

## ФИЗИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ УПЛОТНЯЕМОЙ УПРУГОВЯЗКОЙ СРЕДЫ

**Б.А. Чаплыгин**, chaplyginba@susu.ru

**В.В. Широков**, shirokovvv@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1663-9362>

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

**Аннотация.** Опытная информация о реологических свойствах материалов, используемых при изготовлении абразивной смеси для последующей технологии изготовления заготовок кругов методами прокатки, прессования и вырубки, позволила классифицировать смесь как гетерогенную уплотняемую упруговязкую, характеризующуюся деформационным и скоростным упрочнением, значительной долей упругой деформации, явлениями упругого последействия и релаксации. Это в свою очередь позволило подойти к выводу определяющего физического уравнения. Вывод определяющего физического уравнения во всей полноте входящих в него параметров представляет непростую задачу. Вместе с тем создание точной теории физических уравнений является одной из главных проблем. Существуют различные подходы к конструированию определяющих физических уравнений. Некоторые из них претендуют на глубокое изучение сути явлений, приводят к достаточно сложным определяющим физическим уравнениям и трудны для использования в прикладных задачах. В статье предложен вариант конструирования определяющего физического уравнения, в основе которого лежат пластометрические кривые, аппроксимация их полиномами, пошаговая процедура обработки опытных данных, выбор механического аналога и вывод физического уравнения в дифференциальном виде для малого времени интервала, определение констант физического уравнения методом наименьших квадратов и в итоге – получение зависимости модуля упругости и коэффициента вязкости от условий деформации. Наличие определяющего физического уравнения позволяет перейти к решению прикладных задач.

**Ключевые слова:** упруговязкая среда, математическая модель, реологические свойства

**Для цитирования:** Чаплыгин Б.А., Широков В.В. Физическое уравнение уплотняемой упруговязкой среды // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». 2022. Т. 22, № 2. С. 86–92. DOI: 10.14529/met220209

Original article  
DOI: 10.14529/met220209

## PHYSICAL EQUATION OF COMPACTED ELASTIC-VISCOUS MEDIUM

**Chaplygin B.A.**, chaplyginba@susu.ru

**V.V. Shirokov**, shirokovvv@susu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1663-9362>

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

**Abstract.** Experienced information about the rheological properties of materials used in the manufacture of abrasive mixtures for the subsequent technology of manufacturing wheel blanks by rolling, pressing and punching made it possible to classify it as a heterogeneous compacted elastoviscous, characterized by deformation and rate hardening, a significant proportion of elastic deformation, elastic aftereffect and relaxation phenomena. This, in turn, made it possible to approach the derivation of the defining physical equation. The conclusion that defines the physical equation in the entirety of the parameters included in it is a difficult task. At the same time, the creation of an exact theory of physical equations is one of the main problems. There are various approaches to the construction of defining physical equations. Some of them claim to be a deep study of the essence of phenomena, lead to rather complex constitutive physical equations, and are difficult to use in applied problems. The article proposes a variant of constructing the defining physical equation, which is based on plastometric curves, their approximation by polynomials, a step-by-step procedure for processing experimental data, the choice of a mechanical analogue and the derivation of a physical equation in a differential form for a small time interval, the determination of the constants

of a physical equation by the least squares method, and as a result, obtaining the dependence of the modulus of elasticity and the coefficient of viscosity on the deformation conditions. The presence of a defining physical equation makes it possible to proceed to the solution of applied problems.

**Keywords:** elastic-viscous medium, mathematical model, rheological properties

**For citation:** Chaplygin B.A., Shirokov V.V. Physical equation of compacted elastic-viscous medium. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Metallurgy.* 2022;22(2): 86–92. (In Russ.) DOI: 10.14529/met220209

Определение реологических свойств различных смесей широко применяется в теории и практике различных наук и технологий, например, теории грунтов [1], технологии бетонов, композиционных материалов, в литейном производстве [2, 3]. Изучение реологических свойств позволяет получить физически обоснованные оценки упругих, вязких и пластических свойств абразивных смесей, математически моделировать их поведение при различных условиях нагружения и деформации.

Опытная информация о реологических свойствах материалов, используемых при изготовлении абразивной смеси для последующей технологии изготовления заготовок кругов методами прокатки, прессования и вырубки, позволила классифицировать смесь как гетерогенную уплотняемую упруговязкую, характеризующуюся деформационным и скоростным упрочнением, значительной долей упругой деформации, явлениями упругого последействия и релаксации [4]. Это в свою очередь позволило подойти к выводу определяющего физического уравнения.

Вывод определяющего физического уравнения во всей полноте входящих в него параметров представляет непростую задачу. Вместе

с тем создание точной теории физических уравнений является одной из главных проблем. Существуют различные подходы к конструированию определяющих физических уравнений. Некоторые из них претендуют на глубокое изучение сути явлений, приводят к достаточно сложным определяющим физическим уравнениям и трудны для использования в прикладных задачах.

В основе предлагаемого варианта вывода определяющего физического уравнения лежат пластометрические кривые.

На рис. 1 показана типовая осциллограмма по результатам испытания цилиндрических образцов на кулачковом пластометре. В качественном отношении характер кривых (см. рис. 1) практически не изменяется в зависимости от марки материала и условий деформации.

Покажем основные этапы обработки опытной информации с целью получения определяющего физического уравнения.

1. Пластометрические кривые (см. рис. 1) аппроксимируются полиномами, например, кубическими сплайнами [5]:

$$\sigma_u(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \alpha_3\tau^3, \tag{1}$$

$$\varepsilon_u(\tau) = \beta_0 + \beta_1\tau + \beta_2\tau^2 + \beta_3\tau^3. \tag{2}$$

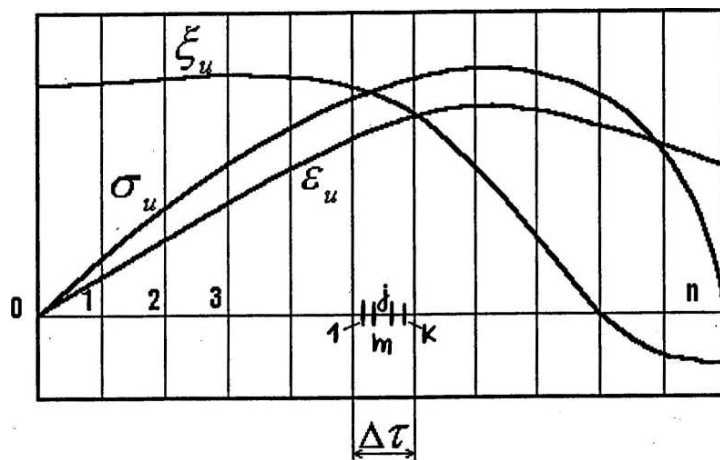


Рис. 1. Типовая осциллограмма по результатам испытания образцов на кулачковом пластометре  
Fig. 1. Typical oscillogram based on the results of testing samples on a cam plastometer

В данном случае:

$$\sigma_u(\tau) = \alpha_1 + 2\alpha_2\tau + 3\alpha_3\tau^2, \quad (3)$$

$$\varepsilon_u(\tau) = \beta_1 + 2\beta_2\tau + 3\beta_3\tau^2. \quad (4)$$

2. Полный временной интервал ( $t$ ) испытания образца разбивается на малые подинтервалы  $\Delta\tau$ , в пределах которых для моделирования реологического поведения среды выбирается механический аналог. В дальнейшем процедура вывода физического уравнения иллюстрируется на примере четырехзвенного механического аналога (рис. 2), достаточно полно отражающего особенности изучаемой среды [6–9]. Наличие в модели элемента  $E_2$  позволяет учесть поведение среды при мгновенной загрузке и разгрузке, т. е. мгновенную упругую деформацию, а параллельное соединение  $E_1$  и  $\mu_1$  – долговременную упругую деформацию, объясняющую ползучесть и релаксацию. Элемент  $\mu_2$  обеспечивает возможность остаточной деформации при любых значениях напряжений [10].

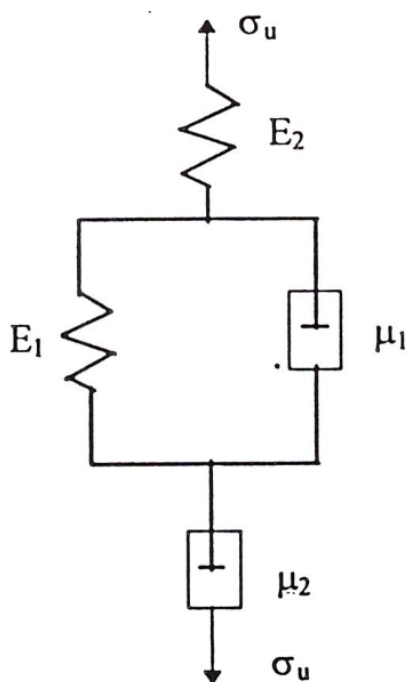


Рис. 2. Четырехзвенный механический аналог  
Fig. 2. Four-link mechanical analogue

В пределах малого временного интервала параметры  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  (см. рис. 2) полагаются постоянными. При переходе от одного интервала к другому названные параметры изменяются. Закон изменения предстоит определить. В случае положительного результата и при неограниченном увеличении числа

временных подинтервалов ( $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\tau \rightarrow 0$ ) поведение среды может быть описано непрерывным спектром распределения параметров  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  [9].

3. При условии  $E_i = \text{const}$  и  $\mu_i = \text{const}$ , т. е. для малого временного интервала, из совместного решения условия равновесия и неразрывности несложно получить определяющее физическое уравнение в дифференциальном виде. В случае четырехзвенного механического аналога таким уравнением будет

$$\mu_1 \frac{d^2 \varepsilon_u}{dt^2} + E_1 \frac{d\varepsilon_u}{dt} = \frac{\mu_1 d^2 \sigma_u}{E_2 d\tau^2} + \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{E_1}{E_2}\right) \frac{d\sigma_u}{d\tau} + \frac{E_1}{\mu_2} \sigma_u. \quad (5)$$

4. Для определения неизвестных параметров  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в пределах одного  $j$ -го интервала перепишем уравнение (5) следующим образом

$$\sigma_u(\tau) = a_1 \Phi_1(\tau) + a_2 \Phi_2(\tau) + a_3 \Phi_3(\tau) + a_4 \Phi_4(\tau), \quad (6)$$

где

$$\Phi_1(\tau) = \frac{d^2 \varepsilon_u(\tau)}{d\tau^2}, \quad \Phi_2(\tau) = \frac{d\varepsilon_u(\tau)}{d\tau}, \quad (7)$$

$$\Phi_3(\tau) = \frac{d^2 \sigma_u(\tau)}{d\tau^2}, \quad \Phi_4(\tau) = \frac{d\sigma_u(\tau)}{d\tau};$$

$$a_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{E_1}, \quad a_2 = \mu_2, \quad a_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{E_1 E_2}, \quad (8)$$

$$a_4 = -\left(\frac{\mu_2}{E_1} + \frac{\mu_1}{E_1} + \frac{\mu_2}{E_2}\right).$$

В (6) коэффициенты  $a_i$  подлежат определению, а функции  $\sigma_u(\tau)$  и  $\Phi_i(\tau)$  с учетом (1)–(4) определены из опыта. В этом случае искомые константы  $a_i$  могут быть найдены методом наименьших квадратов.

Для реализации метода наименьших квадратов рассматриваемый временной подинтервал в свою очередь необходимо разбить на  $K$  равных участков ( $k_{\min} = 3$ ). Тогда с учетом обозначений, принятых на рис. 1, получим

$$\tau_{jm} = \frac{t}{n}(j-1) + \frac{t}{nk}m, \quad (9)$$

где  $1 \leq j \leq n$ ,  $0 \leq m \leq k$ .

Процедура определения  $a_i$  выполняется для каждого временного подинтервала, т. е.

$n$  раз. В результате получаем массив дискретных значений параметров  $a_{ij}$ .

5. Найденный массив дискретных значений  $a_{ij}$  может быть аппроксимирован непрерывными зависимостями аргумента  $\tau$ , например, вида

$$a_i(\tau) = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + \dots \quad (10)$$

При этом каждому значению  $a_{ij}$  должно соответствовать усредненное в пределах подынтервала значение аргумента, т. е.

$$\tau_j = \frac{\tau_{j1} + \tau_{jk}}{2}. \quad (11)$$

6. Параметры  $a_{ij}$  в общем случае являются некоторыми функциями условий деформации, т. е.

$$a_{ij} = a_i(\varepsilon_u, \xi_u, \sigma, \theta \dots). \quad (12)$$

В связи с этим можно перейти от зависимости (6) к зависимости (12). Учитывая, что каждому значению  $a_i(\tau)$  в пределах временного интервала могут быть поставлены в соответствие конкретные и контролируемые в опыте условия деформации, производится многомерная аппроксимация для получения зависимости интересующих параметров от условий деформации. Остановимся на этом вопросе подробнее. В качестве аргументов функций (12) по понятным причинам следует брать те, которые контролируются в опытах. Контроль в опытах  $\varepsilon_u, \xi_u$  очевиден. Контроль изменения температуры по ходу испытания весьма проблематичен, что требует повторения опытов при дискретном изменении температуры. Что касается гидростатического напряжения  $\sigma$ , то при одноосном однородном сжатии оно определяется расчетом

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{3} \sigma_u(\tau). \quad (13)$$

Целесообразность выяснения влияния  $\sigma$  на  $a_i$  состоит в том, что среднее напряжение известным образом связано с объемной деформацией и плотностью материала.

Аппроксимацию (12) можно осуществить обобщенной регрессией, представляющей линейную комбинацию некоторых функций. В частности,  $a_i(\tau)$  запишем следующим образом:

$$a_i(\tau) = \exp[\gamma_{i1}\varepsilon(\tau) + \gamma_{i2}\xi(\tau) + \gamma_{i3}\sigma(\tau)], \quad (14)$$

или

$$\ln a_i(\tau) = [\gamma_{i1}\varepsilon(\tau) + \gamma_{i2}\xi(\tau) + \gamma_{i3}\sigma(\tau)]. \quad (15)$$

Последнее уравнение представляет  $\ln a_i(\tau)$  линейной комбинацией известных из опыта функций  $\varepsilon(\tau)$ ,  $\xi(\tau)$  и  $\sigma(\tau)$ . Задача сводится к определению  $\gamma_{i1}$ ,  $\gamma_{i2}$  и  $\gamma_{i3}$ , наилучшим образом приближающих правую часть уравнения (14) к известной из опыта функции  $a_i(\tau)$ , и решается методом наименьших квадратов.

7. После нахождения зависимости (12) с учетом (8) делается переход к зависимостям  $E_1(\tau)$ ,  $E_2(\tau)$ ,  $\mu_1(\tau)$  и  $\mu_2(\tau)$ .

8. Дальнейшая задача сводится к интегрированию уравнения (5), которое можно представить следующим образом

$$\ddot{\sigma}_u + \rho(\tau)\dot{\sigma}_u + g(\tau)\sigma_u = R(\tau), \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho(\tau) &= \frac{E_2}{\mu_1} + \frac{E_2}{\mu_2} + \frac{E_1}{\mu_1}, \\ g(\tau) &= \frac{E_1 E_2}{\mu_1 \mu_2}, \\ R(\tau) &= E_2 \ddot{\varepsilon}_u + \frac{E_1 E_2}{\mu_1} \dot{\varepsilon}_u. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Дифференциальное уравнение (16) является линейным уравнением второго порядка с правой частью [11], общее решение которого ищется как сумма какого-либо частного его решения  $\sigma_u^*$  и общего решения  $\bar{\sigma}_u$ , соответствующего уравнения без правой части, т. е. уравнения

$$\ddot{\sigma}_u + \rho(\tau)\dot{\sigma}_u + g(\tau)\sigma_u = 0. \quad (18)$$

Общее решение (18) достаточно просто достигается при постоянных коэффициентах, т. е.  $\rho(\tau) = \rho = \text{const}$  и  $g(\tau) = g = \text{const}$ . Учитывая это и ориентируясь на пошаговое применение физического уравнения при решении краевых задач, интегрирование (18) выполним, полагая  $\rho(\tau)$  и  $g(\tau)$  постоянными в диапазоне малого изменения аргумента  $\tau$ . В этом случае общее решение (18) будет

$$\bar{\sigma}_u = e^{r\tau}. \quad (19)$$

Подстановкой (19) в (18) убеждаемся, что  $r$  должна удовлетворять характеристическому уравнению

$$r^2 + pr + g = 0, \quad (20)$$

из которого следует

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - g}. \quad (21)$$

Анализ показал, что  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - g > 0$ . В этом случае [11] имеется два линейно независимых решения:  $\bar{\sigma}_u = e^{r_1\tau}$  и  $\bar{\sigma}_u = e^{r_2\tau}$ , а общее решение (18) будет

$$\bar{\sigma}_u = C_1 e^{r_1\tau} + C_2 e^{r_2\tau}. \quad (22)$$

Для нахождения частного решения  $\sigma_u^*$  уравнения (16) необходимо выяснить вид  $R(\tau)$ , т. е. правой части (16). Имея в виду значение  $R(\tau)$  (17) и зависимость  $\varepsilon_u(\tau)$  (2), которой может быть представлен закон изменения интенсивности линейных деформаций во времени при прокатке, после соответствующих преобразований получим

$$R(\tau) = \lambda_1 + \lambda_2\tau + \lambda_3\tau^2, \quad (23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 2E_2\beta_2 + \frac{E_1E_2}{\mu_1}\beta_1, \\ \lambda_2 &= 6E_2\beta_3 + 2\frac{E_1E_2}{\mu_1}\beta_2, \\ \lambda_3 &= 3\frac{E_1E_2}{\mu_1}\beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

С учетом (24) частное решение  $\sigma_u^*$  уравнения (16) будет [11]

$$\sigma_u^* = C + B\tau + A\tau^2. \quad (25)$$

Коэффициенты  $C$ ,  $B$  и  $A$  находятся следующим образом. Запишем (16) с учетом (23) и (24). В результате получим

$$\begin{aligned} 2A + 2pA\tau + pB + gA\tau^2 + gB\tau + gC &= \\ = \lambda_1 + \lambda_2\tau + \lambda_3\tau^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях аргумента  $\tau$ , получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 2A + pB + gC, \\ \lambda_2 &= 2pA + gB, \\ \lambda_3 &= gA, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

из которой следует

$$\begin{aligned} A &= \frac{\lambda_3}{g}, \quad B = \frac{\lambda_2 - 2pA}{g}, \\ C &= \frac{\lambda_1 - 2A - pB}{g}. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом  $\sigma_u^*$  и  $\bar{\sigma}_u$  получим общее решение уравнения (16)

$$\sigma_u = C_1 e^{r_1\tau} + C_2 e^{r_2\tau} + A\tau^2 + B\tau + C, \quad (29)$$

где константы  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий конкретной краевой задачи.

Важно напомнить, что (29) может быть использовано для малых интервалов изменения  $\tau$ , т. е. при шаговой процедуре решения краевой задачи.

Уравнение (29) получено при заданной  $\varepsilon_u(\tau)$ , вид которой определяется коэффициентами  $\beta_i$  соответствующего полинома. Полагая в (29) деформацию постоянной, при этом  $C = A = B = R(\tau) = 0$ , получим уравнение, описывающее процесс релаксации.

Для определения констант  $C_1$  и  $C_2$  необходимо знать начальные условия для  $\sigma_u$  и производной  $\dot{\sigma}_u$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u|_{\tau=0} &= \sigma_{u0}, \\ \dot{\sigma}_u|_{\tau=0} &= \dot{\sigma}_{u0}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Из совместного решения системы уравнений получим

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{\sigma_{u0} - \dot{\sigma}_{u0} - Cr_1 + B}{r_1 - r_2}, \\ C_1 &= \sigma_{u0} - C_2 - C. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

При шаговой процедуре решения задачи удобно использовать локальную систему координат, когда на каждом шаге  $0 \leq \tau_j \leq \Delta\tau$ , где  $\Delta\tau = t/n$ . С учетом этого введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{uj|\tau=0} &= \sigma_{uj}^{(0)}, \quad \dot{\sigma}_{uj|\tau=0} = \dot{\sigma}_{uj}^{(0)}, \\ \sigma_{uj|\tau=\Delta\tau} &= \sigma_{uj}^{(\Delta\tau)}, \quad \dot{\sigma}_{uj|\tau=\Delta\tau} = \dot{\sigma}_{uj}^{(\Delta\tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Учитывая, что  $\sigma_{uj}^{(0)} = \sigma_{u(j-1)}^{(\Delta\tau)}$  и  $\dot{\sigma}_{uj}^{(0)} = \dot{\sigma}_{u(j-1)}^{(\Delta\tau)}$ , перепишем (31) для  $j$ -го шага:

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{\sigma_{u(j-1)}^{(\Delta\tau)} - \dot{\sigma}_{u(j-1)}^{(\Delta\tau)} - C_j r_{1j} + B_j}{r_{1j} - r_{2j}}, \\ C_{1j} &= \sigma_{u(j-1)}^{(\Delta\tau)} - C_{2j} - C_j. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

## Выводы

В статье предложен вариант конструирования определяющего физического уравнения на основе пластометрических кривых. Последовательно рассмотрены все этапы,

включая аппроксимацию кривых полиномами, пошаговую обработку опытных данных. Представлен механический аналог и получено физическое уравнение в дифференциальном виде для малого времени интервала. Таким образом, полученное физическое уравнение

может быть использовано для создания конечно-элементных моделей деформации уплотняемой упруговязкой среды, что, в свою очередь, позволяет адаптировать уже существующие программы конечно-элементного расчёта к решению прикладных задач.

### Список литературы

1. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высш. шк., 1978.
2. Микульчинский Т., Новак Д., Новицкий Ю. Реологические свойства формовочной смеси // Литейщик России. 2005. № 3. С. 14–16.
3. Авдокушин В.П., Сургучев Е.А., Самарай В.П. Прибор для определения реологических свойств формовочных смесей // Литейное производство. 2001. № 4. С. 33–34.
4. Чаплыгин Б.А., Шеркунов В.Г., Судаков Н.В. Разработка методики и оборудования для исследования реологических абразивных материалов на вулканической связке // Инновационные технологии в металлургии и машиностроении: сб. науч. тр. Екатеринбург, 2014. 673 с.
5. Вершинин В.В., Завьялов Ю.С., Павлов Н.Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск: Наука, 1988.
6. Чаплыгин Б.А. Создание прогрессивного производства вулканического инструмента на основе моделирования процессов обработки давлением, новых способов и устройств: дис. ... д-ра техн. наук: 05.16.05, 05.03.05. Магнитогорск, 1999.
7. Моделирование процесса испытания деформационных свойств формовочной смеси / А.П. Мельников, Д.М. Голуб, В.М. Карпенко, Е.В. Филипенко // Литье и металлургия. 2010. № 3 (57). С. 121–124.
8. Кобраль И.В. Компьютерное моделирование процессов динамического уплотнения химически реагирующих порошковых материалов Ti-C и Zr-B: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Томск, 2006.
9. Бриджмен П.В. Исследование больших пластических деформаций и разрыва. Влияние высокого гидростатического давления на механические свойства материалов: пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 444 с.
10. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
11. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1969. 872 с.

### References

1. Vyalov S.S. *Reologicheskiye osnovy mekhaniki gruntov* [Rheological foundations of soil mechanics]. Moscow: Vysshaya shkola; 1978. (In Russ.)
2. Mikul'chin'ski T., Novak D., Novitski Yu. [Rheological properties of the molding sand. *Foundrymen of Russia*. 2005;(3):14–16. (In Russ.)
3. Avdokushin V.P., Surguchev E.A., Samarai V.P. [A device for determining the rheological properties of molding sands]. *Foundry Production*. 2001;(4):33–34. (In Russ.)
4. Chaplygin B.A., Sherkunov V.G., Sudakov N.V. [Development of methods and equipment for the study of rheological abrasive materials on a volcanic bond]. In: *Innovative technologies in metallurgy and mechanical engineering. Sat. scientific proceedings*. Ekaterinburg; 2014. 673 p. (In Russ.)
5. Vershinin V.V., Zav'yalov Yu.S., Pavlov N.N. *Ekstremal'nyye svoystva splaynov i zadacha sglazhivaniya* [Extremal properties of splines and the smoothing problem]. Novosibirsk: Nauka; 1988. (In Russ.)
6. Chaplygin B.A. *Sozdaniye progressivnogo proizvodstva vulkanitovogo instrumenta na osnove modelirovaniya protsessov obrabotki davleniyem, novykh sposobov i ustroystv: dis. d-ra tekhn. nauk* [Creation of advanced production of vulcanite tools based on modeling of pressure treatment processes, new methods and devices. thesis doctor of technical sciences. Doct. sci. diss.]. Magnitogorsk; 1999. (In Russ.)
7. Melnikov A.P., Golub D.M., Karpenko V.M., Filipenko E.V. Modeling of process of the molding sand deformational characteristics testing. *Casting and Metallurgy*. 2010;3(57):121–124. (In Russ.)

8. Kobral' I.V. *Komp'yuternoye modelirovaniye protsessov dinamicheskogo uplotneniya khimicheski reagiruyushchikh poroshkovykh materialov Ti-C i Zr-B: dis. kand. fiz.-mat. nauk* [Computer simulation of processes of dynamic compaction of chemically reacting powder materials Ti-C and Zr-B. Cand. sci. diss.]. Tomsk, 2006. (In Russ.)

9. Bridgman P.W. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture: With Special Emphasis on the Effects of Hydrostatic Pressure*. McGraw-Hill, New York – Toronto – London; 1952.

10. Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microinhomogeneous media]. Moscow: Nauka; 1977. 400 p. (In Russ.)

11. Vygodskiy M.Ya. *Spravochnik po vysshey matematike* [Handbook of higher mathematics]. Moscow: Nauka; 1969. 872 p. (In Russ.)

***Информация об авторах***

**Чаплыгин Борис Александрович**, д-р техн. наук, проф., проф. кафедры процессов и машин обработки металлов давлением, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; chaplyginba@susu.ru.

**Широков Вячеслав Вячеславович**, канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доц. кафедры процессов и машин обработки металлов давлением, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; shirokovvv@susu.ru.

***Information about the authors***

**Boris A. Chaplygin**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Prof. of the Department of Processes and Machines for Forming Metals, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; chaplyginba@susu.ru.

**Vyacheslav V. Shirokov**, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Ass. Prof. of the Department of Processes and Machines for Metal Forming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; shirokovvv@susu.ru.

***Статья поступила в редакцию 11.02.2022***

***The article was submitted 11.02.2022***