КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp1503010**

УРАВНЕНИЯ ОСКОЛКОВА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, А.С. Конкина

В настоящее время возникла необходимость создания адекватной математической модели, описывающей дорожное движение. Математическая теория управления транспортными потоками сейчас активно развивается в работах школы А.Б. Куржанского, где транспортный поток уподобляется несжимаемой жидкости, и, как следствие, рассматриваются гидродинамические модели, основанные, например, на системе Навье – Стокса. В отличие от упомянутого направления авторы этой статьи помимо несомненных свойств транспортного потока, рассматриваемых ранее, таких как вязкость и несжимаемость, предлагают учитывать еще и его упругость. Действительно, при включении запрещающего сигнала светофора транспортные средства мгновенно не останавливаются, а плавно снижают скорость вплоть до остановки, накапливаясь перед стоп-линией. Аналогично при включении разрешающего сигнала светофора транспортные средства не стартуют мгновенно и одновременно, а трогаются с места друг за другом, постепенно набирая скорость. Тем самым транспортный поток проявляет эффект ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям, которые описываются системой уравнений Осколкова.

В первой части статьи обосновывается линейная математическая модель, т.е. конвективные члены в уравнениях Осколкова отсутствуют. В контексте модели это означает, что перестроениями транспортных средств можно пренебречь. Во второй части модель исследуется на качественном уровне, т.е. формулируется теорема о существовании единственного решения поставленной задачи и приводятся наброски ее доказательства.

Ключевые слова: уравнения Осколкова; геометрические графы; задача Коши; транспортные потоки.

Светлой памяти профессора Альфредо Лоренци посвящается

Введение. Данная заметка инспирирована великолепным докладом А.Б. Куржанского [1], сделанного 16 июня 2014 года на общем пленарном заседании XII Всероссийского совещания по проблемам управления, проходившего в ИПУ РАН (Россия, Москва). В докладе помимо прочего была предложена модель дорожного движения в виде уравнений Навье – Стокса, заданных на графе. Заметим, что представление дорожного движения посредством гидродинамических моделей не ново и к настоящему времени имеет солидную историю (см. например, [2], гл. 2). Однако, модель Куржанского следует признать новой, поскольку в ней впервые сделан акцент на таких несомненных свойствах транспортного потока, как вязкость и несжимаемость.

Развивая этот подход, мы предлагаем следующее: во-первых, уравнения Навье – Стокса заменить более общими уравнениями Осколкова, которые учитывают не только вязкость и несжимаемость потока, но и его упругость. Действительно, при включении запрещающего сигнала светофора транспортные средства мгновенно не останавливаются, а плавно снижают скорость вплоть до остановки, накапливаясь перед стоп-линией. Аналогично при включении разрешающего сигнала светофора транспортные средства не стартуют мгновенно и одновременно, а трогаются с места друг за другом, постепенно набирая скорость. Тем самым транспортный поток проявляет эффект ретардации, свойственный вязкоупругим несжимаемым жидкостям (см. детали в [3]). Во-вторых, уравнения Осколкова мы рассматриваем на геометрическом графе, главным отличием которого является постановка в соответствие каждому ребру двух положительных чисел, отвечающих (в нашем случае) его «длине» и «ширине». Отметим, что на возможность моделирования транспортных потоков посредством геометрических графов указывали еще создатели этой теории [4].

Отправной точкой наших рассуждений послужит [5], где уравнения Осколкова на геометрическом графе представляют модель вязкоупругой несжимаемой жидкости (например, нефти с высоким содержанием парафинов), текущей по разветвленной системе трубопроводов. В контексте рассматриваемой здесь задачи данную модель можно рассматривать как движение транспортного потока по дорогам, где на перекрестках круговое движение или стоят (возможно, многоуровневые) развязки без светофоров. Изучение нашей задачи мы будем проводить, опираясь на идеи и пользуясь методами теории уравнений соболевского типа [6]. В последнее время данная теория получила мощный стимул в своем развитии [7] – [10]. Обратим внимание на такие неожиданные ее ответвления как теория леонтьевского типа [11], теории оптимальных измерений [12], а также на ее приложение к изготовлению строительных смесей [13]. Особо отметим активную поддержку теории уравнений соболевского типа А.П. Осколковым [14]. Укажем еще на существование других успешных методов изучения вырожденных уравнений [15].

Итак, данная заметка кроме введения и списка литературы содержит две части. В первой обосновывается линейная (простоты ради) математическая модель, т.е. конвективные члены в уравнениях Осколкова отсутствуют. В контексте модели это означает, что мы пренебрегаем перестроениями транспортных средств. Во второй части модель исследуется на качественном уровне, т.е. формулируется теорема о существовании единственного решения поставленной задачи и приводятся наброски ее доказательства. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия авторов.

Построение математической модели. Рассмотрим конечное упорядоченное множество $\mathbf{\Gamma} = \{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_i, \ldots\}$ конечных связных ориентированных графов $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i(\mathcal{V}_i, \mathcal{E}_i)$, где $\mathcal{V}_i = \{V_{ij}\}$ – множество вершин, а $\mathcal{E}_i = \{E_{ik}\}$ – множество ребер, причем каждому ребру E_{ik} каждого графа $\mathbf{G}_i$ ставится в соответствие два числа l_{ik}, $b_{ik} \in \mathbb{R}_+$, отвечающие его «длине» и «ширине» соответственно. (Безусловно, в контексте математической модели величины l_{ik} и b_{ik} безразмерны, однако для наглядности удобно представлять, что l_{ik} измеряется в линейных метрических единицах, например, километрах или милях, а вот b_{ik} равно количеству полос движения на проезжей части в одну сторону). На каждом ребре E_{ik} каждого графа $\mathbf{G}_i$ зададим линейное уравнение Осколкова

$$\lambda_i u_{ikt} - u_{iktxx} = \nu_i u_{ikxx} + f_{ik}. \tag{1}$$

Здесь $u_{ik} = u_{ik}(x,t)$, $x \in [0, l_{ik}]$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ ($\equiv \{0\} \cup \mathbb{R}_+$) характеризует среднюю скорость транспортного потока на E_{ik}; $f_{ik} = f_{ik}(x,t)$, $(x,t) \in [0, l_{ik}] \times \overline{\mathbb{R}}_+$, отвечает той (усредненной) силе, которая заставляет крутиться колеса транспортных средств. Коэффициент λ_i равен единице, поделенной на коэффициент ретардации, который может принимать отрицательные значения, поэтому считаем $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Коэффициент ν_i отвечает за вязкость транспортного потока, т.е. за его способность "гасить"резкие перепады скорости; по смыслу $\nu_i \in \mathbb{R}_+$.

Теперь обсудим условия, связывающие решения различных уравнений (1) в вершинах графа. Поскольку в данной модели вершины ассоциированы с перекрестками, то условия на скоростной режим при проезде перекрестка безусловно очень важны. Первым рассмотрим *условие непрерывности*

$$u_{ik}(0,t) = u_{im}(l_{im}, t),\ \forall E_{ik} \in E^{\alpha}(V_{ij}),\ \forall E_{im} \in E^{\omega}(V_{ij}). \tag{2}$$

Здесь $E^{\alpha(\omega)}(V_{ij})$ обозначено множество ребер графа $\mathbf{G}_i$, выходящих из вершины V_{ij} (входящих в вершину V_{ij}). В контексте нашей модели условие (2) означает, что скорость въезда транспортного средства на перекресток должна равняться скорости съезда. (Это условие совершенно естественно, иначе возможны либо заторы на перекрестках, либо ДТП). Кроме (2) нам потребуется *условие баланса потоков*

$$\sum_{E_{ik}\in E^{\alpha}(V_{ij})} b_{ik}u_{ikx}(0,t) - \sum_{E_{im}\in E^{\omega}(V_{ij})} b_{im}u_{imx}(l_{im},t) = 0, \tag{3}$$

которое требует, чтобы количество выезжающих на перекресток транспортных средств было равно количеству съезжающих. Особо отметим, что (2) существует только если

$$\mathbf{P}\left\{(E^{\alpha}(V_{ij}) \neq \emptyset) \bigwedge (E^{\omega}(V_{ij}) \neq \emptyset)\right\} = 1. \tag{4}$$

Что же касается (3), то оно выполняется и при нарушении (4). Например, в какую-либо вершину какого-нибудь графа из множества $\mathbf{\Gamma}$ входит (или выходит из нее) только одно ребро. Тогда (3) в этой вершине превращается в однородное условие Неймана (см. подробности в [5], [7]), а (2) в силу запрета (4) попросту исчезает.

Условия (2) – (4) имеют место в тех вершинах графа $\mathbf{G}_i$, которые ассоциированы с нерегулируемыми перекрестками. Рассмотрим вершину V_{ij} графа $\mathbf{G}_i$, ассоциированную с перекрестком со светофорами. Для нее мы потребуем выполнение (4) с дополнительным условием

$$E^{\omega}(V_{ij}) = E^{\omega}_{op}(V_{ij}) \cup E^{\omega}_{cl}(V_{ij}),\ \ E^{\omega}_{op(cl)}(V_{ij}) \neq \emptyset,\ \ E^{\omega}_{op}(V_{ij}) \cap E^{\omega}_{cl}(V_{ij}) = \emptyset. \tag{5}$$

Множество $E^{\omega}_{op(cl)}(V_{ij})$ содержит входящие в вершину V_{ij} ребра, соответствующие въездам на перекресток с разрешающим (запрещающим) сигналом светофора. Далее, зададим условия непрерывности и баланса потоков

$$u_{ik}(0,t) = u_{im}(l_{im},t),\ \forall E_{ik} \in E^{\alpha}(V_{ij}),\ \forall E_{im} \in E^{\omega}_{op}(V_{ij}); \tag{6}$$

$$\sum_{E_{ik}\in E^{\alpha}(V_{ij})} b_{ik}u_{ikx}(0,t) - \sum_{E_{im}\in E^{\omega}_{op}(V_{ij})} b_{im}u_{imx}(l_{im},t) = 0; \tag{7}$$

а также условие «запрета на движение»

$$u_{ik}(l_{ik},t) = 0,\ \forall E_{ik} \in E^{\omega}_{cl}(V_{ij}). \tag{8}$$

Другими словами, мы считаем все графы множества $\mathbf{\Gamma}$ геометрически идентичны, т.е. $\{\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \ldots = \mathbf{G}_i = \ldots\}$. Различаются только условия (4) – (8), причем только в тех вершинах, которые соответствуют перекресткам со светофорами.

Перейдем к рассмотрению начальных условий в нашей модели. Оговоримся сразу, что в данной заметке мы ограничимся рассмотрением только условий Коши. Другие же условия, как например, условие Шоуолтера – Сидорова или начально-конечные условия [7], характерные для уравнений соболевского типа, мы намереваемся рассмотреть позже. Итак рассмотрим отрезок времени $[0,\tau]$, в течение которого функционирует наша модель. (Это может быть несколько часов, рабочий или выходной день, сутки, неделя и т.д.) Точками $\{\tau_i\}$ разобьем $[0,\tau]$ на количество отрезков $[\tau_{i-1},\tau_i]$ равное количеству графов $\mathbf{G}_i$ во множестве $\mathbf{\Gamma}$ и сопоставим каждому графу $\mathbf{G}_i$ отрезок $[\tau_{i-1},\tau_i]$. (Первому графу $\mathbf{G}_1$ сопоставим отрезок $[0,\tau_1]$, а последнему, допустим с номером n, – отрезок $[\tau_{n-1},\tau]$). В контексте нашей модели светофоры могут менять свое состояние только в моменты времени $\{\tau_i\}$, открывая тем самым движение по одним дорогам и закрывая по другим. Поэтому начальными условиями будут

$$u_{1k}(x,0) = u_{0k}(x),\ x \in (0, l_{1k}). \tag{9}$$

Основной результат. Приступим к поиску ответа на вопрос – каким должны быть начальные данные $u_{0k}(x)$, чтобы наша модель однозначно существовала в течение всего промежутка времени $[0,\tau]$? Другими словами, какими должны быть $u_{0k}(x)$, $x \in [0, l_{1k}]$, чтобы решения уравнений (1) существовали и были единственными на промежутке времени $[\tau_{i-1}, \tau_i]$. Подчеркнем еще раз, что мы будем использовать идеи и методы [6], которые оказались успешными в аналогичных случаях [5, 7].

Итак, аналогично [5, 7] введем в рассмотрение гильбертовы пространства $\mathbf{L_2}(\mathbf{G}_i) = \{g_i = (g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{ik}, \dots) : g_{ik} \in L_2(0, l_{ik})\}$, $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) = \{u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik}, \dots) : u_{ik} \in W_2^1(0, l_{ik})$, и выполнены либо условия (2), (4), либо условия (4), (5), (6), (8) в каждой вершине $V_{ij} \in \mathcal{V}_i\}$ со скалярными произведениями $\langle g, h\rangle_i = \sum\limits_{E_{ik}\in\mathcal{E}_i} b_{ik} \int_0^{l_{ik}} u_{ik} v_{ik} dx$, $[u, v]_i = \sum\limits_{E_{ik}\in\mathcal{E}_i} b_{ik} \int_0^{l_{ik}} (u_{ikx} v_{ikx} + u_{ik} v_{ik})\, dx$ соответственно. Отождествим $\mathbf{L_2}(\mathbf{G}_i)$ со своим сопряженным и через $\mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ обозначим сопряженное к $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$ относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство. Отметим плотные и непрерывные вложения $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathbf{L_2}(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ и заметим, что в силу теорем вложения Соболева функции из $W_2^1(0, l_{ik})$ п.в. на $[0, l_{ik}]$ совпадают с абсолютно непрерывными функциями, поэтому пространства $\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$ определены корректно. Возьмем $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ и формулой

$$\langle L_i u_i, v_i\rangle_i = \sum_{E_{ik}\in\mathcal{E}_i} b_{ik} \int_0^{l_{ik}} (u_{ikx} v_{ikx} + \lambda_i u_{ik} v_{ik}) dx,\ u_i, v_i \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i),$$

зададим оператор $L_i \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}(\mathbf{G}_i); \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i))$. Рассмотрим пространство $\mathfrak{A}(\mathbf{G}_i) = \{u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ik}, \dots) : u_{ik} \in C^2(0, l_{ik}) \cap C^1[0, l_{ik}]$, и выполнены либо условия (2) – (4), либо условия (4) – (8) в каждой вершине $V_{ij} \in \mathcal{V}_i\}$. Очевидны плотные и непрерывные вложения $\mathfrak{A}(\mathbf{G}_i) \hookrightarrow \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$, причем $\langle(\lambda_i u_i - u_{ixx}), v_i\rangle_i = \langle L_i u_i, v_i\rangle_i$ при всех u_i, $v_i \in \mathfrak{A}(\mathbf{G}_i)$. Таким образом, условия баланса потоков ((3) или (7) «спрятаны» в смысле О.А. Ладыженской в определение операторов L_i. Возьмем $\nu_i \in \mathbb{R}_+$, положим $M_i = \nu_i(\lambda_i \mathbb{I}_i - L_i)$ ($\mathbb{I}_i : \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i) \to \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ – оператор вложения) и рассмотрим уравнение

$$L_i u_{it} = M_i u_i + f_i. \tag{10}$$

Вектор-функцию $u_i \in C^1((\tau_{i-1}, \tau_i); \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i))$, удовлетворяющую (10) при некотором $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$, назовем *решением уравнения* (10). Решение $u_i \in C^1((\tau_{i-1}, \tau_i); \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)) \cap C([\tau_{i-1}, \tau_i)]; \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i))$ уравнения (10), удовлетворяющее условию Коши

$$u_i(\tau_{i-1}) = u_{0i} \tag{11}$$

при некотором $u_{0i} \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$, назовем *решением задачи* (10), (11). Справедлива

Лемма 1. [7] *При любых λ_i, $\nu_i \in \mathbb{R}_+$, $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ и $u_{0i} \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_i)$ существует единственное решение задачи (10), (11).*

Теперь условиями $u_{m+1}(\tau_m) = u_m(\tau_m)$, $m = 1,\ 2,\ \dots,\ i,\ \dots,$ «склеим»решения задач (10), (11), существование и единственность которых вытекает из леммы 1. С одной стороны, по определению $u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_m)$; с другой стороны, лемма 1 требует, чтобы $u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_{m+1})$. Сформулируем следующее утверждение:

Теорема 1. *При любых λ_i, $\nu_i \in \mathbb{R}_+$, $f_i \in \mathfrak{F}(\mathbf{G}_i)$ и*

$$u_0 \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_1) \quad \text{таких, что } u_m(\tau_m) \in \mathfrak{U}(\mathbf{G}_{m+1}), m = 1, 2, \ldots, i, \ldots, \tag{12}$$

существует единственное решение задачи (1), ((2), (4)) или ((4), (5), (6), (8)), (9).

Доказательство теоремы 1 в силу леммы 1 тривиально. Однако проверка условий (12) может оказаться чересчур сложной. В свое оправдание заметим, что они обязательно выполняются, если, например, все вершины графа ассоциированы с нерегулируемыми перекрестками. Или в случае $f_i = u_0 = 0$, когда все решения тождественно равны нулю. Это соответствует двум ситуациям: либо на дорогах вообще нет транспортных средств, либо все транспортные средства на дорогах неподвижны (например, везде пробки).

Литература

1. Куржанский А. Б. Текущие задачи динамики и теории управления, мотивации, теория и вычисления. Дорожная карта [Электронный ресурс]: пленар. докл. на заседании «П1 – БКЗ Общее пленарное заседание 1» / А.Б. Куржанский // XII Всерос. совещание по проблемам управления, Россия, Москва, ИПУ РАН, 16–19 июня 2014 г. – Режим доступа: http://vspu2014.ipu.ru/conference/section_meeting_pubs?target=7860. – 09.07.2015
2. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А. и др.; приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А. и др.; под ред. А.В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с.
3. Осколков, А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / Осколков А.П. // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1976. – Т. 59. – С. 133–177.
4. Дифференциальные уравнения на геометрических графах: монография / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 268 с.
5. Свиридюк Г.А. Фазовое пространство одной неклассической модели / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Изв. вузов. Математика. – 2005. – №11. – С. 47–52.
6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Kӧln; Tokyo: VSP, 2003.
7. Zagrebina, S.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline / S.A. Zagrebina, E.A. Soldatova, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators – Theory and Applications / [International Conference], Bedlewo, Poland, Oktober 2013. – Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 317–325. – (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics; vol. 113).
8. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. — Челябинск: Изд. Центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
9. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. — Челябинск: Изд. Центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
10. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. — Челябинск: Изд. Центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
11. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. …д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / А.В. Келлер; Южно-Уральский государственный университет. – Челябинск, 2011.
12. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 12. – С. 56–68.
13. Шестаков А.Л. Математическое моделирование состава строительных смесей с заданными свойствами /А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк, М.Д. Бутакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, №1. – С. 50–56.

14. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / Осколков А.П. // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
15. Favini A. First Order Regular and Degenerate Identification Differential Problems / A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Article ID 393624, 42 p.

Георгий Анатольевич Свиридюк, доктор физико-математических наук, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sviridyuk@susu.ac.ru.

Софья Александровна Загребина, доктор физико-математических наук, кафедра дифференциальных и стохастических уравнений, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), zagrebina_sophiya@mail.ru.

Александра Сергеевна Конкина, ассистент, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alexandra.konkina@yandex.ru.

Поступила в редакцию 20 января 2015 г.

MSC 35K70 **DOI: 10.14529/mmp1503010**

The Oskolkov Equations on the Geometric Graphs as a Mathematical Model of the Traffic Flow

G.A. Sviridyuk, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, sviridyuk@susu.ac.ru**,**
S.A. Zagrebina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, zagrebina_sophiya@mail.ru**,**
A.S. Konkina South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, alexandra.konkina@yandex.ru.

Currently there arose a necessity of creation of adequate mathematical model describing the flow of traffic. The mathematical traffic control theory is now actively developing in the works of A.B. Kurzhanski and his school, where the transport flow is considered to be similar to the flow of an incompressible fluid, and consequently the hydrodynamic model, for example based on the system of Navier – Stokes Equations, is used. In addition to the obvious properties of traffic flow covered previously, such as viscosity and incompressibility, the authors of this article propose to take into consideration its elasticity. Indeed, when you turn on a forbidding signal of a traffic light vehicles do not stop instantly and smoothly reduce their speed up to stop accumulating before the stop line. Similarly, if you turn on an allowing signal of the traffic light vehicles do not start instantaneously and simultaneously, they start driving one after another, gradually raising up the speed. Thus the transport flow has an effect of retardation, which is typical for viscoelastic incompressible fluids described by a system of Oskolkov equations.

The first part of the article substantiates a linear mathematical model, i.e. the model without convective terms in the Oskolkov equations. In the context of the model this means that transposition of vehicles can be neglected. In the second part the model is investigated on a qualitative level, i.e. we formulate the existence of a unique solution theorem for the stated problem and provide an outline of its proof.

Keywords: Oskolkov equation; geometric graph; Cauchy problem; traffic flows.

References

1. Kurzhanski A.B. *The Current Problems of the Dynamics and Control Theory, Motivation Theory and Computation.* Road map [electronic resource]: plenary lecture at the meeting General Plenary. XII Russian Conference on Control, Moscow, Russia IPU RAN, 16 – 19 june 2014. Access mode: http://vspu2014.ipu.ru/conference/section_meeting_pubs?target=7860. – 09.07.2015 (in Russian)
2. Gasnikov A.V., Klenov S.L., Nurminski E.A., Kholodov Ya.A. etc. *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov* [Introduction to the Mathematical Modelling of Traffic Flows]. Moscow, MIPT, 2010. 362 p.
3. Oskolkov A. P. Some Nonstationary Linear and Quasilinear Systems Occurring in the Investigation of the Motion of Viscous Fluids. *Journal of Soviet Mathematics*, 1978, vol. 10, no. 2, pp. 299–335.
4. Pokornyi Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. *Differential Equations on Geometrical Graphs.* Moscow, FizMatLit, 2004. (in Russian).
5. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. The Phase Space of a Nonclassical Model. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2005, vol. 49, no. 11, pp. 44–49.
6. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht; Boston; Köln; Tokyo, VSP, 2003.
7. Zagrebina S.A., Soldatova E.A., Sviridyuk G.A. The Stochastic Linear Oskolkov Model of the Oil Transportation by the Pipeline. *Semigroups of Operators – Theory and Applications.* [International Conference], Bedlewo, Poland, Oktober 2013. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer Int. Publ. Switzerland, 2015, pp. 317–325,(Springer Proceedings in Mathematics & Statistics; vol. 113).
8. Manakova N.A. *Optimal Control Problem for the Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 88 p. (in Russian)
9. Sagadeeva M.A. *Dichotomy of Solutions of Linear Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 107 p. (in Russian)
10. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of High Order.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. 107 p. (in Russian)
11. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa* [Numerical Reseach of Optimal Control Problem for Leontieff Type Models. The Dissertation for Scientific Degree of the Doctor of Physical and Mathematical Sciences]. Chelyabinsk, South Ural State University, 2011. 252 p.
12. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. The Numerical Solution of the Optimal Demension Problem. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079
13. Shestakov A. L. , Sviridyuk G. A., Butakova M. D. The Mathematical Modelling of the Production of Construction Mixtures with Prescribed Properties. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software* (Bulletin SUSU MMCS), 2015, vol. 8, no. 1, pp. 100–110.
14. Oskolkov A. P. Nonlocal Problems for Some class Nonlinear Operator Equations Arising in the Theory Sobolev Type Equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1993, vol.64, no. 1, pp. 724–736.
15. Favini A., Lorenzi A., Tanabe H. First Order Regular and Degenerate Identification Differential Problems. *Abstract and Applied Analysis*, 2015. Article ID 393624, 42 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2015/3936.

Received January 20, 2015