

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КИНЕТИКИ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ ПРИ НАГРЕВЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ИЗ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО СПЛАВА

**А.Д. Дрозин**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск*

В случае если в теле при его нагреве или охлаждении происходит фазовый переход, процесс распространения в нем тепла претерпевает сильные изменения. В отличие от однокомпонентного металла, при охлаждении многокомпонентного сплава, при переходе через температуру ликвидус, энтальпия, плотность и коэффициент теплопроводности остаются непрерывными, но их производные и, в частности, теплоемкость терпит разрыв. При нагреве поверхности твердого цилиндрического тела из двухкомпонентного металлического сплава выше температуры ликвидус у поверхности возникает двухфазная зона, перемещающаяся к оси цилиндра. В работе предложен метод введения «эффективной» теплоемкости, позволяющая рассчитывать скорость движения этой зоны, а также температуру сплава в любой его точке и в любой момент времени. Использовалось обычное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами, которые, в данном случае, зависят от температуры. Жидкая, твердая и переходная зоны образца рассчитывались по одному и тому же уравнению, коэффициенты его рассчитывались по одному и тому же методу. Для каждой точки образца для каждой соответствующей температуры, рассчитывались доли жидкой и твердой фаз. В данной работе, для простоты, раствор считался совершенным. Удельный объем, коэффициент теплопроводности и удельная энтальпия рассчитывались как средневзвешенные от соответствующих величин для жидкого и твердого состояний. Удельная теплоемкость рассчитывалась как производная по температуре от энтальпии. Полученную систему дифференциальных уравнений сводили к конечно-разностным уравнениям. Для решения полученной системы разностных уравнений была разработана компьютерная программа. В статье приведены результаты одного из таких расчетов. Результаты работы могут быть интересны не только металлургам, но и метрологам при разработке теории самотестирующегося датчика температуры.

*Ключевые слова: теплопроводность; фазовый переход; сплав; модель.*

## **Введение**

Расчет скорости прогрева образца (детали при термообработке, кусков шихты в начальный период ее плавления) значительно осложняется наличием фазового перехода. На поверхности раздела фаз терпят разрыв все термические коэффициенты, выделяется теплота фазового перехода, граница раздела фаз движется. Однако положение еще более осложняется, если мы имеем дело не с однокомпонентным металлом, а со сплавом, состоящим из нескольких компонентов. В этом случае границей раздела твердой и жидкой фаз служит не поверхность, а двухфазный слой, в котором сосуществуют жидкость и твердые кристаллы [1–3].

При охлаждении двухкомпонентного жидкого сплава, например, с эвтектической диаграммой состояния, процесс перехода в твердое состояние происходит постепенно. По мере снижения температуры выделяется все больше кристаллов твердой фазы, состав (равновесный) и жидкой и твердой фаз непрерывно меняется, «подстраиваясь» под соответствующую температуру и, наконец, весь сплав становится твердым. При нагреве твердого сплава все происходит в обратном порядке.

Если в однокомпонентной системе при фазовом переходе энтальпия всей системы, как функция температуры, терпит разрыв из-за одномоментного выделения или поглощения теплоты кристаллизации всей системы, то здесь процесс выделения новой фазы идет постепенно и энтальпия всей системы является непрерывной функцией температуры. Однако производная этой энтальпии, эффективная теплоемкость всей системы, уже меняется скачком в начале и в конце такого процесса.

В данной работе приведен метод расчета кинетики прогрева первоначально твердого двухкомпонентного цилиндрического образца.

За базу было взято обычное уравнение теплопроводности [4–6]

$$\rho^{(\Phi)} c_p^{(\Phi)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda^{(\Phi)} r \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

в котором теплоемкость  $c_p^{(\Phi)}$  рассчитывалась как производная по температуре от энтальпии всей сложной системы, плотность  $\rho^{(\Phi)}$  и коэффициент теплопроводность  $\lambda^{(\Phi)}$  рассчитывались как средне взвешенные величины от соответствующих значений жидких и твердых составляющих сплава при данной температуре.

Для этого вначале рассчитаем необходимые термодинамические характеристики двухкомпонентного сплава, для простоты считая все фазы совершенными растворами.

## 1. Термодинамика двухкомпонентного сплава

Рассмотрим сплав с приведенной на рис. 1 диаграммой состояния.

### 1.1. Удельная энтальпия и удельный объем сплава

Будем снабжать величины, относящиеся к твердой фазе, верхним индексом  $S$ , а к жидкой –  $L$ . Пусть  $T_S$  – температура солидус для данного сплава, то есть температура, при превышении которой в твердом сплаве начинает появляться жидкая фаза,  $T_L$  – температура ликвидус для данного сплава, то есть температура, при снижении ниже которой в жидком сплаве начинает появляться твердая фаза. Обозначим символом  $X_i$  массовую долю  $i$ -го компонента в исходном сплаве.

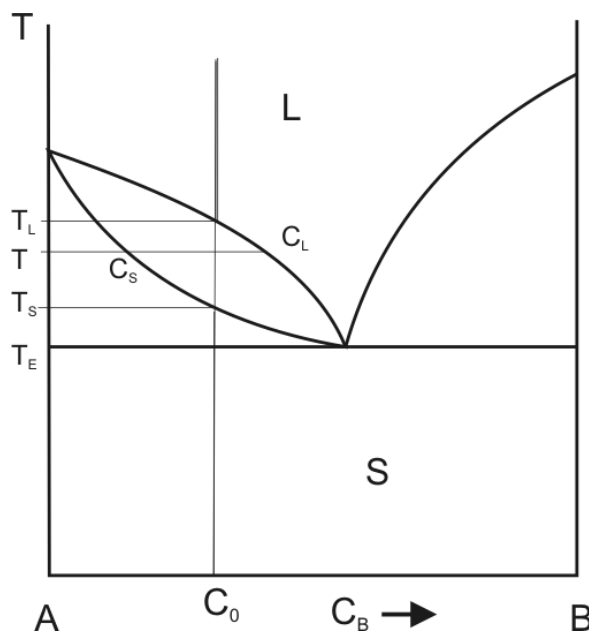


Рис. 1. Диаграмма состояния двухкомпонентного сплава

#### 1.1.1. Энтальпии отдельных компонентов сплава

Принимаем, что для температур, соответствующих твердому состоянию, удельная энтальпия ( $h_i^{(S)}$ ) и удельный объем ( $v_i^{(S)}$ )  $i$ -го компонента сплава равны

$$h_i^{(S)}(T) = h_i^0 + c_{P_i}^{(S)}(T - T_i^0), \quad v_i^{(S)} = \frac{1}{\rho_i^{(S)}} \quad (i = 1, 2), \quad (1.1)$$

где  $h_i^0 = h_i(T_i^0)$  – удельная энтальпия чистого  $i$ -го компонента при некоторой температуре  $T_i^0$ ;

$c_{P_i}$  – удельная теплоемкость  $i$ -го компонента;  $\rho_i^{(S)}$  удельная плотность  $i$ -го компонента сплава в твердом состоянии.

Для температур, соответствующих жидкому состоянию, удельную энтальпию ( $h_i^{(L)}$ ) и удельный объем ( $v_i^{(L)}$ )  $i$ -го компонента будем считать равными соответственно

$$h_i^{(L)}(T) = h_i^0 + c_{Pi}^{(S)}(T_S - T_{i0}) + \Delta h_i^{(S-L)} + c_{Pi}^{(L)}(T - T_S), \quad v_i^{(L)} = \frac{1}{\rho_i^{(L)}} \quad (i=1,2). \quad (1.2)$$

Здесь  $T_S$  – температура плавления чистого  $i$ -го компонента;  $\Delta h_i^{(S-L)}$  – удельная энтальпия его плавления.

### 1.1.2. Энтальпия и объем сплава

**1.1.2.1.** При температуре ниже  $T_S$  весь сплав твердый. Его энтальпия и объем равны

$$H_A(T) = \sum_{i=1}^2 m_i^{(S)} h_i^{(S)}(T), \quad V = \sum_{i=1}^2 m_i^{(S)} v_i^{(S)}.$$

Здесь  $h_i^{(S)} = \frac{\partial H_A}{\partial m_i^{(S)}}$ ,  $v_i^{(S)} = \frac{\partial V_A}{\partial m_i^{(S)}}$  – парциальные удельные энтальпия и объем  $i$ -го компонента

сплава. За неимением лучших данных будем считать их равными соответствующим удельным величинам чистых компонентов и вычислять по формулам (1.1).

Так как весь сплав твердый, то  $m_i^{(S)} = m_i = m_A X_i$ , где  $m_i$  – масса  $i$ -го компонента во всем сплаве, а  $X_i = \frac{m_i}{M_A}$  – его валовая доля. Тогда

$$H_A(T) = m_A \sum_{i=1}^2 h_i^{(S)}(T) X_i, \quad V = m_A \sum_{i=1}^2 v_i^{(S)} X_i. \quad (1.3)$$

**1.1.2.2.** При температуре  $T_S \leq T \leq T_L$  из твердой фазы начинает выделяться жидкая фаза. Процесс может протекать в два этапа. При снижении температуры ниже  $T_L$  вначале выделяется твердая фаза ( $S$ ) – нужно рассматривать равновесие между жидкой фазой ( $L$ ) и твердой фазой ( $S$ ). Состав любой фазы  $\Phi$  сплава характеризуется двумя долями его компонентов:

$$X_1^{(\Phi)} = \frac{m_1^{(\Phi)}}{m}, \quad X_2^{(\Phi)} = \frac{m_2^{(\Phi)}}{m} \quad (m = m_1^{(\Phi)} + m_2^{(\Phi)}).$$

Так как  $X_1^{(\Phi)} + X_2^{(\Phi)} = 1$ , то из двух концентраций вторая определяется первой, так что состав фазы можно задавать долей первого компонента ( $X_1^{(\Phi)}$ ).

Пусть  $m^{(S)}(T)$  и  $m^{(L)}(T)$  – массы твердой и жидкой фаз сплава при данной температуре  $T$ . Найдем их:

$$\begin{cases} m^{(L)} + m^{(S)} = m_A, \\ m^{(L)} X_1^{(L)} + m^{(S)} X_1^{(S)} = m_A X_1 \end{cases} \Rightarrow m^{(S)} = m_A \frac{X_1^{(L)} - X_1}{X_1^{(L)} - X_1^{(S)}}.$$

Введя обозначения

$$\alpha^{(S)} = \frac{X_1^{(L)} - X_1}{X_1^{(L)} - X_1^{(S)}}, \quad \alpha^{(L)} = 1 - \alpha^{(S)}, \quad (1.4)$$

получим

$$m^{(S)} = m_A \alpha^{(S)}, \quad m^{(L)} = m_A \alpha^{(L)}. \quad (1.5)$$

Величины ( $X_1^{(L)}, X_1^{(S)}$ ) для каждой температуры должны быть известны из диаграммы состояния (см. рис. 1):

$$X_1^{(\Phi)} = \varphi_1^{(\Phi)}(T), \quad (\Phi = L, S). \quad (1.6)$$

Массы отдельных компонентов каждой фазы определяются по формуле

$$m_i^{(\Phi)} = m_A \alpha^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)}, \quad (\Phi = L, S; i = 1, 2). \quad (1.7)$$

Энтальпия и объем всего сплава при наших допущениях равны:

$$H_A(T) = m_A \sum_{\Phi=L,S} \left( \alpha^{(\Phi)} \sum_{i=1}^2 \left( h_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)} \right) \right), \quad V_A(T) = m_A \sum_{\Phi=L,S} \left( \alpha^{(\Phi)} \sum_{i=1}^2 \left( v_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)} \right) \right). \quad (1.8)$$

Здесь  $h_i^{(\Phi)} = \frac{\partial H_A}{\partial m_i^{(\Phi)}}$ ,  $v_i^{(\Phi)} = \frac{\partial V_A}{\partial m_i^{(\Phi)}}$  – парциальные удельные энтальпия и объем  $i$ -го компонента

сплава. Так же, за неимением точных данных, будем считать их равными соответствующим удельным величинам чистых компонентов и вычислять по формулам (1.1), (1.2).

**1.1.2.3.** При температуре выше  $T_L$  весь сплав жидкий. Его энтальпия и объем равны

$$H_A(T) = \sum_{i=1}^2 m_i^{(L)} h_i^{(L)}(T), \quad V = \sum_{i=1}^2 m_i^{(L)} v_i^{(L)}.$$

Здесь  $h_i^{(L)} = \frac{\partial H_A}{\partial m_i^{(L)}}$ ,  $v_i^{(L)} = \frac{\partial V_A}{\partial m_i^{(L)}}$  – парциальные удельные энтальпия и объем  $i$ -го компонента

сплава. Так же будем считать их равными соответствующим удельным величинам чистых компонентов и вычислять по формулам (1.2).

Так как весь сплав жидкий, то  $m_i^{(L)} = m_i = m_A X_i$ . Тогда

$$H_A(T) = m_A \sum_{i=1}^2 h_i^{(L)}(T) X_i, \quad V_A(T) = m_A \sum_{i=1}^2 v_i^{(L)} X_i. \quad (1.9)$$

## 1.2. Определение эффективной теплоемкости

Эффективную теплоемкость сплава, которую мы будем использовать в уравнении теплопроводности, определим как  $c_P^e = \frac{\partial H_A}{\partial T \partial m_A}$ .

### 1.2.1. Определение $h_A^{*'}, v_A^{*'}$ для температур $T < T_S$

Для температур ниже  $T_S$ , в соответствии с формулами (1.3), получим

$$c_P^e = \sum_{i=1}^2 h_i'^{(S)} X_i = \sum_{i=1}^2 c_{Pi}^{(S)} X_i. \quad (1.10)$$

### 1.2.2. Определение $h_A^{*'}, v_A^{*'}$ для температур $T_S \leq T \leq T_L$

Применяя формулы (1.8), получим

$$c_P^e = \sum_{\Phi=S,L} \left( \alpha^{(\Phi)'} \sum_{i=1}^2 \left( h_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)} \right) \right) + \sum_{\Phi=S,L} \left( \alpha^{(\Phi)} \sum_{i=1}^2 \left( c_{Pi}^{(\Phi)'} X_i^{(\Phi)} + h_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)'} \right) \right). \quad (1.11)$$

Вычислим производные, входящие в это выражение. В соответствии с (1.4), (1.6),

$$\alpha^{(S)'} = \frac{X_1^{(S)'} (X_1^{(L)} - X_1) + X_1^{(L)'} (X_1 - X_1^{(S)})}{(X_1^{(L)} - X_1^{(S)})^2}, \quad \alpha^{(L)'} = -\alpha^{(S)'}. \quad (1.12)$$

$$X_i^{(\Phi)'} = \varphi_i^{(\Phi)'}(T) \quad (\Phi = S, L; i = 1, 2). \quad (1.13)$$

### 1.2.3. Определение $H_A', V_A'$ для температур $T > T_L$

Для температур выше  $T_L$ , в соответствии с формулами (1.9), получим

$$c_P^e = \sum_{i=1}^2 h_i^{(L)'} X_i = \sum_{i=1}^2 c_{Pi}^{(L)'} X_i. \quad (1.14)$$

**1.3. Алгоритм расчета эффективной теплоемкости**

A1. Известны данные по сплаву: Состав сплава (массовые доли компонентов)  $-(X_1, X_2)$ ; температуры солидус, ликвидус и начала выпадения двухфазной эвтектики сплава  $T_S, T_L$ ; функции зависимости состава твердой и жидкой фаз сплава от температуры  $T_S \leq T \leq T_L$ ; удельные теплоемкости компонентов сплава в твердом и жидком состояниях  $-c_{P1}^{(S)}, c_{P1}^{(L)}, c_{P2}^{(S)}, c_{P2}^{(L)}$ ; теплоты плавления чистых компонентов сплава  $-\Delta h_1^{(S-L)}, \Delta h_2^{(S-L)}$ ; удельные плотности компонентов сплава в твердом и жидком состояниях  $-\rho_1^{(S)}, \rho_1^{(L)}, \rho_2^{(S)}, \rho_2^{(L)}$ ; коэффициенты теплопроводности сплава в твердом и жидком состояниях  $-\lambda^{(S)}, \lambda^{(L)}$ .

A2. Расчет сплава:

**A2.1. Если  $T < T_S$ .**

A2.1.1. Для  $i = 1, 2$

$$h_i^{(S)}(T) = h_i^0 + c_{Pi}^{(S)}(T - T_i^0).$$

$$A2.1.2. h_A^*(T) = \sum_{i=1}^2 h_i^{(S)}(T) X_i, \quad c_P^e = h_A^{*'} = \sum_{i=1}^2 c_{Pi}^{(S)} X_i, \quad v_A^* = 0; \quad v_A^* = \sum_{i=1}^2 \frac{X_i}{\rho_i^{(S)}}; \quad v_A^{*'} = 0.$$

**A2.2. Если  $T_S \leq T \leq T_L$ .**

A2.2.1. Для  $i = 1, 2$

$$h_i^{(S)}(T) = h_i^0 + c_{Pi}^{(S)}(T - T_i^0), \quad v_i^{(S)} = \frac{1}{\rho_i^{(S)}};$$

$$h_i^{(L)}(T) = h_i^0 + c_{Pi}^{(S)}(T_S - T_i^0) + \Delta h_i^{(S-L)} + c_{Pi}^{(L)}(T - T_S), \quad v_i^{(L)} = \frac{1}{\rho_i^{(L)}}.$$

Для  $\Phi = S, L$ :  $X_i^{(\Phi)} = \varphi_i^{(\Phi)}(T)$ ,  $X_i^{(\Phi)'} = \varphi_i^{(\Phi)'}(T)$ .

$$A2.2.2. \alpha^{(S)} = \frac{X_1^{(L)} - X_1}{X_1^{(L)} - X_1^{(S)}}; \quad \alpha^{(L)} = 1 - \alpha^{(S)};$$

$$\alpha^{(S)'} = \frac{X_1^{(S)'}(X_1^{(L)} - X_1) + X_1^{(L)'}(X_1 - X_1^{(S)})}{(X_1^{(L)} - X_1^{(S)})^2}; \quad \alpha^{(L)'} = -\alpha^{(S)'}$$

$$A2.2.3. h_A^* = \sum_{\Phi=S,L} \alpha^{(\Phi)} \left( \sum_{i=1}^2 h_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)} \right), \quad v_A^* = \sum_{\Phi=S,L} \alpha^{(\Phi)} \left( \sum_{i=1}^2 v_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)} \right),$$

$$c_P^e = h_A^{*'} = \sum_{\Phi=S,L} \alpha^{(\Phi)} \left( \sum_{i=1}^2 (c_{Pi}^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)} + h_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)'}) + \alpha^{(\Phi)'} \sum_{i=1}^2 (h_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)}) \right).$$

$$v_A^{*'} = \sum_{\Phi=S,L} \left( \alpha^{(\Phi)} \sum_{i=1}^2 v_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)'} + \alpha^{(\Phi)'} \sum_{i=1}^2 v_i^{(\Phi)} X_i^{(\Phi)} \right).$$

**A2.3. Если  $T > T_L$ .**

A2.3.1. Для  $i = 1, 2$

$$h_i^{(L)}(T) = h_i^0 + c_{Pi}^{(S)}(T_S - T_i^0) + \Delta h_i^{(S-L)} + c_{Pi}^{(L)}(T - T_S).$$

$$A2.3.2. h_A^* = \sum_{i=1}^2 h_i^{(L)}(T) X_i, \quad c_P^e = h_A^{*'} = \sum_{i=1}^2 c_{Pi}^{(L)} X_i, \quad v_A^* = X_A \sum_{i=1}^2 \frac{X_i}{\rho_i^{(L)}}, \quad v_A^{*'} = 0.$$

## 1.4. Пример расчета

По изложенной методике рассчитаем необходимые термодинамические характеристики сплава Sn–Bi с содержанием Bi, равным 20 % (ат.). По приведенной на рис. 2 диаграмме [7–9] определили уравнения соответствующих линий:

$$A_{\text{Sn}}A_1E: x_{\text{Bi}} = -5,666962 \cdot 10^{-5} T^2 + 1,488313 \cdot 10^{-2} T - 0,4038416;$$

$$A_{\text{Bi}}A_2E: x_{\text{Bi}} = 1,743208 \cdot 10^{-5} T^2 - 3,90639 \cdot 10^{-3} T + 0,776183;$$

$$A_{\text{Sn}}A_3E_{\text{Sn}}: x_{\text{Bi}} = 2,250585 \cdot 10^{-6} T^2 - 3,181351 \cdot 10^{-3} T + 0,6167243;$$

$$A_{\text{Bi}}E_{\text{Bi}}: x_{\text{Bi}} = 1,28399 \cdot 10^{-4} T + 0,965152568.$$

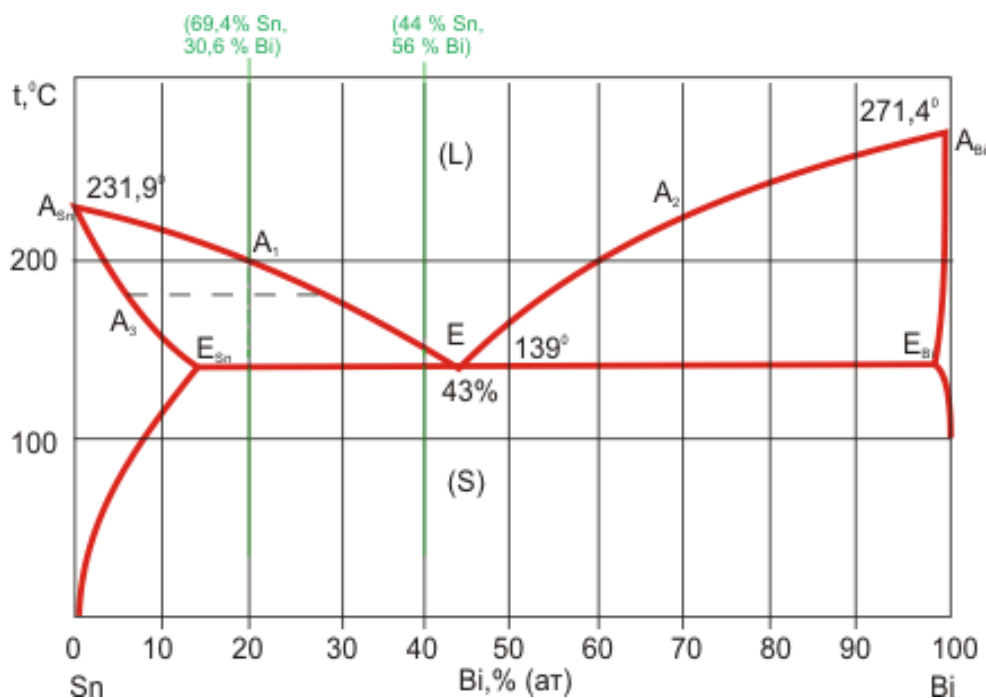


Рис. 2. Диаграмма состояния системы Sn–Bi

Из справочных данных [10–11] подобрали необходимые для расчетов данные (см. таблицу).

### Параметры расчета

Параметр	Sn	Bi
Удельная теплота плавления (Дж/кг)	$h_1^{S-L} = 59\,000$	$h_2^{S-L} = 11\,300$
Уд. теплоемкость (Дж/(кг К)) тв.	$c_{p1}^{(S)} = 243$	$c_{p2}^{(S)} = 127$
Уд. теплоемкость (Дж/(кг К)) ж.	$c_{p1}^{(L)} = 240$	$c_{p2}^{(L)} = 140$
Плотность (кг/м <sup>3</sup> ) тв.	$\rho_1^{(S)} = 7280$	$\rho_2^{(S)} = 9800$
Плотность (кг/м <sup>3</sup> ) ж.	$\rho_1^{(L)} = 6850$	$\rho_2^{(L)} = 10\,300$
Коэф. теплопроводности (Вт/(м К)) тв.	$\lambda_1^{(S)} = 65,8$	$\lambda_2^{(S)} = 6,37$
Коэф. теплопроводности (Вт/(м К)) ж.	$\lambda_1^{(L)} = 31,6$	$\lambda_2^{(L)} = 14,65$
Атомная масса	118,69	208,98

Результаты расчетов приведены на рис. 3.

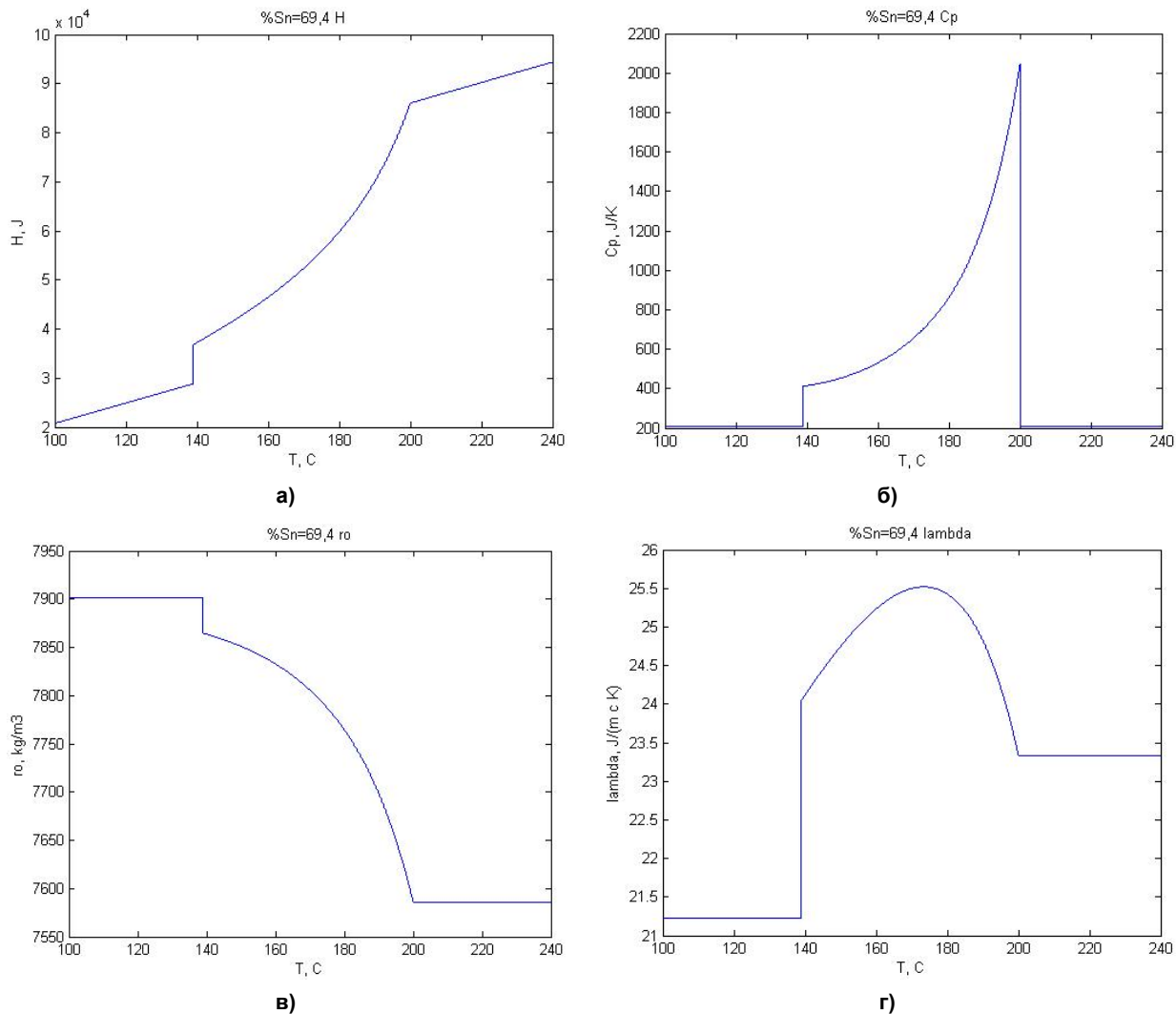


Рис. 3. Зависимости удельной энтальпии (а), эффективной теплоемкости (б), удельного объема (в) и коэффициента теплопроводности сплава Sn–Bi с 30,6 % (мас.) Bi от температуры

## 2. Расчет прогрева цилиндра из двухкомпонентного сплава

### 2.1. Постановка задачи

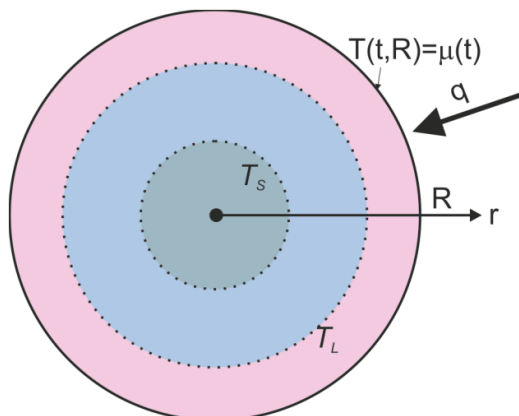


Рис. 4. Схема прогрева цилиндрического образца из двухкомпонентного сплава

Имеется цилиндр радиуса  $R$ , поверхность которого нагревается по закону  $T(t, R) = \mu(t)$  (рис. 4). В результате цилиндр расплавляется (цилиндр находится в некоторой оболочке, которая

не дает ему растечься). В каждой точке сплава температура, в какой-то момент времени, поднимается до температуры солидус и начинает появляться жидкая фаза. Через какое-то время достигается температура ликвидус, оставшиеся кристаллы растворяются в жидкости, все система в этом месте переходит в жидкое состояние и продолжает нагреваться. Требуется найти функцию  $T(t, r)$  – температуру цилиндра в любой точке, находящейся на расстоянии  $r$  от оси цилиндра в момент времени  $t$ .

Подобная постановка задачи имеет отношение к термообработке деталей, к расплавлению кусков шихты. Она также интересна метрологам для обоснования теории самотестирующегося датчика [12–15].

### 2.2. Система уравнений

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T(t, 0)}{\partial r} = 0, \quad (2.2)$$

$$T(t, R) = \mu(t), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

$$T(0, r) = \phi(r), \quad 0 \leq r < R. \quad (2.4)$$

$$c_p = c_p^e(T), \rho = \rho^e(T), \lambda = \lambda^e(T). \quad (2.5)$$

### 2.3. Метод решения

Уравнения системы записывались в конечно-разностном виде. Полученная система разностных уравнений решалась методом прогонки. Величины  $c_p^e, \rho^e, \lambda^e$  рассчитывались по методике, описанной в части 1. Была составлена соответствующая компьютерная программа, которая и осуществляла соответствующие расчеты.

### 2.4. Пример расчета

В качестве примера приведены результаты расчета прогрева цилиндра диаметром 5 мм, первоначально имеющего температуру 20 °С, температура поверхности которого с момента  $t = 0$  стала поддерживаться равной 300 °С (рис. 5, 6). Расчеты приведены для сплава Sn–Bi: с 69,4 % олова (температура ликвидус 200 °С, температура солидус 139 °С).

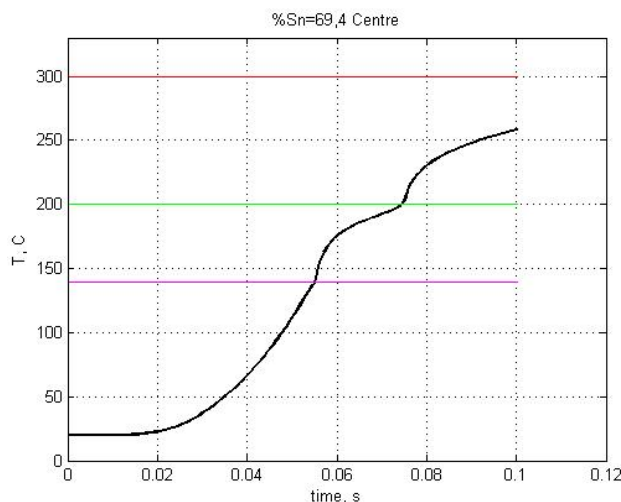


Рис. 5. Изменение температуры в центре образца со временем



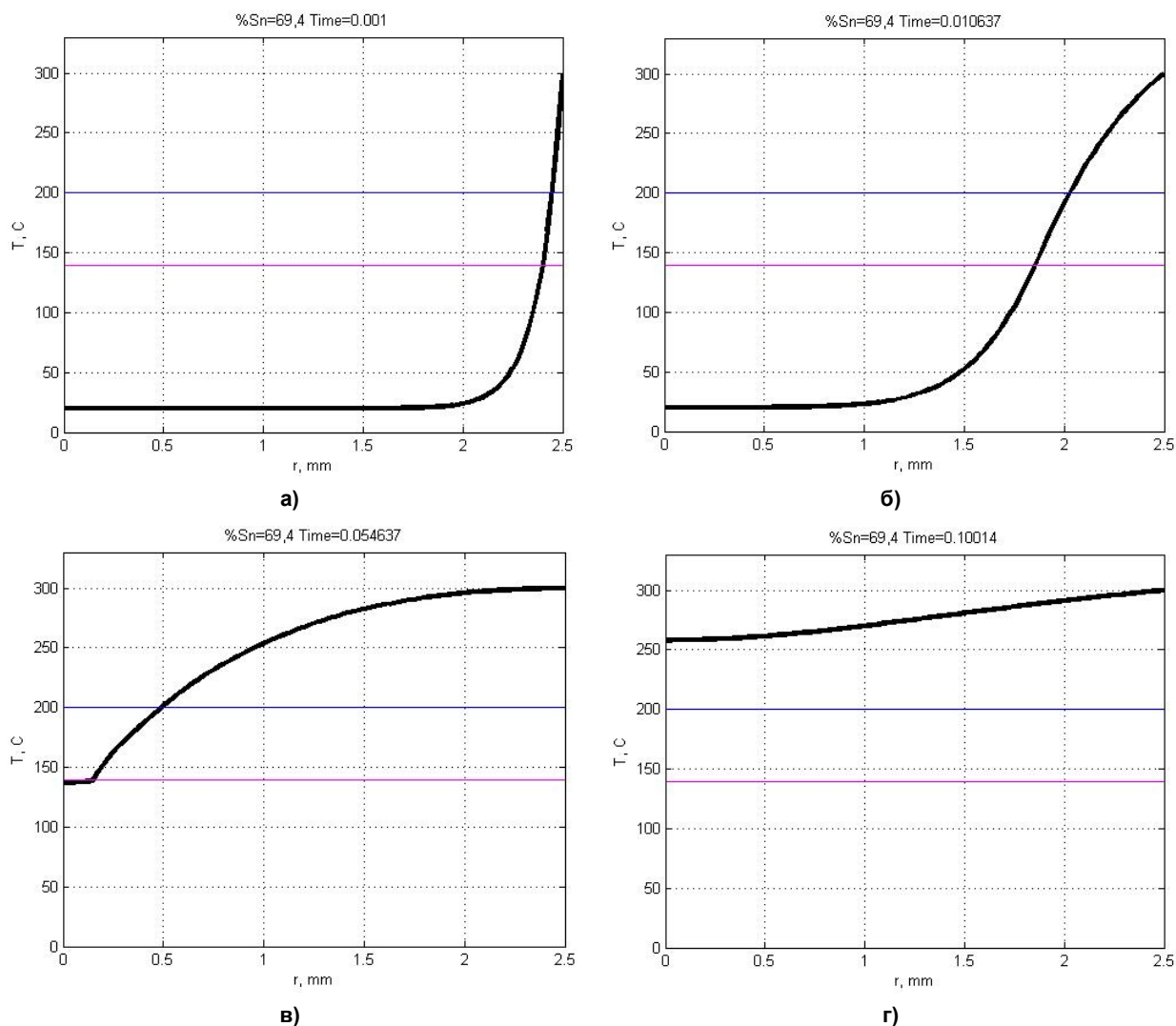


Рис. 6. Распределение температуры по сечению образца через 0,001 с (а); 0,01 с (б); 0,05 с (в); 0,1 с (г) после начала прогрева

### Заключение

Разработана методика, позволяющая рассчитывать скорости процессов, происходящих при нагреве или охлаждении образца с учетом происходящих при этом фазовых переходов. Хотя в данной работе при расчете термодинамических величин, для простоты изложения, сплав считали совершенным раствором, метод расчета движения переходной зоны легко обобщается для любых термодинамических теорий.

### Литература

1. Любов, Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах / Б.Я. Любов. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
2. Скрипов, В.П. Спонтанная кристаллизация переохлажденных жидкостей / В.П. Скрипов, В.П. Коверда. – М.: Наука, 1984. – 232 с.
3. Авдонин, Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации / Н.А. Авдонин. – Рига: Зинатне, 1980. – 180 с.
4. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
5. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
6. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

7. Диаграммы состояния двойных металлических систем: справ. / под. ред. Н.П. Лякишева. – М.: Машиностроение, 1996. – 992 с.
8. Захаров, А.М. Диаграммы состояния двойных и тройных систем / А.М. Захаров. – М.: Металлургия, 1990. – 250 с.
9. Справочник по пайке / под ред. И. Е. Петрунина. – М.: Машиностроение, 2003. – 480 с.
10. Физические величины. Справочник / под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1250 с.
11. Рабинович, В.А. Краткий химический справочник / В.А. Рабинович, З.Я. Хавин. – Л.: Химия, 1978. – 392 с.
12. Шестаков, А.Л. Модель самодиагностирующегося датчика параметра с нелинейной функцией преобразования / А.Л. Шестаков, А.С. Семенов // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2015. – № 1 (11). – С. 17–22.
13. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А.Л. Шестаков. – Челябинск: ЮУрГУ, 2013.
14. Самокалибрующийся термометр на основе точек плавления. Конструкция и алгоритмы работы / М.Д. Белоусов, В.В. Дьячук, Д.А. Мирзаев, А.Л. Шестаков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2013. – Т. 13, № 1. – С. 26–33.
15. Белоусов, М.Д. Оценка собственного состояния термометров сопротивлений / М.Д. Белоусов, А.Л. Шестаков, Н.М. Япарова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2012. – № 35. – С. 105–109.

**Дрозин Александр Дмитриевич**, д-р техн. наук, профессор кафедры материаловедения и физико-химии материалов, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; drozinad@susu.ru.

*Поступила в редакцию 7 октября 2016 г.*

---

DOI: 10.14529/met160407

## MATHEMATICAL MODEL OF THE TWO-PHASE ZONE MOTION DURING HEATING OF THE TWO-COMPONENT CYLINDRICAL OBJECT

**A.D. Drozin**, drozinad@susu.ru

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

If due to heating or cooling of an object, a phase transition occurs, the propagation of heat significantly changes. Unlike one-component metal, upon cooling of the multicomponent alloy, when passing through the liquidus temperature, enthalpy, density and thermal conductivity are continuous, but their derivatives and, in particular, the heat capacity become discontinuous. By heating the surface of the solid metal cylindrical object with two-component composition above the liquidus temperature, the two-phase zone occurs at the surface, and moves to the cylinder axis. We propose a method of introducing “effective” specific heat that allows calculating the speed of this zone movement, as well as the temperature of the object at any point and at any time. The ordinary equation of heat conductivity with variable coefficients which, in this case, depend on temperature was used. Liquid, solid and transitional zones of a sample were counted by the same equation, its coefficients were counted by the same method. For each point of the sample for each respective temperature the proportion of solid and liquid phases was calculated. In this paper, for simplicity, the solution was considered as ideal. Specific volume, thermal conductivity and specific enthalpy were calculated as the weighted average of the corresponding values for the liquid and solid states. The specific heat was calculated as the derivative of the enthalpy with respect to temperature. The resulting system of

differential equations was reduced to finite-difference equations. A computer program was developed to solve the resulting system of difference equations. Results of one of such calculations are given in the article. The developed method allows to calculate the velocity of the phase boundary, as well as the object temperature at any point and at any time. The results may be interesting not only for metallurgists, but for metrology to develop self-testing temperature sensor theory.

*Keywords: heat conduction; phase transition; alloy; model.*

#### References

1. Lyubov B.Ya. *Teoriya kristallizatsii v bol'shikh ob'emakh* [Theory of Crystallization in Large Volumes]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 256 p.
2. Skripov V.P., Koverda V.P. *Spontannaya kristallizatsiya pereokhlazhdennykh zhidkostey* [Spontaneous Crystallization of Undercooled Liquids]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 232 p.
3. Avdonin N.A. *Matematicheskoe opisanie protsessov kristallizatsii* [Mathematical Description of Crystallization Processes]. Riga, Zinatne Publ., 1980. 180 p.
4. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 736 p.
5. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 656 p.
6. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Methods of Solving Grid Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. –592 p.
7. *Diagrammy sostoyaniya dvoynykh metallicheskiykh sistem: Spravochnik* [Phase Diagrams of Binary Metal Systems. Reference Book]. Vol. 1. Lyakishev N.P. (Ed.). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1996. 992 p.
8. Zakharov A.M. *Diagrammy sostoyaniya dvoynykh i troynykh sistem* [Phase Diagrams of Binary and Ternary Systems]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1990. 250 p.
9. *Spravochnik po payke* [Soldering Reference Book]. Petrunin I.E. (Ed.). Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 480 p.
10. *Fizicheskie velichiny. Spravochnik* [Physical Values. Reference Book]. Grigor'ev I.S. and Meylikhov E.Z. (Eds). Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 1250 p.
11. Rabinovich V.A., Khavin Z.Ya. *Kratkiy khimicheskiy spravochnik* [Brief Chemical Reference Book]. Leningrad, Khimiya Publ., 1978. 392 p.
12. Shestakov A.L., Semenov A.S. [Model of a Self-Diagnosing Parameter Sensor with Nonlinear Transformation Function]. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol'*, 2015, no. 1 (11), pp. 17–22. (in Russ.)
13. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskikh izmereniyakh* [Methods of Automatic Control Theory in Dynamic Measurements]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 2013.
14. Belousov M.D., D'yachuk V.V., Mirzaev D.A., Shestakov A.L. [Self-Calibrating Thermometer Based on Melting Points. Construction and Operation Algorithms]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control & Radioelectronics*, 2013, vol. 13, no. 1, pp. 26–33. (in Russ.)
15. Belousov M.D., Shestakov A.L., Yaparova N.M. [Estimation of Eigenstate of Resistive Thermometers]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control & Radioelectronics*, 2012, no. 35 (294), issue 17, pp. 105–109. (in Russ.)

*Received 7 October 2016*

#### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Дрозин, А.Д. Математическая модель кинетики движения двухфазной зоны при нагреве цилиндрического тела из двухкомпонентного сплава / А.Д. Дрозин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». – 2016. – Т. 16, № 4. – С. 67–77. DOI: 10.14529/met160407

#### FOR CITATION

Drozin A.D. Mathematical Model of the Two-Phase Zone Motion During Heating of the Two-Component Cylindrical Object. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Metallurgy*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 67–77. (in Russ.) DOI: 10.14529/met160407