

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЧАГА ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ХОЛОДНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПРОКАТКЕ БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОЛОС

В.С. Горбунова, *vika.salkova6039@gmail.com*

А.В. Выдрин, *vydrinav@susu.ru*

А.П. Пелленен, *pellenenap@susu.ru*

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

Аннотация. Исследование направлено на изучение несимметричной прокатки тонких биметаллических полос из разнородных сплавов с теоретической точки зрения. В данной статье представлена математическая модель процесса холодной несимметричной прокатки тонких полос из гетерогенных сплавов, построенная на основе энергостатического метода. Разработка настоящей модели является научной новизной работы. В свою очередь, главная цель разрабатываемой модели – обеспечивать корректное прогнозирование численного значения искривления биметаллических полос из труднодеформируемых сплавов на выходе из очага деформации. Вместе с тем модель позволяет рассчитывать усилие прокатки, действующее на каждый рабочий валок, и кинематические параметры процесса. Работоспособность модели проверена на примере расчетов прокатки биметаллической алюмотитановой полосы при трёх различных скоростных соотношениях. Результаты исследования показали, что математическая модель корректна и в перспективе может послужить основой для написания цифрового продукта, позволяющего прогнозировать кривизну тонких биметаллических полос, полученных несимметричной прокаткой.

Ключевые слова: несимметричная прокатка, очаг деформации, условие несжимаемости, условие постоянства секундных объемов, биметаллические полосы, труднодеформируемые сплавы

Благодарности. Исследования выполнены за счет гранта Виктора Христенко «Шаг в будущее» (договор пожертвования № 240425 от 25.04.2024).

Для цитирования: Горбунова В.С., Выдрин А.В., Пелленен А.П. Математическая модель очага деформации при холодной несимметричной прокатке биметаллических полос // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». 2025. Т. 25, № 4. С. 64–73. DOI: 10.14529/met250406

Original article
DOI: 10.14529/met250406

MATHEMATICAL MODEL OF THE DEFORMATION SITE DURING COLD ASYMMETRICAL ROLLING OF BIMETALLIC STRIPS

V.S. Gorbunova, *vika.salkova6039@gmail.com*

A.V. Vydrin, *vydrinav@susu.ru*

A.P. Pellenen, *pellenenap@susu.ru*

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

Abstract. The research is aimed at studying the asymmetric rolling of thin bimetallic strips from dissimilar alloys from a theoretical point of view. This article presents a mathematical model of the process of cold asymmetric rolling of thin strips of heterogeneous alloys, based on the energy-static method. The development of this model is a scientific novelty of the work. In turn, the main goal of the developed model is to ensure the correct prediction of the numerical value of the curvature of bimetallic strips from hard-to-form alloys at the outlet of the deformation site. At the same time, the model allows you to calculate the rolling force acting on each working roll and the kinematic parameters of the process. The model's operability was tested using the example of calculations of rolling a bimetallic aluminum-titanium strip at three different speed ratios. The results of the study showed that the mathematical model is correct and, in the future, can serve as the basis for writing a digital product that allows predicting the curvature of thin bimetallic strips obtained by asymmetric rolling.

Keywords: asymmetric rolling, deformation focus, incompressibility condition, constant second volume condition, bimetallic strips, thinnest strips, hardly deformable alloys

Acknowledgments. The research was carried out at the expense of Viktor Khristenko's "Step into the Future" grant (donation agreement No. 240425 dated 04/25/2024).

For citation: Gorbunova V.S., Vydrin A.V., Pellenen A.P. Mathematical model of the deformation site during cold asymmetrical rolling of bimetallic strips. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Metallurgy*. 2025;25(4):64–73. (In Russ.) DOI: 10.14529/met250406

Введение

В настоящее время потребительский интерес к композитной полосовой продукции, состоящей из разнородных материалов, постоянно возрастает [1]. Это связано с уникальностью свойств такой продукции, которые недостижимы при производстве полос из монометаллов. Однако процесс получения многослойной продукции существенно осложняется по сравнению с прокаткой монополос, что приводит к необходимости поиска новых, нестандартных технологических решений, в том числе и на основе математического моделирования.

К негативным последствиям процесса прокатки биметаллических полос можно отнести появление и непредсказуемость в настоящее время кривизны полосы на выходе из очага деформации [2]. Поскольку при прокатке биметаллических полос имеет место несимметрия свойств металлов по высоте очага деформации, из-за которой и появляется кривизна полосы, наиболее подходящим способом получения таких является несимметричная прокатка с противоположным влиянием несимметрии контактных условий [3].

Одним из вариантов такой несимметричной прокатки является прокатка с кинематической несимметрией контактных условий, получаемой за счет рассогласования окружных скоростей рабочих валков [4]. Следует отметить, что в настоящее время известно достаточно большое количество исследований, посвященных моделированию процессов прокатки с кинематической несимметрией контактных условий [5–7]. Однако работы, одновременно учитывающие несимметрию механических свойств прокатываемого металла и кинематических контактных условий, а также различие в усилиях, действующих на рабочие валки, практически отсутствуют.

Поэтому целью данного исследования является разработка математической модели несимметричной прокатки биметаллических полос, позволяющей прогнозировать в том

числе появление и характер кривизны полосы на выходе из валков.

1. Материалы и методы

Для достижения поставленной цели необходимо прежде всего описать границы, или геометрию, очага деформации [5]. При этом будем рассматривать прокатку композитного материала, состоящего из мягкого (алюминиевого) и твердого (титанового) слоев с более толстым мягким слоем. Мягкий слой контактирует с рабочим валком, имеющим меньшую скорость (ведомым), соответственно твердый слой контактирует с рабочим валком, имеющим большую скорость (ведущим). Схема рассматриваемого очага деформации приведена на рис. 1.

Рассматриваемыми геометрическими параметрами очага деформации при этом являются: уравнение, описывающее границу контакта твердого слоя биметалла с ведомым валком; уравнение, описывающее границу контакта мягкого слоя биметалла с ведущим валком; уравнение, описывающее границу контакта твердого и мягкого слоев по линии сплавления биметалла, и уравнения для определения вспомогательных геометрических параметров. В результате получено следующее:

1) уравнение для определения границы контакта твердого слоя биметалла с ведомым прокатным валком y_1 :

$$y_1 = \frac{h_0 - h_1}{2 \cdot l} \cdot x - \frac{h_1}{2};$$

2) уравнение для определения границы контакта твердого и мягкого слоев по линии сплавления внутри биметалла y_2 :

$$y_2 = \frac{h_{0M} - h_{1M}}{2 \cdot l} \cdot x + h_{1T} - \frac{h_1}{2};$$

3) уравнение для определения границы контакта мягкого слоя биметалла с ведущим прокатным валком y_3 :

$$y_3 = \frac{h_0 - h_1}{2 \cdot l} \cdot x + \frac{h_1}{2};$$

4) длина очага деформации:

$$l = \sqrt{R \cdot (h_0 - h_1)};$$

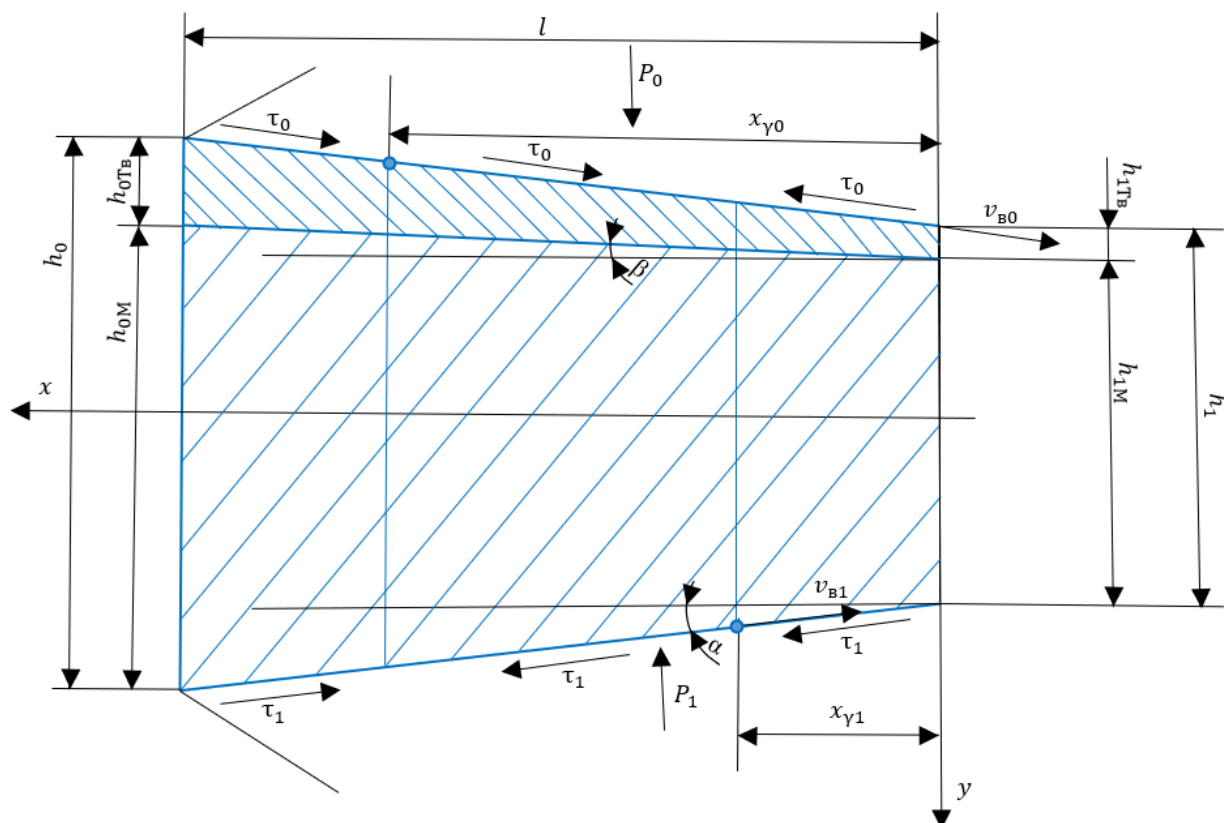


Рис. 1. Геометрический очаг деформации с указанием действующих на него сил
Fig. 1. Geometric deformation zone with the forces acting on it indicated

5) угол захвата со стороны прокатных валков:

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{h_0 - h_1}{R}}$$

6) угол на контактной границе твердого слоя с мягким:

$$\beta = \frac{0,5 \cdot (h_0 - h_1) - (h_{0ТВ} - h_{1Т})}{l}$$

Принятые обозначения соответствуют рис. 1.

С учетом полученных уравнений рассмотрим условия равновесия очага деформации согласно расчетной схеме, представленной на рис. 1.

При этом условие равновесия проекций действующих сил на направление Ox примет вид:

$$\begin{aligned} \sum X = & \tau_0 \frac{x_{\gamma 0}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot b + p_0 \frac{l}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot b - \tau_0 \cdot \frac{l - x_{\gamma 0}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot b + p_1 \frac{l}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot b + \\ & + \tau_1 \frac{x_{\gamma 1}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot b - \tau_1 \cdot \frac{l - x_{\gamma 1}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot b = f_0 p_0 x_{\gamma 0} b + p_0 l b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot b - f_0 \cdot p_0 \cdot (l - x_{\gamma 0}) \cdot b + \\ & + p_1 l b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot b + f_1 \cdot p_1 \cdot x_{\gamma 1} \cdot b - f_1 p_1 (l - x_{\gamma 1}) b = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем зависимость

$$p_1 = p_0 \cdot \frac{f_0 \cdot x_{\gamma 0} + l \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - f_0 \cdot (l - x_{\gamma 0})}{f_1 \cdot (l - x_{\gamma 1}) - l \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - f_1 \cdot x_{\gamma 1}} \quad (1)$$

Условие равновесия проекций действующих сил на направление Oy можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sum Y = & -\tau_0 \frac{x_{\gamma 0}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot b - \tau_0 \cdot \frac{l - x_{\gamma 0}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot b + p_0 \frac{l}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot b - \tau_1 \frac{l - x_{\gamma 1}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot b - \\ & - \tau_1 \cdot \frac{x_{\gamma 1}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot b - p_1 \frac{l}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot b = -f_0 \cdot p_0 \cdot x_{\gamma 0} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot b - f_0 \cdot p_0 \cdot (l - x_{\gamma 0}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot b + \\ & + p_0 \cdot l \cdot b - f_1 \cdot p_1 \cdot (l - x_{\gamma 1}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot b - f_1 \cdot p_1 \cdot x_{\gamma 1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot b - p_1 \cdot l \cdot b = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем зависимость

$$p_0 = p_1 \cdot \frac{f_1 \cdot (l - x_{\gamma 1}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + f_1 \cdot x_{\gamma 1} + l}{l - f_0 \cdot x_{\gamma 0} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - f_0 \cdot (l - x_{\gamma 0}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

Считается, что для условий холодной деформации закономерности трения предпочтительно описывать законом Амонтона – Кулона [8], тогда

$$\frac{f_1 \cdot (l - x_{\gamma 1}) - l \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - f_1 \cdot x_{\gamma 1}}{f_1 \cdot (l - x_{\gamma 1}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + f_1 \cdot x_{\gamma 1} + l} = \frac{f_0 \cdot x_{\gamma 0} + l \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - f_0 \cdot (l - x_{\gamma 0})}{l - f_0 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot x_{\gamma 0} - f_0 \cdot (l - x_{\gamma 0}) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad (3)$$

Полученное уравнение (3) является условием осуществления процесса несимметричной прокатки тонких полос из труднодеформируемых сплавов при отсутствии продольных усилий, приложенных к концам полосы.

Для дальнейшего исследования необходимо определить составляющие баланса мощностей, что невозможно без построения кинематически возможного поля скоростей. В настоящее время известны различные варианты построения полей скоростей для несимметричной прокатки [9]. Основополагающей схемой для построения актуального поля скоростей является схема, приведенная на рис. 2. При этом стоит отметить, что положение нейтральных углов заранее неизвестно и подлежит определению.

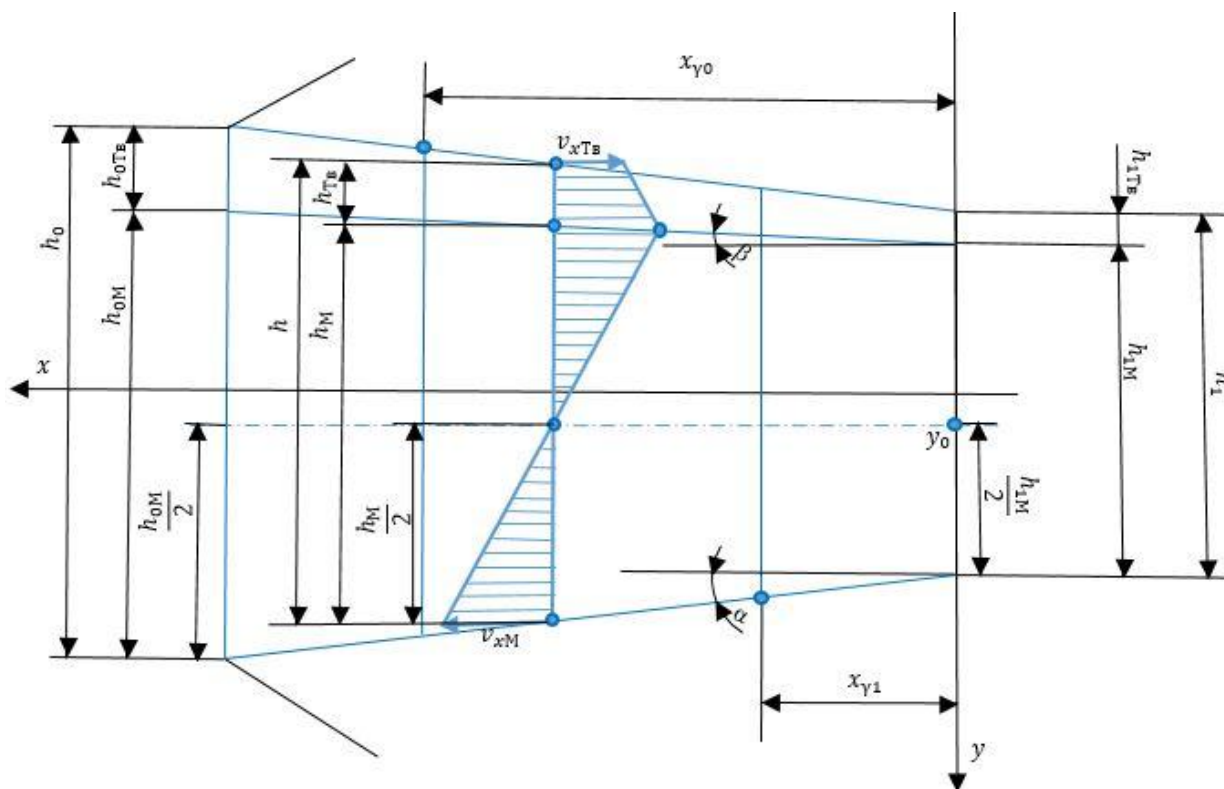


Рис. 2. Расчетная схема очага деформации
Fig. 2. Calculation scheme of the deformation zone

Поскольку при листовой прокатке поперечным течением металла можно пренебречь, условие несжимаемости примет вид $\frac{\partial U_x}{\partial x} = -\frac{\partial U_y}{\partial y}$.

В качестве кинематических граничных условий для рассматриваемого очага деформации (см. рис. 2), соответствующего процессу несимметричной прокатки биметаллических полос, примем следующее:

- 1) $U_{yM}|_{y=y_0} = 0$;
- 2) $U_{yM}|_{y=+h} = U_{xM} \cdot \operatorname{tg} \alpha$;
- 3) $U_{yT}|_{y=-h} = U_{xT} \cdot \operatorname{tg} \alpha$;

$$4) \frac{U_{yM}}{\cos\beta} = \frac{U_{yT}}{\cos\beta} \text{ или } U_{yM} = U_{yT};$$

$$5) U_{yM} = U_{xM} \cdot \operatorname{tg}\beta;$$

$$6) U_{yT} = U_{xT} \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Также кинематика очага деформации должна удовлетворять условию постоянства секундных объемов ($U_x \cdot S_x = \text{const}$), причем оно должно выполняться для каждого из слоев.

Определим продольную компоненту вектора скорости материальных частиц для мягкого слоя U_{xM} . Согласно условию постоянства секундных объемов получим

$$S_{xM} \cdot U_{xM} = S_{xM\gamma_1} \cdot U_{B1} \cdot \cos\alpha.$$

При этом, площадь произвольного поперечного сечения мягкого слоя S_{xM} будет равна

$$S_{xM} = b \cdot \left[\left(\frac{h_1}{2} + x \cdot \operatorname{tg}\alpha \right) + (h_1 + x \cdot \operatorname{tg}\beta) \right] = b \cdot \left(\frac{h_1}{2} + x \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{h_1}{2} - h_{1T} + x \cdot \operatorname{tg}\beta \right),$$

или

$$S_{xM} = b \cdot [h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x].$$

В результате путем подстановки получим, что вектор скорости для мягкого слоя U_{xM} равен

$$U_{xM} = \frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_1}}{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x} \cdot U_{B1} \cdot \cos\alpha. \quad (4)$$

Дальше определим вертикальную компоненту вектора скорости для мягкого слоя U_{yM} . Поскольку из условия несжимаемости следует $\xi_{xx} = -\xi_{yy}$ (ξ_{ij} компоненты тензора скоростей деформаций), вертикальная компонента вектора скорости U_{yM} может быть получена следующим образом:

$$U_{yM} = \int \xi_{yyM} dy = - \int \xi_{xxM} dx.$$

В свою очередь ξ_{xxM} равна

$$\xi_{xxM} = \frac{\partial U_{xM}}{\partial x} = - \frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_1}}{(h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x)^2} \cdot U_{B1} \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$U_{yM} = - \int \left(- \frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_1}}{(h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x)^2} \cdot U_{B1} \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \cos\alpha \right) dx,$$

или

$$U_{yM} = \frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_1}}{(h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x)^2} \cdot U_{B1} \cdot y \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \cos\alpha + C.$$

Константу интегрирования определим, опираясь на первое граничное условие ($U_{yM}|_{y=y_0} = 0$):

$$C = - \frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_1}}{(h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x)^2} \cdot U_{B1} \cdot y_0 \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \cos\alpha.$$

В результате, учитывая, что $y_0 = \frac{h_1 - h_{1T}}{2}$, получим для мягкого слоя:

$$U_{yM} = \frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_1}}{(h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x)^2} \cdot U_{B1} \cdot \left(y - \frac{h_1 - h_{1T}}{2} \right) \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \cos\alpha. \quad (5)$$

Аналогично построим поле скоростей для твердого слоя:

$$U_{xT} = \frac{h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_0}}{h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot x} \cdot U_{B0} \cdot \cos\alpha; \quad (6)$$

$$U_{yT} = \frac{h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_0}}{(h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot x)^2} \cdot U_{B0} \cdot \left(y - \frac{h_1 + 2 \cdot x \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2} \right) \cdot (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot \cos\alpha - \frac{h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma_0}}{h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) \cdot x} \cdot U_{B0} \cdot \sin\alpha. \quad (7)$$

Таким образом, построено кинематически возможное поле скоростей для процесса несимметричной прокатки биметаллических полос, которое описывается формулами (4)–(7).

Построенное кинематически возможное поле скоростей позволяет определить интенсивность скоростей деформаций сдвига \mathcal{H} для каждого из слоев биметалла, необходимую для расчета мощности формоизменения.

Для мягкого слоя интенсивность скоростей деформаций сдвига примет вид

$$\mathcal{H}_M = 2 \sqrt{\xi_{xxM}^2 + \xi_{xyM}^2} = 2 \sqrt{((U_{xM})'_x)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (U_{yM})'_x\right)^2}.$$

Для твердого слоя интенсивность скоростей деформаций сдвига примет вид

$$\mathcal{H}_T = 2 \sqrt{\xi_{xxT}^2 + \xi_{xyT}^2} = 2 \sqrt{((U_{xT})'_x)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (U_{yT})'_x\right)^2}.$$

Уравнение баланса мощности, описывающее процесс несимметричной прокатки биметаллических полос без приложения тянущих сил к концам полосы, содержит следующие составляющие:

- мощность формоизменения в очаге деформации N_Φ ;
- мощность сил трения на контакте с ведомым валком N_{τ_0} ;
- мощность сил трения на контакте с ведущим валком N_{τ_1} .

Как известно [10], мощность формоизменения в общем случае определяется выражением

$$N_\Phi = \int_V \tau_s \mathcal{H} dV.$$

С учетом полученных ранее выражений для послойных значений \mathcal{H} мощность формоизменения будет равна

$$N_\Phi = \int_{V_0} \tau_0 \mathcal{H}_T dV + \int_{V_1} \tau_1 \mathcal{H}_M dV,$$

или

$$N_\Phi = \int_0^l \int_{y_2}^{y_3} b \cdot \tau_0 \cdot 2 \sqrt{((U_{xT})'_x)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (U_{yT})'_x\right)^2} dy dx + \int_0^l \int_{y_2}^{y_1} b \cdot \tau_1 \cdot 2 \sqrt{((U_{xM})'_x)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot (U_{yM})'_x\right)^2} dy dx. \quad (8)$$

Интеграл по объему в этом выражении может быть вычислен с помощью численных методов, поскольку подынтегральное выражение является нетабличным.

Полезная мощность сил трения на контактной поверхности с ведомым валком вычисляется как мощность сил трения на скорости металла, то есть

$$N_{\tau_0} = \int_0^{x_{\gamma_0}} b \cdot \tau_0 \cdot (U_{B0} - U_{xT}) dx + \int_{x_{\gamma_0}}^l -b \cdot \tau_0 \cdot (U_{B0} - U_{xT}) dx,$$

или

$$N_{\tau_0} = b \cdot \tau_0 \cdot U_{B0} \cdot l - \frac{b \cdot \tau_0 \cdot U_{B0} \cdot \cos \alpha \cdot (h_{1T} + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cdot x_{\gamma_0})}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \cdot \ln \left| \frac{h_{1T} + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cdot l}{h_{1T}} \right|. \quad (9)$$

Аналогично для полезной мощности сил трения на контактной поверхности с ведущим валком можно записать

$$N_{\tau_1} = \int_0^{x_{\gamma_1}} -b \cdot \tau_1 \cdot (U_{B1} - U_{xM}) dx + \int_{x_{\gamma_1}}^l -b \cdot \tau_1 \cdot (U_{B1} - U_{xM}) dx,$$

или

$$N_{\tau_1} = -b \cdot \tau_1 \cdot U_{B1} \cdot \left(l - \frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \cdot x_{\gamma_1}}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \cdot \cos \alpha \cdot \ln \left(\frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \cdot l}{h_1 - h_{1T}} \right) \right). \quad (10)$$

Согласно уравнению баланса мощностей сумма выражений (8)–(10) должна быть равна нулю. Таким образом, если их просуммировать, получится уравнение, содержащее две неизвестные величины x_{γ_0} и x_{γ_1} .

Таким образом, приведенное поле скоростей построено с точностью до двух параметров x_{γ_0} и x_{γ_1} . Поскольку одно уравнение не позволяет определить две неизвестные, необходимо установить связь между x_{γ_0} и x_{γ_1} .

Поскольку одна из неизвестных относится к мягкому слою, а вторая – к твердому слою, для определения связи между ними, очевидно, необходимо использовать условия на линии сплавления. С этой целью рассмотрим закономерности изменения компонент вектора скорости в сечении, соответствующем координате нейтральной точки на контакте с ведомым валком (рис. 3).

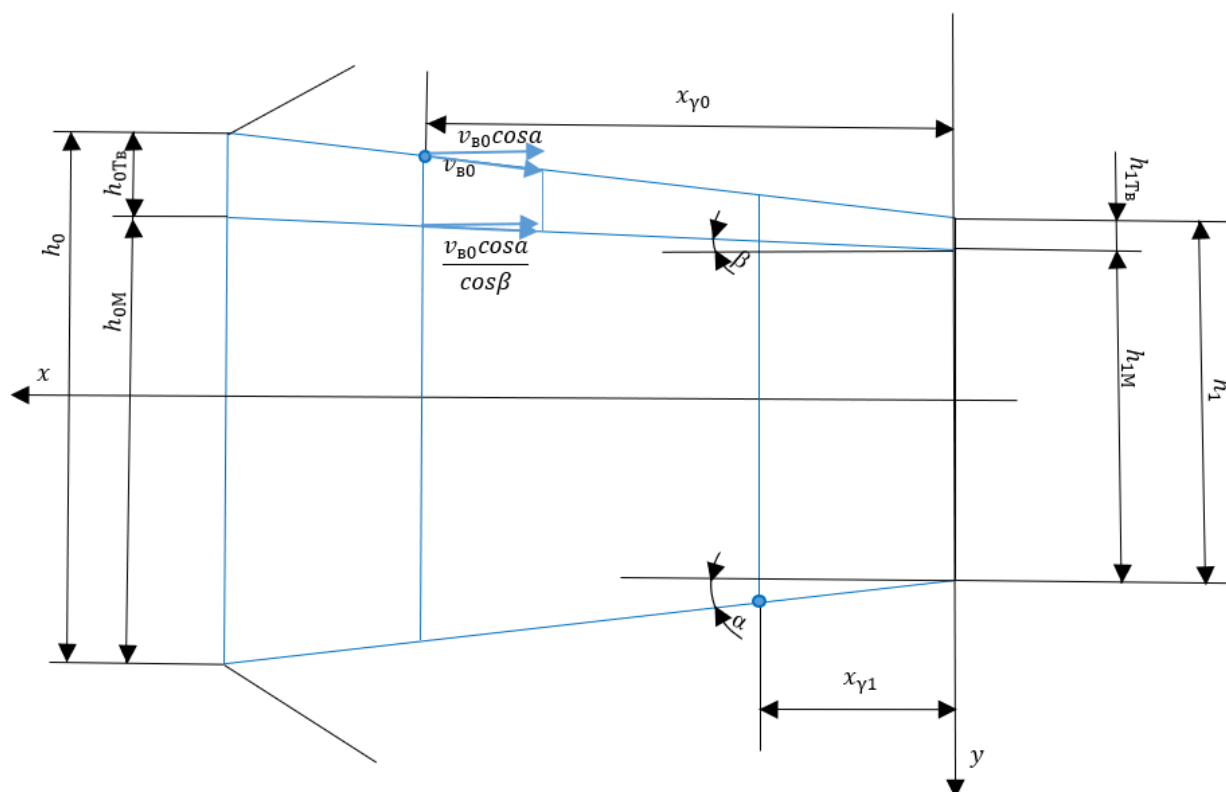


Рис. 3. Разложение вектора скорости
Fig. 3. Decomposition of the velocity vector

На линии сплавления имеет место разрыв поля скоростей. При этом, как известно, нормальная к поверхности разрыва составляющая вектора скорости разрыв иметь не может. Следовательно, вектор скорости на линии сплавления должен быть направлен по касательной к линии сплавления и величина этого вектора должна быть одинаковой как для мягкого, так и для жесткого слоя. Из этого следует, что

$$\frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma 1}}{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma 0}} \cdot U_{B1} \cdot \cos\alpha = U_{B0} \cos\alpha$$

или

$$x_{\gamma 1} = \frac{U_{B0}}{U_{B1}} \left[\frac{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot x_{\gamma 0}}{h_1 - h_{1T} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \right]. \quad (11)$$

Заключительным этапом в разработке данной математической модели является выведение расчетной формулы для определения численного значения кривизны полосы. Для этого воспользуемся рис. 4.

В таком случае определим длину каждого слоя полосы на выходе из очага деформации.

1. Для твердого слоя:

$$l_T = U_{1T} \cdot t = R_{Kp} \cdot \omega,$$

где $\omega = \frac{U_{1T} \cdot t}{R_{Kp}}$.

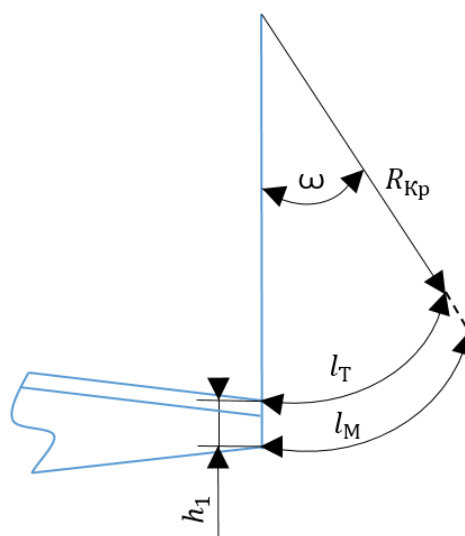


Рис. 4. Схема выхода полосы из труднодеформируемых сплавов из очага деформации
Fig. 4. Diagram of the exit of a strip of difficult-to-deform alloys from the deformation zone

Для мягкого слоя:

$$l_M = U_{1M} \cdot t = (R_{Kp} + h_1) \cdot \omega,$$

где $\omega = \frac{U_{1M} \cdot t}{R_{Kp} + h_1}$,

откуда получим, что радиус искривления полосы из труднодеформируемых сплавов можно определить следующим образом:

$$R_{кр} = \frac{U_{1Т} \cdot h_1}{U_{1М} - U_{1Т}},$$

где $U_{1Т} = U_{xТ}|_{x=0}$;

$$U_{1М} = U_{xМ}|_{x=0}.$$

По итогу, зная радиус искривления полосы на выходе из очага деформации и используя известную формулу для определения кривизны, можно получить численное значение кривизны полосы из труднодеформируемых сплавов:

$$Кр = \frac{1}{R_{кр}}. \quad (12)$$

В результате получаем математическую модель процесса несимметричной прокатки полос из труднодеформируемых сплавов, позволяющую прогнозировать появление кривизны биметаллических полос на выходе из очага деформации.

2. Численная реализация математической модели и анализ результатов

С целью оценки и проверки работоспособности полученной математической модели произведены расчеты для определения энергосиловых параметров и кривизны при несимметричной прокатке алюмотитановых полос. При выполнении расчетов использовались данные, приведенные в табл. 1, а полученные результаты расчетов представлены в табл. 2.

Для тех случаев, когда сумма мощностей не равна нулю, можно рассмотреть варианты более детального расчета. Например, учесть в уравнении баланса мощности среза в плоскости входа (13) и в плоскости выхода полосы (14):

Таблица 1

Исходные данные для расчетов полученной математической модели

Table 1

Initial data for calculations of the resulting mathematical model

Образец	Параметр										
	h_0 , мм	h_1 , мм	$h_{0М}$, мм	$h_{1М}$, мм	$h_{1Т}$, мм	b , мм	$U_{в1}$, м/с	$U_{в0}$, м/с	K_U	f_0	f_1
1	0,4	0,1	0,31	0,23	0,08	40,0	0,02	0,022	1,1	0,1	0,1
2	0,4	0,1	0,31	0,23	0,08	40,0	0,02	0,024	1,2	0,1	0,1
3	0,4	0,1	0,31	0,23	0,08	40,0	0,02	0,026	1,3	0,1	0,1

Таблица 2

Результаты расчетов по разработанной математической модели

Table 2

Results of calculations using the developed mathematical model

Расчетный параметр	Образец		
	1	2	3
Координата нейтрального сечения на контакте ведомого вала ($x_{\gamma 0}$), мм	0,82	0,96	1,02
Координата нейтрального сечения на контакте ведущего вала ($x_{\gamma 1}$), мм	0,75	0,60	0,45
Отношение координат нейтральных сечений ($\frac{x_{\gamma 0}}{x_{\gamma 1}}$)	1,09	1,60	2,26
Отношение координаты нейтрального сечения на контакте ведомого вала к длине очага деформации ($\frac{x_{\gamma 0}}{l}$)	0,29	0,34	0,36
Отношение координаты нейтрального сечения на контакте ведущего вала к длине очага деформации ($\frac{x_{\gamma 1}}{l}$)	0,26	0,21	0,16
Мощность формоизменения (N_{ϕ}), кВт	1,569	0,976	0,445
Полезная мощность сил трения на контактной поверхности с ведомым валком ($N_{\tau 0}$), кВт	0,810	0,837	0,913
Полезная мощность сил трения на контактной поверхности с ведущим валком ($N_{\tau 1}$), кВт	2,267	1,913	1,448
Сумма мощностей	0,11	0,10	0,09
Прогнозируемая кривизна полосы на выходе из очага деформации, мм	18,50	28,57	30,30

$$N_{c0} = \int_{S_0} \tau_s U_y dS = \int_{S_{0T}} \tau_{sT} U_y dS + \int_{S_{0M}} \tau_{sM} U_y dS; \quad (13)$$

$$N_{c1} = \int_{S_1} \tau_s U_y dS = \int_{S_{1T}} \tau_{sT} U_y dS + \int_{S_{1M}} \tau_{sM} U_y dS. \quad (14)$$

Заключение и выводы

Анализируя результаты математического моделирования, представленные в табл. 2, можно сформулировать некоторые выводы.

1. Для уменьшения кривизны полосы опережение на контакте ведомого валка с

твердым слоем должно быть больше, чем на контакте ведущего валка с мягким слоем.

2. Выбранный скоростной режим прокатки обеспечивает допустимые значения нейтральных углов, входящих в длину очага деформации по оси Ox .

3. С увеличением рассогласования окружных скоростей прокатных валков происходит уменьшение кривизны, что соответствует действительности.

Таким образом, можно сделать вывод, что математическая модель показала эффективную работоспособность в отношении тонких полос из труднодеформируемых сплавов.

Список литературы

1. Первухина О.Л., Денисов И.В. Двухслойные стали для ответственных металлоконструкций // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2020. № 11 (246). С. 46–52. DOI: 10.35211/1990-5297-2020-11-246-46-52
2. Моделирование процесса прокатки биметаллического листа Ti-Ni / М.В. Чукин, А.М. Песин, М.А. Полякова и др. // Обработка сплошных и слоистых материалов. 2014. № 2 (41). С. 10–13.
3. Кавалек А.А., Дыя Х.И., Солтысяк Л.Л. Энергосиловые параметры и значение кривизны полосы характерны для асимметричного процесса прокатки // Иновационные технологии в металлургии и машиностроении: материалы 6-й междунар. молодеж. науч.-практ. конф. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2013. С. 349–352.
4. Pustovoytov D., Pesin A., Tandon P. Asymmetric (Hot, Warm, Cold, Cryo) Rolling of Light Alloys: A Review // Metals. 2021. Vol. 11. P. 956. DOI: 10.3390/met11060956
5. Kawalek A. Wpływ asymetrycznego procesu walcowania na wyginanie się pasma podczas walcowania blach grubych // Hutnik-Wiadomości hutnicze. 2008. N. 6. S. 288–293.
6. Горбунов К.С., Носов Л.В., Мазур И.П. Исследование влияния несимметрии на энергосиловые параметры при холодной прокатке // Черные металлы. 2024. № 7. С. 52–55. DOI: 10.17580/chm.2024.07.08
7. Влияние несимметричной прокатки на алюминиевые сплавы 5XXX серии со скандием / М.А. Никитина, А.М. Песин, Л.В. Носков, Д.О. Пустовойтов // Цветные металлы. 2025. № 1. С. 54–59. DOI: 10.17580/tsm.2025.01.08
8. Выдрин А.В. Теория пластической деформации металлов и сплавов. Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2020. 218 с.
9. Грудев А.П. Теория прокатки: учеб. для вузов по спец. «Обраб. металлов давлением». М.: Металлургия, 1988. 239 с.
10. Мазур В.Л., Ноговицын А.В. Теория и технология тонколистовой прокатки (численный анализ и технические приложения). Днепропетровск: РВА «Дніпро-VAL», 2010. 500 с.

References

1. Pervukhina O.L., Denisova I.V. Two-layer steel for critical metal structures. *Izvestia Volgograd State Technical University*. 2020;11(246):46–52. (In Russ.) DOI: 10.35211/1990-5297-2020-11-246-46-52
2. Chukin M.V., Pesin A.M., Polyakova M.A., Pivovarova K.G., Torbus N., Rydz D. Simulation of Ti-Ni bimetal composition sheet rolling. *Processing of solid and laminate materials*. 2014;2(41):10–13. (In Russ.)
3. Kavalek A.A., Dyi H.I., Soltysyaka L.L. Energy and force parameters and values of band curvature during asymmetrical rolling of plates. In: *Innovative technologies in metallurgy and mechanical engineering: Proceedings of the 6th International Youth Scientific and Practical Conference*. Ekaterinburg: Ural University Publ., 2013. P. 349–352. (In Russ.)
4. Pustovoytov D., Pesin A., Tandon P. Asymmetric (Hot, Warm, Cold, Cryo) Rolling of Light Alloys: A Review. *Metals*. 2021;11:956. DOI: 10.3390/met11060956

5. Kawalek A. Wpływ asymetrycznego procesu walcowania na wyginanie się pasma podczas walcowania blach grubych. *Hutnik-Wiadomości hutnicze*. 2008;(6):288–293.

6. Gorbunov K.S., Nosov L.V., Mazur I.P. Investigation of the influence of asymmetry on the energy and power parameters during cold rolling. *Chernye metally*. 2024;(7):52–55. (In Russ.) DOI: 10.17580/chm.2024.07.08

7. Nikitina M.A., Pesin A.M., Noskov L.V., Pustovoitov D.O. Influence of asymmetric rolling on aluminum alloys 5XXX series with scandium. *Tsvetnye metally*. 2025;(1):54–59. (In Russ.) DOI: 10.17580/tsm.2025.01.08

8. Vydrin A.V. *Teoriya plasticheskoy deformatsii metallov i splavov* [Theory of plastic deformation of metals and alloys]. Chelyabinsk: South Ural St. Univ. Publ., 2020. 218 p. (In Russ.)

9. Grudev A.P. *Teoriya prokatki: ucheb. dlya vuzov po spets. "Obrab. metallov davleniem"* [Theory of rolling: Textbook for universities on specialty "Metal forming"]. Moscow: Metallurgiya, 1988. 239 p. (In Russ.)

10. Mazur V.L., Nogovitsyn A.V. *Teoriya i tekhnologiya tonkolistovoy prokatki (chislennyy analiz i tekhnicheskie prilozheniya)* [Theory and technology of thin sheet rolling (numerical analysis and technical applications)]. Dnepropetrovsk: RVA "Dnipro-VAL", 2010. 500 p. (In Russ.)

Информация об авторах

Горбунова Виктория Сергеевна, аспирант кафедры процессов и машин обработки металлов давлением, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; vika.salkova6039@gmail.com.

Выдрин Александр Владимирович, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой процессов и машин обработки металлов давлением, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; vydrinav@susu.ru.

Пелленен Анатолий Петрович, канд. техн. наук, доц. кафедры процессов и машин обработки металлов давлением, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; pellenenap@susu.ru.

Information about the authors

Victoria S. Gorbunova, Postgraduate Student of the Department of Processes and Machines for Metal Forming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; vika.salkova6039@gmail.com.

Alexander V. Vydrin, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of the Department of Processes and Machines for Metal Forming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; vydrinav@susu.ru.

Anatoly P. Pellenen, Cand. Sci. (Eng.), Ass. Prof. of the Department of Processes and Machines for Metal Forming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; pellenenap@susu.ru.

Статья поступила в редакцию 12.05.2025

The article was submitted 12.05.2025