 + L + y_3 \sin \alpha_3 + x_3 \cos \alpha_3; \\y_{c3} &= y_0 + y_3 \cos \alpha_3 - x_3 \sin \alpha_3; \\x_{c4} &= x_0 + L + y_4 \sin \alpha_4 + x_4 \cos \alpha_4; \\y_{c4} &= y_0 + B + y_4 \cos \alpha_4 - x_4 \sin \alpha_4.\end{aligned}$$

2.2. Четыре уравнения геометрических связей

Уравнения (4) с учетом преобразования координат приобретают вид:

$$0 = x_0 + x_1 \quad (15)$$

$$0 = x_0 + x_2 \quad (16)$$

$$(y_0 + y_3 \cos \alpha_3 - x_3 \sin \alpha_3) \sin \alpha_3 = (x_0 + L + y_3 \sin \alpha_3 + x_3 \cos \alpha_3) \cos \alpha_3, \quad (17)$$

$$(y_0 + B + y_4 \cos \alpha_4 - x_4 \sin \alpha_4) \sin \alpha_4 = (x_0 + L + y_4 \sin \alpha_4 + x_4 \cos \alpha_4) \cos \alpha_4. \quad (18)$$

2.3. Четыре уравнения кинематических связей

Два уравнения для ведомых передних колес (6):

$$y_3 = 0; \quad (19)$$

$$y_4 = 0. \quad (20)$$

Одно уравнение (5), обусловленное заданной теоретической скоростью V_t ведущего колеса

$$V_t = \omega \sqrt{(y_0 + B + y_2)^2 + (x_0 + x_1)^2}. \quad (21)$$

Одно уравнение, характеризующее режим движения:

$$\text{– отключенное заднее внутреннее колесо (6) } y_2 = 0 \quad (22)$$

$$\text{– заторможенное заднее внутреннее колесо (7) } 0 = y_0 + B + y_2. \quad (23)$$

Таким образом, математическая модель состоит из десяти уравнений (12–21) и (22) или (23) и отражает два разных режима движения.

Данная модель была проверена экспериментально. Расхождение расчетных и экспериментальных значений не превысила 5 % по значениям радиусов поворота.

Заключение

Преимущество предложенного подхода заключается в общем подходе к построению математической модели стационарного поворота машин с различными схемами управления движением. Особенно актуально это для машин, имеющих два и более режимов движения. Например, отключение ведущего моста полноприводной машины или блокировка дифференциала. Появилась возможность оценить влияние изменения режима движения на различные параметры поворота.

В основу силового взаимодействия положена математическая теория трения, что позволяет учесть буксование и боковое скольжение колес и решать силовую задачу совместно с кинематической.

Модель включает в себя все основные конструктивные параметры (базу, колею, углы поворота колес и другие). Это позволяет оценить влияние каждого конструктивного параметра на характеристики криволинейного движения (буксование и боковое скольжение колес, радиус поворота, тяговые усилия и другие). В результате появилась возможность проводить оптимизацию транспортного средства уже на стадии схемного решения.

Литература

1. Kleine, S. *Modelling and Control of a Steer-By-Wire Vehicle* / S. Kleine, J. Niekerk // *Vehicle System Dynamics*. – 1998. – Vol. 29. – No. 1. – P. 114–142.
2. Félez, J. *Modelling of an Agricultural Vehicle with Self-Governing Guidance* / J. Félez, C. Vera // *Vehicle System Dynamics*. – 1990. – Vol. 19. – No. 6. – P. 365–383.
3. Zeid, A. *Modular Computer Model for the Design of Vehicle Dynamics Control Systems* / A. Zeid, D.A. Chang // *Vehicle System Dynamics*. – 1989. – Vol. 18. – No. 4. – P. 201–221.
4. Lee, Y.-B. *Curved-path and velocity control of an using fuzzy logic autonomous guided vehicle* / Y.-B. Lee, K.-D. Jang // *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*. – 1998. – Vol. 11. – No. 3. – P. 255–261.
5. Nalecz, A.G. *Development and Experimental Validation of Advanced Dynamic Vehicle Simulation (ADVS)* / A.G. Nalecz, Z. Lu, K.L. D'entremont // *Vehicle System Dynamics*. – 1994. – Vol. 23. – No. 1. – P. 390–410.
6. Beuzit, P. *The Response of a Vehicle to a Sudden Movement of the Steering Wheel* / P. Beuzit, P. Fontanet, J. Simon // *Vehicle System Dynamics*. – 1981. – Vol. 10. – No. 2–3. – P. 192–196.

7. Cho, Y. *Stability Analysis of the Human Controlled Vehicle Moving Along a Curved Path* / Y. Cho, J. Kim // *Vehicle System Dynamics*. – 1996. – Vol. 25. – No. 1. – P. 51–69.
8. Dahmani, H. *Vehicle dynamics and road curvature estimation for lane departure warning system using robust fuzzy observers: experimental validation* / H. Dahmani, M. Chadli, A. Rabhi, A.El. Hajjaji // *Vehicle System Dynamics*. – 2015. – Vol. 53. – No. 8. – P. 1135–1148.
9. Berntorp K., Olofsson B., Lundahl K., Nielsen L. *Models and methodology for optimal trajectory generation in safety-critical road-vehicle manoeuvres* / K. Berntorp, B. Olofsson, K. Lundahl, L. Nielsen // *Vehicle System Dynamics*. – 2014. – Vol. 52. – No. 10. – P. 1304–1332.
10. Kutluay, E. *Validation of vehicle dynamics simulation models – a review* / E. Kutluay, H. Winner // *Vehicle System Dynamics*. – 2014. – Vol. 52. – No. 2. – P. 186–200.
11. Трояновская, И.П. *Модели активного поворота колесных и гусеничных машин* / И.П. Трояновская // *Транспорт Урала*. – 2007. – № 4 (15). – С. 112–114.
12. Горелов, В.А. *Прогнозирование характеристик криволинейного движения автомобиля с колесной формулой бхб при различных законах управления поворотом колес задней оси* / В.А. Горелов, Г.О. Котиев // *Известия высших учебных заведений. Серия «Машиностроение»*. – 2008. – № 1. – С. 44–55.
13. Радионов, А.А. *Математическая модель движения автомобиля* / А.А. Радионов, А.Д. Чернышов // *Инновационный транспорт*. – 2015. – № 4 (18). – С. 69–73.
14. Pacejka HВ. *Spin: camber and turning* / HВ Pacejka // *Vehicle System Dynamics*. – 2005. – Vol. 43. – No. 1. – P. 3–17.
15. Gracia L., Tornero J. *Kinematic modeling of wheeled mobile robots with slip* / L. Gracia, J. Tornero // *Advanced Robotics*. – 2012. – Vol. 21. – No. 11. – P. 1253–1279.
16. Трояновская, И.П. *Модель поворота трактора с комбинированным или нетрадиционным двигателем* / И.П. Трояновская // *АПК России*. – 2013. – Т. 63. – С.82–86.
17. Prentkovskis, O. *Dynamics of a motor vehicle taking into consideration the interaction of wheels and road pavement surface* / O. Prentkovskis, M. Bogdevičius // *Transport*. – 2002. – Vol. 17. – No. 6. – P. 244–253.
18. Опейко, Ф.А. *Математическая теория трения* / Ф.А. Опейко. – Минск: Академия сельскохозяйственных наук БССР, 1971. – 149 с.
19. Трояновская, И.П. *Взаимодействие колесного движителя с грунтом на повороте с точки зрения механики* / И.П. Трояновская // *Тракторы и сельхозмашины*. – 2011. – № 3. – С. 29–35.
20. Piotrowski, J. *Kalker's algorithm Fastsim solves tangential contact problems with slip-dependent friction and friction anisotropy* / J. Piotrowski // *Vehicle System Dynamics*. – 2010. – No. 48 (7). – P. 869–889.

Титов Сергей Александрович, преподаватель, Тюменское высшее военно-инженерное командное училище, г. Тюмень; соискатель кафедры «Колесные и гусеничные машины»; Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, titov_sergeii@mail.ru.

Трояновская Ирина Павловна, доктор технических наук, Почетный машиностроитель РФ, профессор кафедры «Колесные и гусеничные машины», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; профессор кафедры «Прикладная механика», Южно-Уральский государственный аграрный университет, г. Троицк, triprav@ Rambler.ru.

Носков Никита Константинович, инженер, аспирант кафедры «Колесные и гусеничные машины», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, esso_07@mail.ru.

Поступила в редакцию 6 ноября 2017 г.

A GENERALIZED MODEL OF STATIONARY TURNING OF ANY VEHICLE

S.A. Titov^{1,2}, titov_sergeii@mail.ru,
I.P. Troyanovskaya^{1,3}, tripav@rambler.ru,
N.K. Noskov¹, ecco_07@mail.ru

¹South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,

²Tyumen Higher Military Engineering Command School, Tyumen, Russian Federation,

³South Ural State Agrarian University, Troitsk, Russian Federation

The article discusses a method of building a mathematical model of the curvilinear motion of an arbitrary vehicle. The proposed approach allows us to describe the turn of a vehicle with any transmission layout moving along any ground. We ignored vertical oscillations of the frame at this stage and confined our research to consideration of plane motion. Therefore, the motion equations are algebraic. The unknown ground reactions included therein are recorded based on the mathematical theory of friction. In this case, the pulling force, the lateral shearing force, and the stabilizing moment in wheel-to-ground contact are a function of unknown coordinates of the instantaneous slip center. This reduces the power problem to wheel movement kinematics and allows them to be solved simultaneously, considering their interconnection and interdependence. Then, the article considers the kinematics of wheel movement on the vehicle turn and derives the missing equations of holonomic and non-holonomic constraints placed on the unknown coordinates of the instantaneous slip centers. The equations of holonomic (geometric) constraints reflect the position of the wheel and its installation angle relative to the vehicle frame. The equations of non-holonomic (kinematic) constraints describe the type of transmission and the wheel movement mode (driving, driven, braking). The article gives examples of non-holonomic constraint equations for various types of transmissions. As a result, the description of each wheel individually, considering its contact size and normal load, allows us to receive the developed traction force and the value of slipping. To illustrate the implementation of the proposed methodology, the article presents an example of building a mathematical model for the Uralets compact wheeled tractor manufactured by Chelyabinsk Tractor Plant with an unconventional turn control scheme. This model has been tested experimentally, which confirms the applicability of the offered approach.

Keywords: stationary turn of a vehicle, turn model, constraint equations, force interaction, holonomic and non-holonomic constraints.

References

1. Kleine S, Niekerk J. [Modelling and Control of a Steer-By-Wire Vehicle]. *Vehicle System Dynamics*, 1998, vol. 29, no. 1, pp. 114–142. DOI: [org/10.1080/00423119808969556](https://doi.org/10.1080/00423119808969556)
2. Félez J., Vera C. [Modelling of an Agricultural Vehicle with Self-Governing Guidance]. *Vehicle System Dynamics*, 1990, vol. 19, no. 6, pp. 365–383. DOI: [org/10.1080/00423119008968953](https://doi.org/10.1080/00423119008968953)
3. Zeid A., Chang D.A. [Modular Computer Model for the Design of Vehicle Dynamics Control Systems]. *Vehicle System Dynamics*, 1989, vol. 18, no. 4, pp. 201–221. DOI: [org/10.1080/00423118908968919](https://doi.org/10.1080/00423118908968919)
4. Lee Y.-B., Jang K.-D. [Curved-Path and Velocity Control of an Using Fuzzy Logic Autonomous Guided Vehicle]. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 1998, vol. 11, no. 3, pp. 255–261. DOI: [org/10.1080/095119298130787](https://doi.org/10.1080/095119298130787)
5. Nalecz A.G., Lu Z., D'entremont K.L. [Development and Experimental Validation of Advanced Dynamic Vehicle Simulation (ADVS)]. *Vehicle System Dynamics*, 1994, vol. 23, no. 1, pp. 390–410. DOI: [org/10.1080/00423119308969529](https://doi.org/10.1080/00423119308969529)
6. Beuzit P., Fontanet P., Simon J. [The Response of a Vehicle to a Sudden Movement of the Steering Wheel]. *Vehicle System Dynamics*, 1981, vol. 10, no. 2–3, pp. 192–196. DOI: [org/10.1080/00423118108968669](https://doi.org/10.1080/00423118108968669)

7. Cho Y, Kim J. [Stability Analysis of the Human Controlled Vehicle Moving Along a Curved Path]. *Vehicle System Dynamics*, 1996, vol. 25, no. 1, pp. 51–69. DOI: org/10.1080/00423119608968957
8. Dahmani H., Chadli M., Rabhi A., Hajjaji A.El. [Vehicle Dynamics and Road Curvature Estimation for Lane Departure Warning System Using Robust Fuzzy Observers: Experimental Validation]. *Vehicle System Dynamics*, 2015, vol. 53, no. 8, pp. 1135–1148. DOI: org/10.1080/00423114.2015.1026609
9. Berntorp K., Olofsson B., Lundahl K., Nielsen L. [Models and Methodology for Optimal Trajectory Generation in Safety-Critical Road-Vehicle Manoeuvres]. *Vehicle System Dynamics*, 2014, vol. 52, no. 10, pp. 1304–1332. DOI: org/10.1080/00423114.2014.939094
10. Kutluay E., Winner H. [Validation of Vehicle Dynamics Simulation Models – a Review]. *Vehicle System Dynamics*, 2014, vol. 52, no. 2, pp. 186–200. DOI: org/10.1080/00423114.2013.868500
11. Troyanovskaya I.P. [Models of Active Turning of Wheel and Caterpillar Vehicles]. *Transport of the Urals*, 2007, no. 4 (15), pp. 112–114. (in Russ.)
12. Gorelov V.A., Kotiev G.O. [Forecasting the Characteristics of Non-Linear Vehicular Movement with a 6×6 Wheel Arrangement given Different Laws of Real Axle Wheel Turn Control. University News]. *Series Mechanical Engineering*, 2008, no. 1, pp. 44–55. (in Russ.)
13. Radionov A.A., Chernyshev A.D. [Mathematical Model of Vehicle Motion]. *Innovative Transport*, 2015, no. 18 (4), pp. 69–73. DOI: 10.20291/2311-164X-2015-4-69-73. (in Russ.)
14. Pacejka H.B. [Spin: Camber and Turning]. *Vehicle System Dynamics*, 2005, vol. 43, no. 1, pp. 3–17. DOI: org/10.1080/00423110500140013
15. Gracia L., Tornero J. [Kinematic Modeling of Wheeled Mobile Robots with Slip]. *Advanced Robotics*, 2012, vol. 21, no. 11, pp. 1253–1279. DOI: doi.org/10.1163/156855307781503763
16. Troyanovskaya I.P. [Tractor Turn Model with a Combined and Non-Traditional Propulsor]. *Agro-Industrial Complex of Russia*, 2013, no. 63. pp. 82–86. (in Russ.)
17. Prentkovskis O., Bogdevičius M. [Dynamics of a Motor Vehicle Taking into Consideration the Interaction of Wheels and Road Pavement Surface]. *Transport*, 2002, vol. 17, no. 6, pp. 244–253. DOI: org/10.1080/16483840.2002.10414052
18. Opeiko F.A. *Matematicheskaya teoriya treniya* [Mathematical Theory of Friction]. Minsk: Academy of Agricultural Sciences of the BSSR, 1971. 149 p.
19. Troyanovskaya I.P. [Interaction of a Wheel Propeller with the Ground on Turn from the Point of View of Mechanics]. *Tractors and Agricultural Vehicles*, 2011, no. 3, pp. 29–35. (in Russ.)
20. Piotrowski J. [Kalker's Algorithm Fastsim Solves Tangential Contact Problems with Slip-Dependent Friction and Friction Anisotropy]. *Vehicle System Dynamics*, 2010, no. 48 (7), pp. 869–889. DOI: 10.1080/00423110903178495

Received 6 November 2017

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Титов, С.А. Обобщенная модель стационарного поворота произвольного транспортного средства / С.А. Титов, И.П. Трояновская, Н.К. Носков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 38–47. DOI: 10.14529/engin170404

FOR CITATION

Titov S.A., Troyanovskaya I.P., Noskov N.K. A Generalized Model of Stationary Turning of Any Vehicle. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mechanical Engineering Industry*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 38–47. (in Russ.) DOI: 10.14529/engin170404