

## СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОСАДКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКИ

С.С. Стругов, В.А. Иванов, В.Г. Шеркунов

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Проведен обзор методов оценки напряженно-деформированного состояния при осадке цилиндрической заготовки, предложенных Л. Прандтлем, Г.Я. Гуном и В.Л. Колмогоровым. Проведено сравнение этих методов с результатами компьютерного моделирования в программном пакете DEFORM-3D и с результатами эксперимента. В качестве тестовой задачи использована задача осадки цилиндрической заготовки из свинца с отношением начальной высоты к диаметру 0,53. Осадка осуществлялась до величины относительной деформации по высоте 0,18. Установлено, что инженерные методы (Л. Прандтля, Г.Я. Гуна) позволяют получить нижнюю оценку усилия осадки. Метод В.Л. Колмогорова, относящийся к классу вариационных методов, и компьютерное моделирование в DEFORM-3D дают наиболее близкие к эксперименту результаты. Вместе с тем отмечено, что вариационные методы в чистом виде при постановке даже простой задачи обладают высокой трудоемкостью и не могут быть использованы для решения практических задач на производстве. Компьютерное моделирование в DEFORM-3D позволяет за короткое время получить требуемые результаты, а благодаря визуализации процесса постановки задачи и её решения облегчается анализ процесса формоизменения. Существенным недостатком компьютерного моделирования является высокая стоимость программного обеспечения.

*Ключевые слова:* осадка; усилие осадки; напряженно-деформированное состояние; методы оценки; численное моделирование; DEFORM-3D.

### Введение

Осадка является одной из самых распространенных операций заготовительного производства в машиностроении. По определению Е.И. Семенова, осадкой называют операцию формоизменения, в процессе которой производится уменьшение высоты заготовки при увеличении площади поперечного сечения [1].

Осадку применяют, когда необходимо: увеличить поковку или участок её с поперечным сечением большим, чем сечение заготовки, уменьшить анизотропию механических свойств и улучшить их в осевом и поперечном направлении поковки.

Данная операция имеет простую схему (рис. 1), что позволяет её реализовывать практически на всех видах кузнечно-прессового

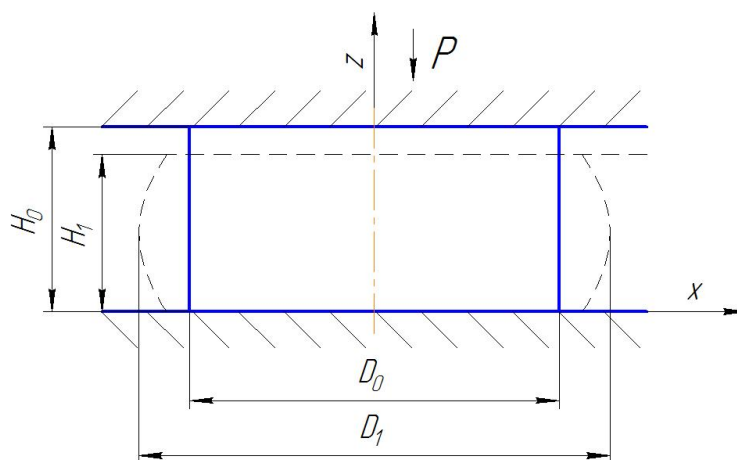


Рис. 1. Принципиальная схема осадки:  $H_0$ ,  $D_0$  – начальные размеры заготовки;  $H_1$ ,  $D_1$  – размеры заготовки после осадки

оборудования. Схема осадки часто применяется для оценки напряженно-деформированного состояния, каким-либо методом, из-за удобства, простоты расчетов и возможности практически мгновенно провести эксперимент.

**Методы оценки напряженно-деформированного состояния при осадке**

Все расчёты и эксперименты проводились для цилиндрической заготовки:  $H_0 = 42,2$  мм,  $D_0 = 79,5$  мм, материал свинец,  $\sigma_s = 28$  МПа.

1. Способ Л. Прандтля [2]

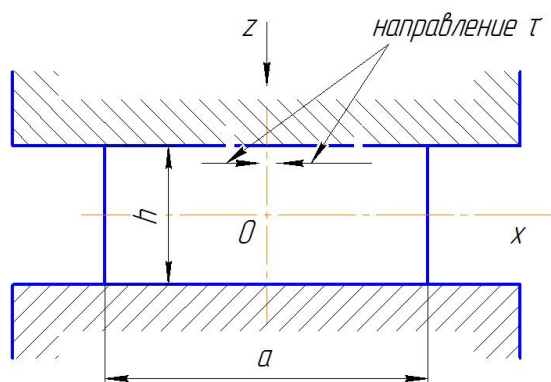


Рис. 2. Расчетная схема:  $h$  – начальная высота заготовки;  $a$  – ширина заготовки

Схема решения представлена на рис. 2. В силу симметрии сечения относительно координатных осей рассматривается лишь первый квадрант. Решение осуществляется с применением точных уравнений равновесия и условия пластичности Мизеса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(\sigma_x + \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = 4k^2. \quad (1.2)$$

Опустив преобразования, получим систему:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{2\tau_k}{h}x + 2\sqrt{k^2 - \frac{2\tau_k^2}{h^2}z^2} + C; \\ \sigma_z = -\frac{2\tau_k}{h}x + C; \\ \tau_{xz} = -\frac{2\tau_k}{h}z, \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  – главные напряжения;  $\tau_{xz}$  – касательное напряжение;  $x$ ,  $z$  – координаты;  $k$  – максимальная величина касательных напряжений;  $C$  – свободный член.

Таким образом, нормальное напряжение  $\sigma_z$  является линейной функцией от  $x$  и не зависит от  $z$ , а касательное  $\tau_{xz}$  представляет линейную функцию  $z$  и не зависит от  $x$ .

Для получения на основе системы (1.3) решения, применимого на практике, используем только второе уравнение системы. Опуская преобразования, получим

$$\sigma_z = -\sigma_s^* \left[ 1 + \frac{\mu_s(a-2x)}{h} \right], \quad (1.4)$$

где  $\sigma_s^*$  – напряжение сдвига;  $\mu_s$  – фактор трения.

Удельное усилие осадки определяется по формуле

$$p = \sigma_s^* \left[ 1 + \frac{\mu_s a}{2h} \right]. \quad (1.5)$$

2. Способ Г.Я. Гуна [3]

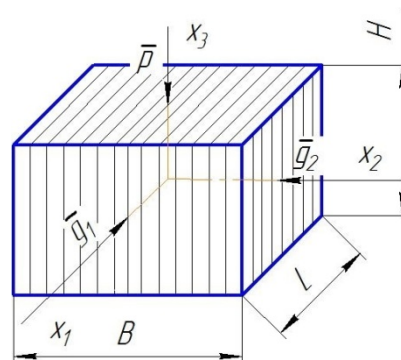


Рис. 3. Расчетная схема решения Г.Я. Гуна:  $H$ ,  $L$ ,  $B$  – начальные размеры параллелепипеда;  $\bar{p}$  – нормальное давление;  $\bar{g}_1$ ,  $\bar{g}_2$  – нормальные напряжения

Схема нагружения представлена на рис. 3. Решим задачу обратным методом, для соответствия её общей тематике. Решение задачи осуществляется с применением:

– условия идеальной пластичности Губера – Мизеса:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ik} S_{ik}} = \tau_s; \quad (2.1)$$

– условия несжимаемости:

$$\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = 0. \quad (2.2)$$

Интенсивность скоростей деформации сдвига:

$$H = \sqrt{2\xi_{ik}\xi_{ik}}. \quad (2.3)$$

В дальнейшем используются безразмерные величины:

$$p = \frac{\bar{p}}{\sigma_s}; \quad g_1 = \frac{\bar{g}_1}{\sigma_s}; \quad g_2 = \frac{\bar{g}_2}{\sigma_s}. \quad (2.4)$$

С учетом условия пластичности (2.1), выражений (2.4) и принимая, что материал сжимается, получим

$$p = -\frac{g_1 + g_2}{2} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}(g_1 - g_2)^2}. \quad (2.5)$$

Компоненты скорости линейно зависят от координат, поэтому величина  $\xi_{33}$  определена скоростью движения плит:

$$\xi_{33} = -\frac{v}{l_3}, \quad (2.6)$$

где  $v$  – скорость перемещения плит;  $l_3$  – размер, равный  $H/2$ .

Обозначим  $\frac{v_0}{l_3} = \dot{\epsilon}$ . Пусть  $\xi_{11} = a\dot{\epsilon}$ , тогда из условия несжимаемости (2.2)

$$\xi_{22} = (1 - a)\dot{\epsilon}. \quad (2.7)$$

Опуская преобразования, получим

$$a = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3(g_1 - g_2)}{\sqrt{4 - 3(g_1 - g_2)^2}} \right]. \quad (2.8)$$

Опуская преобразования, интегрирование и потенцирование компонентов скорости, получим

$$B_1 = B \left( \frac{H}{H_1} \right)^2; \quad BL_1 = L \left( \frac{H}{H_1} \right)^2, \quad (2.9)$$

где  $B_1, H_1, L_1$  – конечные размеры параллелепипеда.

### 3. Способ В.Л. Колмогорова [4]

Способ расчета, предложенный В.Л. Колмогоровым, является вариационным методом, и позволяет определять зависимость усилия прессования от перемещения верхней плиты, а так же изменение напряженно-деформированного состояния во времени.

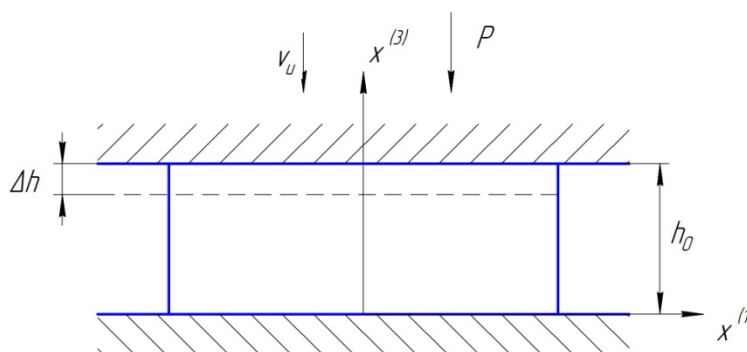


Рис. 4. Расчетная схема решения В.Л. Колмогорова:  $h_0$  – начальная высота заготовки;  $\Delta h$  – величина деформации;  $P$  – усилие деформирования

Схема решения задачи показана на рис. 4. Предположим, что материал параллелепипеда обладает известными реономными свойствами, на контактной поверхности со штампом действует некоторый известный закон трения. Примем в следующем простейшем виде виртуальные перемещения частиц в неподвижной декартовой системе координат, которые они могут получить при осадке параллелепипеда в момент времени  $t$ :

$$u^{(1)} = a_1 y^1; \quad u^{(2)} = b_1 y^2; \quad u^{(3)} = -c y^3, \quad (3.1)$$

где  $y^1, y^2, y^3$  – начальные координаты частиц в декартовой системе координат, которые примем в качестве лагранжевых координат;  $a_1, b_1$  – искомые неизвестные.

Декартовы координаты частиц, получивших перемещение, в момент времени  $t$  будут:

$$x^{(1)} = y^1 + a_1 y^1; \quad x^{(2)} = y^2 + b_1 y^2; \quad x^{(3)} = y^3 - c y^3. \quad (3.2)$$

Компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned} g_{11} &= (1 + a_1)^2 & g_{21} &= 0 & g_{31} &= 0 \\ g_{12} &= 0 & g_{22} &= (1 + b_1)^2 & g_{32} &= 0 \\ g_{13} &= 0 & g_{23} &= 0 & g_{33} &= (1 - c)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Вычислим скорости движения материальных частиц:

$$\frac{\partial x^{(1)}}{\partial t} = v^{(1)} = \dot{a}_1 y^1; \quad \frac{\partial x^{(2)}}{\partial t} = v^{(2)} = \dot{b}_1 y^2; \quad \frac{\partial x^{(3)}}{\partial t} = v^{(3)} = -\dot{c} y^3. \quad (3.4)$$

Преобразуем компоненты скорости из неподвижной системы координат в сопутствующую систему:

$$v_1 = \dot{a}_1 (1 + a_1) y^1; \quad v_2 = \dot{b}_1 (1 + b_1) y^2; \quad v_3 = -\dot{c} (1 - c) y^3. \quad (3.5)$$

Компоненты тензора скорости деформации:

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= a_1(1+a_1) & \xi_{21} &= 0 & \xi_{31} &= 0 \\ \xi_{12} &= 0 & \xi_{22} &= b_1(1+b_1) & \xi_{32} &= 0 \\ \xi_{13} &= 0 & \xi_{23} &= 0 & \xi_{33} &= -\dot{c}(1-c) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Удовлетворим условие несжимаемости:

$$\xi_{11}g^{11} + \xi_{22}g^{22} + \xi_{33}g^{33} = 0. \quad (3.7)$$

При помощи выражения (3.7) выразим один из неизвестных параметров:

$$b_1 = (1+b_1) \left[ \frac{\dot{c}}{(1-c)} - \frac{a_1}{(1-a_1)} \right]. \quad (3.8)$$

Интенсивность скорости деформации сдвига для несжимаемого материала:

$$H = 2 \sqrt{\frac{\dot{a}_1^2}{(1+a_1)^4} - \frac{\dot{c}a_1}{(1-c)^2(1+a_1)^2} + \frac{\dot{c}^2}{(1-c)^4}}. \quad (3.9)$$

Определим модуль вектора скольжения инструмента по металлу на контакте с верхним и нижним бойками:

$$v_s = \sqrt{\frac{\dot{a}_1^2 x_0^2}{(1+a_1)^4} + \frac{y_0^2}{(1-c)^2(1+a_1)^2} \left( \frac{\dot{c}}{(1-c)^2} - \frac{a_1}{(1+a_1)^2} \right)^2}. \quad (3.10)$$

Ковариантные компоненты ускорения в сопутствующей системе координат:

$$w^1 = \dot{a}_1 y^1 (1+a_1)^{-1}; \quad w^2 = \dot{b}_1 y^2 (1+b_1)^{-1}; \quad w^3 = -\dot{c} y^3 (1-c)^{-1}. \quad (3.11)$$

Опустив «конструирование» простейшего виртуального поля напряжений и проинтегрировав результат с учетом граничных условий, получим:

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= \frac{\rho \dot{a}_1 (y^1)^2}{2(1+a_1)^2} - \frac{a_2 (y^1)^2}{h_0 l_0} \left[ 1 - \frac{(y^1)^2}{2l_0^2} \right]; \\ \sigma^{22} &= \frac{\rho \dot{b}_1 (y^2)^2}{2(1+b_1)^2} - \frac{a_3 (y^2)^2}{h_0 b_0} \left[ 1 - \frac{(y^2)^2}{2b_0^2} \right]; \\ \sigma^{22} &= \frac{\rho \dot{c}_1 (y^3)^2}{2(1+c_1)^2} - \left[ \frac{a_2 h_0}{l_0} \left( 1 - \frac{3(y^1)^2}{l_0^2} \right) + \frac{a_3 h_0}{b_0} \left( 1 - \frac{3(y^2)^2}{b_0^2} \right) \right] \left( \frac{y^3}{h_0} - 1 \right) \frac{y^3}{h_0} + a_4. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Примем, что материал жестковязкопластичный, тогда

$$T(H) = \tau_s + \mu H, \quad H(T) = (T - \tau_s) / \mu. \quad (3.13)$$

Закон трения примем по Кулону:

$$f_\tau = k f_v. \quad (3.14)$$

Для рассматриваемого случая функционал вариационного принципа виртуальных скоростей и напряжений будет иметь следующий вид, с учетом выражений (3.13) и (3.14):

$$J_1 = \int_V \left[ \tau_s \dot{H} + \frac{\mu (\dot{H})^2}{2} + \frac{(\dot{T})^2}{2\mu} - \frac{\tau_s \dot{T}}{\mu} + \rho w^i v_i \right] dV - \int_{S_s} \dot{f}_v (v_u - k v_s) dS. \quad (3.15)$$

#### 4. Компьютерное моделирование процесса осадки в DEFORM-3D

Компьютерное моделирование и расчет усилия осадки проводился на суперкомпьютере «Скиф-Аврора». Программа пакет DEFORM-3D реализует метод конечных элементов.

Параметры компьютерной модели:

1. Количество конечных элементов – 51 000.
2. Тип конечного элемента – тетраэдр.
3. Скорость движения верхней плиты – 1 мм/с.
4. Шаг расчета по времени – 0,1 с.
5. Критерий остановки расчета – высота заготовки 34,5 мм.

Начальное и конечное положение инструмента показано на рис. 5.

График зависимости перемещения от усилия в программе DEFORM-3D представлен на рис. 6.

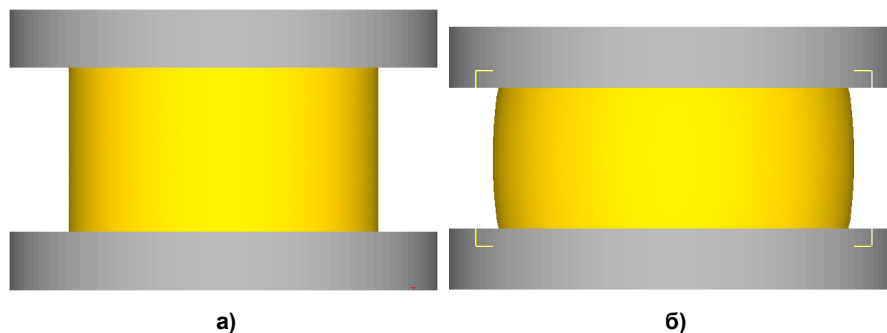


Рис. 5. Схема проведения эксперимента на базе DEFORM-3D:  
а – верхнее положение инструмента; б – нижнее положение инструмента

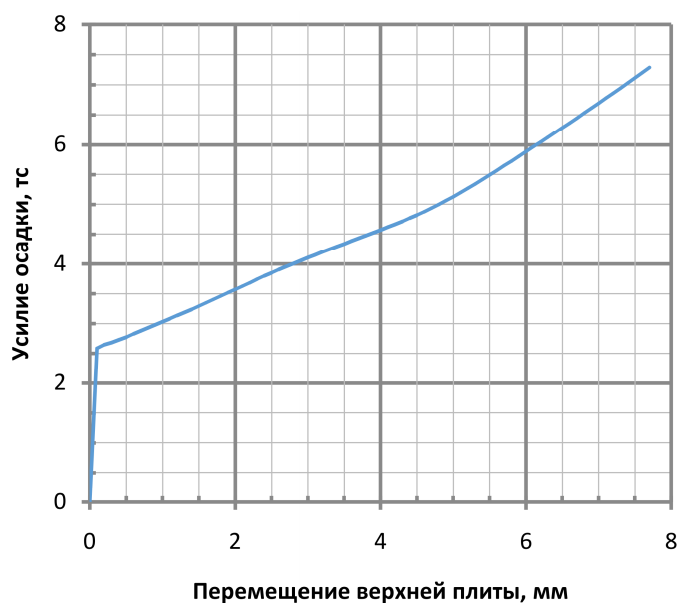


Рис. 6. График зависимости усилия осадки от перемещения верхней плиты в DEFORM-3D

### 5. Натурный эксперимент

Эксперимент по осадке цилиндрической заготовки между плоскими бойками проведен на свинцовых заготовках с размерами:  $H_0 = 42,2$  мм,  $D_0 = 79,5$  мм. Заготовки осаживались до высоты  $H = 34,5$  мм. Процесс осадки реализован на прессе ПСУ-500. Измерение усилия проводилось по отсчетным устройствам пресса. Погрешность измерения усилия составила  $\pm 2\%$ . Перевод первичных данных в тс осуществлялся по тарировочному графику. Полученное в эксперименте усилие осадки составило  $6,9 \pm 0,3$  тс.

### Сравнение полученных результатов

Сравнение методов расчета параметров процесса осадки цилиндрической заготовки проведем по усилию прессования. Усилие осадки является важной характеристикой процесса и часто служит для выбора оборудо-

вания. Так, усилия осадки, вычисленные с использованием способов, предложенных Л. Прандтлем, Г.Я. Гуном и В.Л. Колмогоровым, полученные в результате компьютерного моделирования, и экспериментальные данные представлены в таблице.

Как видно из таблицы, расчеты усилия осадки методами Л. Прандтля и Г.Я. Гуна дают результаты значительно ниже экспериментальных значений. Это обусловлено тем, что данные способы не учитывают упрочнения заготовки, наличия в заготовке макро- и микродефектов, трения между заготовкой и инструментом.

Способ расчета В.Л. Колмогорова позволяет рассчитать напряженно-деформируемое состояние более точно, чем методы Гуна и Прандтля. Это достигается использованием принципа виртуальных скоростей и перемещений, а так же аккуратным заданием гра-

Результаты расчетов усилия осадки в зависимости от метода постановки задачи

Метод нахождения усилия	$P$ , тс	Отклонение от результатов эксперимента, %	Оценка времени получения результата
1. Метод Л. Прандтля	4,2	-39,1	15 мин
2. Метод Г.Я. Гунна	4	-42	30 мин
3. Метод В.Л. Колмогорова	7,5	+5,8	> 8 ч
4. Моделирование в DEFORM-3D	7,29	+5,6	15 мин
5. Эксперимент	$6,9 \pm 0,3$	0	2 ч

ничных условий по трению. Следует отметить большую трудоемкость метода даже при постановке сравнительно простой задачи осадки.

Моделирование процесса на базе программного комплекса DEFORM-3D дает значение усилия прессования близкие к экспериментальным. Существенным преимуществом этого подхода является визуализация процесса постановки и решения задачи, а так же возможность получить необходимые данные за ограниченное время. Большим недостатком компьютерного моделирования является высокая стоимость программного обеспечения.

#### Выводы

Исторически первые методы оценки напряженно-деформированного состояния и усилия при осадке Л. Прандтля и Г.Я. Гуна не учитывают существенных факторов влияющих на процесс формоизменения заготовки, но вместе с тем являются простыми и могут быть использованы для получения нижней оценки усилия осадки.

Метод В.Л. Колмогорова позволяет учитывать существенные факторы процесса, однако в виду сложности постановки задачи не может быть использован на практике для получения быстрых оценок усилия осадки и напряженно-деформированного состояния заго-

товки. Областью применения данного метода являются исследовательские задачи. Метод может быть положен в основу прикладного программного обеспечения.

Компьютерное моделирование с применением программного пакета DEFORM-3D, позволяет учитывать существенные детали процесса формоизменения заготовки, обладает приемлемой точностью и может успешно использоваться в инженерной практике для решения прикладных задач. Существенным недостатком является высокая стоимость программного пакета, начальная стоимость высокопроизводительного вычислительного оборудования и стоимость его обслуживания.

#### Литература

1. Семенов, Е.И. *Ковка и штамповка: в 4 т.* / Е.И. Семенов. – М.: Машиностроение, 1986. – Т. 2. – 592 с.
2. Сторожев, М.В. *Теория обработки металлов давлением* / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 424 с.
3. Гун, Г.Я. *Теоретические основы обработки металлов давлением* / Г.Я. Гун. – М.: Металлургия, 1980. – 456 с.
4. Колмогоров, В.Л. *Механика обработки металлов давлением* / В.Л. Колмогоров. – Изд-во УГТУ – УПИ, 2001. – 835 с.

**Стругов Сергей Сергеевич**, студент кафедры процессов и машин обработки металлов давлением, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; Strugov\_s174@mail.ru.

**Иванов Василий Александрович**, старший преподаватель кафедры процессов и машин обработки металлов давлением, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; ivanovva@susu.ru.

**Шеркунов Виктор Георгиевич**, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой процессов и машин обработки металлов давлением, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск; sherkunovvg@susu.ru.

*Поступила в редакцию 7 октября 2016 г.*

**COMPARISON OF METHODS  
OF STRESS-STRAIN STATE ESTIMATION  
IN THE UPSET OF A CYLINDRICAL WORKPIECE**

**S.S. Strugov**, *Strugov\_s174@mail.ru*,

**V.A. Ivanov**, *ivanovva@susu.ru*,

**V.G. Sherkunov**, *sherkunovvg@susu.ru*

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

The paper reviews the methods of stress-strain state estimation in the upset of a cylindrical workpiece developed by L. Prandtl, G.Ya. Gun and V.L. Kolmogorov. These methods were compared using numerical simulation by DEFORM-3D software and experiment. The test task was the upset of a cylindrical workpiece made of lead with the initial height to diameter ratio of 0.53. The final relative strain of the workpiece was 0.18. It was found that the engineering methods (those of L. Prandtl and G.Ya. Gun) allow to obtain the lower boundary of the upset forces. V.L. Kolmogorov's method belonging to the class of variational methods, and computer modeling in DEFORM-3D give the most close agreement to experimental results. At the same time it is to be noted that the variational methods in pure form are highly labor-intensive in the pre-processing of even simple tasks and cannot be used to solve practical problems in industry. Computer modeling in DEFORM-3D allows to get the desired results in a short time, and the process of forming analysis is facilitated by the visualization of the problem statement and its solution process. A significant drawback of computer simulation is the high software cost.

*Keywords: upset; upset load; stress-strain state; estimation methods; numerical simulation; DEFORM-3D.*

**References**

1. Semenov E.I. *Kovka i shtampovka* [Forging and Stamping]. Vol. 2. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 592 p.
2. Storozhev M.V., Popov E.A. *Teoriya obrabotki metallov davleniem* [Theory of Metal Forming]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 424 p.
3. Gun G.Ya. *Teoreticheskie osnovy obrabotki metallov davleniem* [Theoretical Bases of Metal Forming]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1980. 456 p.
4. Kolmogorov V.L. *Mekhanika obrabotki metallov davleniem* [Mechanics of Metal Forming]. Ekaterinburg, USTU – UPI Publ., 2001. 835 p.

*Received 7 October 2016*

---

**ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ**

Стругов, С.С. Сравнение методов оценки напряженно-деформированного состояния при осадке цилиндрической заготовки / С.С. Стругов, В.А. Иванов, В.Г. Шеркунов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». – 2016. – Т. 16, № 4. – С. 140–146. DOI: 10.14529/met160416

**FOR CITATION**

Strugov S.S., Ivanov V.A., Sherkunov V.G. Comparison of Methods of Stress-Strain State Estimation in the Upset of a Cylindrical Workpiece. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Metallurgy*, 2016, vol. 16, no. 4, pp. 140–146. (in Russ.) DOI: 10.14529/met160416