Математика

УДК 519.635 DOI: 10.14529/mmph200401

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЯВНОМ ВИДЕ

М.Л. Зайцев[1], В.Б. Аккерман[2]
[1] *г. Москва, Российская Федерация*
[2] *Университет Западной Вирджинии, г. Моргантаун, США*
E-mail: mlzaytsev@gmail.com, Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Авторами был предложен ранее общий способ нахождения частных решений у переопределенных систем УрЧП, где число уравнений больше числа неизвестных функций. В данной работе мы предлагаем алгоритм нахождения решений у переопределенных систем УрЧП, где применяем простой в описании способ нахождения явного решения у переопределенных алгебраических (полиномиальных) уравнений. С помощью данного алгоритма решение некоторых переопределенных систем УрЧП может быть получено в явном виде. Основная сложность этого алгоритма – это огромное количество возникающих полиномиальных уравнений, которых нужно исследовать и решить численно или в явном виде. Например, переопределенные уравнения гидродинамики, полученные ранее авторами, дают минимум 10 миллионов таких уравнений. Однако, если их решить в явном виде, то можно выписать решение уравнений гидродинамики в общем виде, что представляет большой научный интерес.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений; УрЧП; размерность дифференциальных уравнений; алгебраические (полиномиальные) уравнения; символьные вычисления.

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных (уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях [1, 2]. Авторами был предложен общий способ снижения размерности для произвольных систем дифференциальных уравнений в частных производных (УрЧП), который позволяет свести системы УрЧП в области к системам на поверхности [3–6]. С точки зрения численных методов редукция выгодна в том смысле, что не надо решать дифференциальные уравнения во всем пространстве. Требуется исходную систему УрЧП дополнить уравнениями связи и произвести преобразования. На основе этой идеи в работах авторов [5, 6] также был предложен метод нахождения частных решений у переопределенных систем УрЧП, где число уравнений больше числа неизвестных функций, которые очень важны для численных расчетов. В этом методе нахождение решений сводится к решению систем обыкновенных неявных уравнений. В статьях авторов [3–7] приводятся переопределенные уравнения гидродинамики, а также способы переопределения любых систем УрЧП. В данной работе мы предлагаем алгоритм нахождения решений у переопределенных систем УрЧП, где применяем способ нахождения явного решения у переопределенных алгебраических уравнений. С помощью данного алгоритма решение некоторых переопределенных систем УрЧП может быть получено в явном виде.

1. Описание метода

Требуется найти решения у переопределенной системы из $p+n$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v(\mathrm{x})$, $v=1...p$, $\mathrm{x}=(x_1,...x_m)$

$$H_k\left(\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}},...\frac{\partial S_v}{\partial \mathrm{x}}...\frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{x}},S_1,...S_v,...S_p,\mathrm{x}\right)=0,\ v=1...p,\ k=1...(p+n), \tag{1}$$

где $H_k\left(\partial S_1/\partial \mathrm{x} \ldots \partial S_\nu/\partial \mathrm{x}, \ldots \partial S_p/\partial \mathrm{x}, S_1 \ldots S_\nu, \ldots S_p, \mathrm{x}\right)$, $k = 1 \ldots (p+n)$ достаточно гладкие функции своих аргументов $\partial S_\nu/\partial \mathrm{x}$, S_ν, $\mathrm{x} = (x_1, \ldots x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\nu = 1 \ldots p$. Применим метод, изложенный в статьях [5, 6]. Мы рассматриваем следующую систему уравнений вида

$$P_\alpha\left(\ldots Q_\beta, \ldots \mathrm{x}\right) = \frac{\partial^{(i_1+\ldots+i_m)}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}}\left[H_k\left(\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}}, \ldots \frac{\partial S_\nu}{\partial \mathrm{x}} \ldots \frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{x}}, S_1, \ldots S_\nu, \ldots S_p, \mathrm{x}\right)\right] = 0,\ \nu = 1 \ldots p,\ k = 1 \ldots (p+n) \quad (2)$$

относительно неизвестных вида

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+\ldots+j_m)} S_\nu}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}},\ \nu = 1 \ldots p. \quad (3)$$

Здесь $\alpha = \alpha(k, i_1, \ldots i_m) \in \{1, 2 \ldots N_H\}$, $\beta = \beta(\nu, j_1, \ldots j_m) \in \{1, 2 \ldots N_S\}$ функции от индексов (мульти-индексов) такие, что

$$Q_{\beta(\nu,0,\ldots0)} = S_\nu,\ \nu = 1 \ldots p, \quad (4)$$

$$P_{\alpha(k,0,\ldots0)}\left(\ldots Q_\beta, \ldots \mathrm{x}\right) = H_k\left(Q_{\beta(\nu,1,\ldots0)}, \ldots Q_{\beta(\nu,0,\ldots1)}, \ldots Q_{\beta(\nu,0,\ldots0)}, \ldots \mathrm{x}\right),\ k = 1 \ldots (p+n), \quad (5)$$

$$i_1 = 0 \ldots (N_1 - 1),\ i_2 = 0 \ldots (N_2 - 1),\ \ldots\ i_m = 0 \ldots (N_m - 1), \quad (6)$$

$$j_1 = 0 \ldots N_1,\ j_2 = 0 \ldots N_2,\ \ldots\ j_m = 0 \ldots N_m. \quad (7)$$

Имеем здесь также

$$N_H = (p+n) N_1 N_2 \cdots N_m, \quad (8)$$

$$N_S = p \cdot (N_1+1)(N_2+1)\cdots(N_m+1). \quad (9)$$

Определим конкретный вид функций $\alpha = \alpha(k, i_1, \ldots i_m)$ и $\beta = \beta(\nu, j_1, \ldots j_m)$ по формулам

$$\alpha = \alpha(k, i_1, \ldots i_m) = k + i_1(p+n) + i_2(p+n)N_1 + \ldots + i_m(p+n)N_1 \cdots N_{m-1}$$

$$\beta = \beta(\nu, j_1, \ldots j_m) = \nu + j_1 p + j_2 p(N_1+1) + \ldots + j_m p(N_1+1)\cdots(N_{m-1}+1).$$

В частности, $\alpha = \alpha(k, 0, \ldots 0) = k$, $\beta = \beta(\nu, 0, \ldots 0) = \nu$,

$$\alpha = \alpha\big(k, (N_1-1), \ldots (N_m-1)\big) = k + (N_1-1)(p+n) + (N_2-1)(p+n)N_1 + \ldots + (N_m-1)(p+n)N_1 \cdots N_{m-1} =$$
$$= k + (p+n)\big((N_1-1) + (N_2-1)N_1 + \ldots + (N_m-1)N_1 \cdots N_{m-1}\big) = k + (p+n)(N_1 \cdots N_m - 1) =$$
$$= N_H + k - (p+n),$$

$$\beta = \beta(\nu, N_1, \ldots N_m) = \nu + N_1 p + N_2 p(N_1+1) + \ldots + N_m p(N_1+1)\cdots(N_{m-1}+1) =$$
$$= \nu + p\big((N_1+1) - 1 + (N_2+1-1)(N_1+1) + \ldots + (N_m+1-1)(N_1+1)\cdots(N_{m-1}+1)\big) =$$
$$= \nu + p\big((N_1+1)\cdots(N_m+1) - 1\big) = N_S + \nu - p.$$

Рассмотрим матрицу

$$A_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_\beta}\right),\ \alpha = 1 \ldots N_H,\ \beta = 1 \ldots N_S. \quad (10)$$

Пусть ее ранг равен N_S^{real} количеству неизвестных Q_β, реально присутствующих в уравнениях (2). Можно показать, что

$$N_S^{real} \le N_H \frac{p}{(p+n)}\left(1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{N_l}\right). \quad (11)$$

Действительно, в уравнениях (2), в целом, присутствуют только неизвестные вида:

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+\ldots+j_m)} S_\nu}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}},\ \nu = 1 \ldots p,\quad j_1 = 0 \ldots (N_1-1),\ j_2 = 0 \ldots (N_2-1),\ \ldots\ j_m = 0 \ldots (N_m-1)$$

и

$$Q_\beta = \frac{\partial^{(j_1+\ldots+j_m)} S_v}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_s^{N_s} \ldots \partial x_m^{j_m}},\ v = 1\ldots p,\ s = 1\ldots m,\ j_1 = 0\ldots(N_1 - 1), \ldots\ j_{s-1} = 0\ldots(N_{s-1} - 1),$$

$$j_{s+1} = 0\ldots(N_{s+1} - 1) \ldots\ j_m = 0\ldots(N_m - 1).$$

Число этих переменных равно $pN_1 N_2 \cdots N_m \left(1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{N_l}\right) = N_H \frac{p}{(p+n)} \left(1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{N_l}\right)$. В целом, неизвестных (3) будет не более этого числа.

Рассмотрим **расширенную** переопределенную систему неявных уравнений вида

$$P_{\alpha^*}\left(\ldots Q_{\beta^*}, \ldots \mathrm{x}\right) = \frac{\partial^{(i_1+\ldots+i_m)}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}} \left[H_k \left(\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}}, \ldots \frac{\partial S_v}{\partial \mathrm{x}} \ldots \frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{x}}, S_1, \ldots S_v, \ldots S_p, \mathrm{x} \right) \right] = 0, \tag{12}$$

$$v = 1\ldots p,\ k = 1\ldots(p+n)$$

относительно неизвестных вида

$$Q_{\beta^*} = \frac{\partial^{(j_1+\ldots+j_m)} S_v}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}},\ v = 1\ldots p. \tag{13}$$

Но функции от мульти-индексов $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m) \in \{1, 2\ldots N_H^w\}$, $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \ldots j_m) \in \{1, 2\ldots N_S^w\}$ в отличие от (6), (7) пусть определяются из условий:

$$i_1 = 0\ldots N_1,\ i_2 = 0\ldots N_2,\ \ldots\ i_m = 0\ldots N_m,\ k = 1\ldots(p+n), \tag{14}$$

$$j_1 = 0\ldots(N_1 + 1),\ j_2 = 0\ldots(N_2 + 1),\ \ldots\ j_m = 0\ldots(N_m + 1),\ v = 1\ldots p. \tag{15}$$

Определим конкретный вид функций $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m)$ и $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \ldots j_m)$ по формулам

$$\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m) = k + i_1(p+n) + i_2(p+n)(N_1+1) + \ldots + i_m(p+n)(N_1+1)\cdots(N_{m-1}+1),$$

$$\beta^* = \beta^*(v, j_1, \ldots j_m) = v + j_1 p + j_2 p(N_1+2) + \ldots + j_m p(N_1+2)\cdots(N_{m-1}+2).$$

Имеем здесь также

$$N_H^w = (p+n)(N_1+1)(N_2+1)\cdots(N_m+1), \tag{16}$$

$$N_S^w = p \cdot (N_1+2)(N_2+2)\cdots(N_m+2). \tag{17}$$

В частности, $\alpha^* = \alpha^*(k, 0, \ldots 0) = k$, $\beta^* = \beta^*(v, 0, \ldots 0) = v$, $\alpha^* = \alpha^*(k, N_1, \ldots N_m) = k + N_H^w - (p+n)$, $\beta^* = \beta^*(v, (N_1+1), \ldots (N_m+1)) = v + N_S^w - p$. Дифференцируя выражение (12) по переменной x_s, $s = 1\ldots m$, находим, что

$$P_{\tilde{\alpha}}\left(\ldots Q_{\beta^*}, \ldots \mathrm{x}\right) = \sum_{v=1}^{p} \sum_{j_1=0}^{N_1+1} \sum_{j_2=0}^{N_2+1} \ldots \sum_{j_m=0}^{N_m+1} \frac{\partial P_{\alpha^*}}{\partial Q_{\beta^*}} Q_{\tilde{\beta}} + \frac{\partial P_{\alpha^*}\left(\ldots Q_{\beta^*}, \ldots \mathrm{x}\right)}{\partial x_s} = 0, \tag{18}$$

где

$$\tilde{\alpha} = \alpha^*\left(k, i_1, \ldots (i_s + 1) \ldots i_m\right),\ \tilde{\beta} = \beta^*\left(v, j_1, \ldots (j_s + 1) \ldots j_m\right),\ s = 1\ldots m.$$

Здесь берутся индексы, что $i_s \le N_s - 1$, $j_s \le N_s$.

Любое из уравнений (12) (а также (18)) с индексом $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m)$ содержит неизвестные вида (13) с индексами $\beta^* = \beta^*(v, j_1, \ldots j_m)$, где $0 \le j_1 \le i_1 + 1$, … $0 \le j_m \le i_m + 1$ и $0 \le j_1 + \ldots + j_m \le i_1 + \ldots + i_m + 1$. Очевидно,

$$\frac{\partial P_{\alpha^*(k, i_1, \ldots i_s = (N_s - 1) \ldots i_m)}}{\partial Q_{\beta^*(v, j_1, \ldots j_s = N_s + 1, \ldots j_m)}} = 0, \tag{19}$$

т. е. слагаемые с индексом $\tilde{\beta} = \beta^*\left(v, j_1, \ldots (j_s + 1) = N_s + 2 \ldots j_m\right)$ отсутствуют, следовательно, рекуррентное соотношение (18) корректно.

Способ решения.

1. Выбираем $N_1, \ldots N_m$ так, чтобы $N_H \geq N_S$ (см. (8), (9)). Мы имеем следующие оценки [5, 6]:

$$N_H \geq (p+n)(mp/n)^m, \tag{20}$$

где минимум реализуется при $N_1 \approx N_2 \approx \ldots \approx N_m \approx mp/n$.

2. Определяем рекуррентно из (18) неявные уравнения (2) и (12), пользуясь (4), (5).
3. Составляем матрицу (10) из уравнений (2).
4. Решаем уравнения (12).
5. Подставляем их решения в матрицу (10).
6. Если ее ранг равен количеству неизвестных в уравнениях (2), то по формуле (4) находим решение исходной переопределенной системы (1).

Аналитические примеры использования метода приведены в работах [5, 6].

Систему уравнений (12), если она достаточно «хорошая», можно несколько упростить. Рассмотрим переопределенную систему из $p+n$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_\nu(\mathrm{x})$, $\nu = 1\ldots p$, $\mathrm{x} = (x_1, \ldots x_m)$ (1). Предположим, что $n \geq (m-1)p$. В случае $m=1$ (ОДУ) это выполняется всегда. Рассмотрим какие-нибудь $p+n$ уравнений с мульти-индексом $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m)$ из системы уравнений (12) с фиксированными индексами $(i_1, \ldots i_m)$, но $k = 1\ldots(p+n)$. По формуле (18) они могут быть записаны в виде

$$P_{\alpha^*}\left(\ldots Q_{\beta^*}, \ldots \mathrm{x}\right) = \sum_{\nu=1}^{p}\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial P_{\tilde{\alpha}_0}}{\partial Q_{\beta_s^0}} Q_{\tilde{\beta}_s} + \ldots = 0, \tag{21}$$

где $\alpha^* = \alpha^*(k, i_1, \ldots i_m)$, $\tilde{\alpha}_0 = \alpha^*(k, 0, \ldots 0)$, $\beta_s^0 = \beta^*\left(\nu, 0, \ldots \underset{s}{1} \ldots 0\right)$, $\tilde{\beta}_s = \beta^*\left(\nu, i_1, \ldots (i_s + 1) \ldots i_m\right)$, $s = 1\ldots m$, $\nu = 1\ldots p$, $k = 1\ldots(p+n)$.

Выражения $P_{\alpha^*}\left(\ldots Q_{\beta^*}, \ldots \mathrm{x}\right)$ содержат неизвестные Q_{β^*}, у которых $0 \leq j_1 + \ldots + j_m \leq i_1 + \ldots + i_m + 1$ и $0 \leq j_1 \leq i_1 + 1$, $\ldots$ $0 \leq j_m \leq i_m + 1$. Неизвестные Q_{β^*}, у которых $j_1 + \ldots + j_m = i_1 + \ldots + i_m + 1$, входят в уравнения (21) линейно. Очевидно, их количество равно mp штук**.** Следовательно, если соответствующий определитель не равен нулю, все они могут быть выражены в явном виде из системы $(p+n) \geq mp$ уравнений (21), которая относительно них линейна.

Таким образом можно утверждать, что в нашем случае любое неизвестное Q_{β^*}, где $\beta^* = \beta^*\left(\nu, j_1, \ldots j_m\right)$, $\nu = 1\ldots p$, выражается явно через неизвестные Q_{β^0}, где $\beta^0 = \beta^0\left(\nu, j_1^0, \ldots j_m^0\right)$, $\nu = 1\ldots p$ и $0 \leq j_1^0 + \ldots + j_m^0 < j_1 + \ldots + j_m$, $0 \leq j_1^0 \leq j_1 + 1$, $\ldots$ $0 \leq j_m^0 \leq j_m + 1$, а, следовательно, и через $Q_{\beta_s^0}$, где $\beta_s^0 = \beta^*\left(\nu, 0, \ldots \underset{s}{1} \ldots 0\right)$ и $\nu = 1\ldots p$, $s = 1\ldots m$, или $Q_{\beta^*(\nu,0,\ldots 0)} = S_\nu$, $\nu = 1\ldots p$. В результате получаем вместо (12) переопределенную систему неявных уравнений относительно $Q_{\beta^*(\nu,0,\ldots 0)} = S_\nu$, $\nu = 1\ldots p$.

2. Способ решения систем переопределенных алгебраических уравнений путем их редукции

Уравнения (2) и (12) относительно неизвестных Q_β, $j_1 + \ldots + j_m \geq 2$, $\nu = 1\ldots p$ являются алгебраическим. Существуют различные методы решения полиномиальных уравнений. В частности, распространен далеко нетривиальный алгоритм Бухбергера [8]. К решению систем переопределенных алгебраических уравнений в нашем случае можно применить следующий простой в описании метод.

Рассмотрим переопределенную систему из двух многочленов порядка n

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0, \tag{22}$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0, \tag{23}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0...n$, $a_n \neq 0$. Из (22) следует, что

$$a_n x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \; x^n = \frac{1}{a_n}\left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right). \tag{24}$$

Подставим (24) в (23). Имеем

$$b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = 0, \; b_n \frac{1}{a_n}\left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = 0. \tag{25}$$

В результате получим многочлен вида:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = 0, \tag{26}$$

где $c_j = b_j - \frac{b_n}{a_n} a_j$, $j = 0...(n-1)$. Пусть

$$c_{n-1} \neq 0. \tag{27}$$

Умножим обе части (26) на x и подставим вместо x^n его выражение из (24):

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^{i+1} = 0, \tag{28}$$

$$c_{n-1} x^n + \sum_{i=0}^{n-2} c_i x^{i+1} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{c_{n-1}}{a_n}\left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{n-2} c_i x^{i+1} = 0. \tag{30}$$

В результате получим многочлен вида:

$$\sum_{i=0}^{n-1} d_i x^i = 0, \tag{31}$$

где $d_j = c_{j-1} - \frac{c_{n-1}}{a_n} a_j$, $j = 0...(n-1)$, $c_{-1} = 0$.

Таким образом, мы получили два многочлена (26) и (31) порядка не более $n-1$. Покажем, что множества решений системы уравнений (22), (23) и системы (26), (31) совпадают при условии (27). Мы показали, что из (22), (23) следует (26), (31). Докажем обратное. Пусть x некоторое решение (26), (31). Умножим обе части (26) на x. Тогда выполняется уравнение (29). С другой стороны, выполняется уравнение (30), так как это иная форма записи (31). Вычтем почленно из (29) уравнение (30). Тогда находим, что

$$c_{n-1}\left[x^n + \frac{1}{a_n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)\right] = 0. \tag{32}$$

Следовательно, в силу условия (27) выполняется уравнение (22). Уравнение (23) тогда есть следствие (22) и (26). Что и требовалось доказать.

Пример 1. Рассмотрим переопределённую систему из двух квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{33}$$

$$px^2 + qx + r = 0. \tag{34}$$

Пусть $a \neq 0$. Из (33) следует, что

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}. \qquad (35)$$

Подставим (35) в (34). Тогда

$$\left(q - \frac{pb}{a}\right)x + \left(r - \frac{pc}{a}\right) = 0. \qquad (36)$$

Умножим (36) на x и подставим вместо x^2 выражение из (35). Следовательно,

$$\left(r - \frac{pc}{a} - \frac{qb}{a} + \frac{pb^2}{a^2}\right)x + \left(\frac{pbc}{a^2} - \frac{qc}{a}\right) = 0. \qquad (37)$$

Система уравнений (36), (37) равносильна системе (33), (34) при условии

$$\left(q - \frac{pb}{a}\right) \neq 0. \qquad (38)$$

Система (36), (37) имеет решение

$$x = -\frac{\left(r - \frac{pc}{a}\right)}{\left(q - \frac{pb}{a}\right)} \qquad (39)$$

при условии

$$\begin{vmatrix} \left(q - \frac{pb}{a}\right) & \left(r - \frac{pc}{a}\right) \\ \left(r - \frac{pc}{a} - \frac{qb}{a} + \frac{pb^2}{a^2}\right) & \left(\frac{pbc}{a^2} - \frac{qc}{a}\right) \end{vmatrix} = 0. \qquad (40)$$

Если условие (40) не выполняется, но верно (38), то система (33), (34) не имеет решений.

В случае переопределенной системы из более чем двух многочленов можно доказать аналогичное утверждение и найти условие, когда исходная система равносильна системе из такого же числа многочленов, но порядка меньшего, чем у первоначальной системы.

Рассмотрим общий случай переопределенной системы из $(m+1)$ алгебраических уравнений от m переменных

$$\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\dots\sum_{i_m=0}^{n_m} a^j_{(i_1,i_2,\dots i_m)}(x_1)^{i_1}\cdot(x_2)^{i_2}\cdots(x_m)^{i_m} = 0, \qquad (41)$$

где $a^j_{(i_1,i_2,\dots i_m)} \in \mathbb{R}$, $j = 1\dots(m+1)$. Систему (41) можно преобразовать к виду

$$\sum_{i_m=0}^{n_m} A^j_{i_m}(x_m)^{i_m} = 0,\ j = 1\dots(m+1), \qquad (42)$$

где

$$A^j_{i_m} = \sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\dots\sum_{i_{m-1}=0}^{n_{m-1}} a^j_{(i_1,i_2,\dots,i_m)}(x_1)^{i_1}\cdot(x_2)^{i_2}\cdots(x_{m-1})^{i_{m-1}}. \qquad (43)$$

Систему уравнений (42) можно рассмотреть, как переопределенную систему из $(m+1)$ алгебраических уравнений относительно переменной x_m, но с переменными коэффициентами (43). При определенных условиях ее можно равносильно редуцировать последовательно до системы из $(m+1)$ линейных уравнений по переменной x_m и найти ее решение в виде дробно-рационального выражения типа (39) от коэффициентов (43). Условиями существования этого решения в данном виде будут некоторые **дробно-рациональные** выражения типа (40), составленные из коэффициентов (43), в количестве m штук. Таким образом, фактически мы получим переопределенную систему из m алгебраических уравнений вида (41), где количество переменных $m-1$ уменьшено на единицу и так далее.

Пример 2. Рассмотрим переопределённую систему из трех алгебраических уравнений и двух неизвестных:

$$x^2 + y^2 = 10, \tag{44}$$

$$x^2 y = 3, \tag{45}$$

$$x + y = 2. \tag{46}$$

Из уравнения (44) следует, что

$$x^2 = 10 - y^2. \tag{47}$$

Поставим (47) в уравнение (45). Тогда

$$(10 - y^2)y = 3$$

или

$$y^3 - 10y + 3 = 0. \tag{48}$$

Умножим обе части уравнения (46) на x и подставим вместо x^2 выражение из (47). Тогда

$$10 - y^2 + yx = 2x$$

или

$$y^2 + (2 - y)x - 10 = 0. \tag{49}$$

Система уравнений (44)–(46) равносильна системе уравнений (46), (48) и (49), которая линейна относительно неизвестной x. Выразим x из (46)

$$x = 2 - y \tag{50}$$

и подставим его выражение в (49). Имеем

$$y^2 + (2 - y)^2 - 10 = 0$$

или

$$y^2 - 2y - 3 = 0. \tag{51}$$

Система уравнений (46), (48) и (49) равносильна системе (48), (50) и (51). Найдем решение переопределенной системы из двух уравнений (48), (51) от одной неизвестной y. Умножим обе части уравнения (51) на y и подставим вместо y^3 выражение из (48). Тогда

$$10y - 3 - 2y^2 - 3y = 0$$

или

$$2y^2 - 7y + 3 = 0. \tag{52}$$

Система из двух уравнений (48), (51) равносильна системе (51), (52). Поставим в (52) выражение y^2 из (51). Тогда

$$2(2y + 3) - 7y + 3 = 0$$

или

$$y - 3 = 0. \tag{53}$$

Остаётся еще умножить обе части (53) на y и подставить вместо y^2 его выражение из (51)

$$(2y + 3) - 3y = 0$$

или

$$-y + 3 = 0. \tag{54}$$

Следовательно, система (48), (51) имеет только одно общее решение $y = 3$. Из уравнения (50) находим, что $x = -1$. Система алгебраических уравнений (44)–(46) имеет только одно общее решение $x = -1$ и $y = 3$.

Таким образом, из уравнений (12) можно при определенных условиях исключить неизвестные Q_{β^*}, $j_1 + \ldots + j_m \geq 2$, $v = 1 \ldots p$. В результате останется только переопределенная система неявных уравнений от неизвестных $Q_{\beta_s^0}$, где $\beta_s^0 = \beta^*\left(\underset{s}{v, 0, \ldots 1 \ldots 0}\right)$ и $v = 1 \ldots p$, $s = 1 \ldots m$ и $Q_{\beta^*(v,0,\ldots 0)} = S_v$, $v = 1 \ldots p$, решить которую гораздо проще, чем исходную (12).

Заключение

В данной статье мы предлагаем алгоритм нахождения решений у переопределенных систем УрЧП, основанный на работах авторов [5, 6]. Основная сложность этого алгоритма – это огромное количество возникающих полиномиальных уравнений, которые нужно исследовать и решить численно или в явном виде. В работах авторов [3, 4] приводятся переопределенные уравнения гидродинамики, которые дают минимум 10 миллионов таких уравнений. Однако если их решить в явном виде, то можно выписать решение уравнений гидродинамики, что представляет большой интерес. В данной работе мы предлагаем также простой в описании алгоритм нахождения явного решения у систем переопределенных алгебраических уравнений, если для этих систем выполнены некоторые требования, связанные с выполнением шагов этого алгоритма. В случае его успешной реализации это будет новым и полезным инструментом в исследовании систем УрЧП.

Приложение А. Прием нахождения решения у переопределенных систем неявных уравнений в явном виде

Рассмотрим произвольную систему из n уравнений от n неизвестных функций $\mathrm{u}=\left(u_1(t),u_2(t)...u_n(t)\right)$ вида

$$\mathrm{H}(\mathrm{u},t)=0, \tag{A.1}$$

где $\mathrm{u}=\left(u_1(t),u_2(t)...u_n(t)\right)$, $\mathrm{H}(\mathrm{u},t)=\left(H_1(\mathrm{u},t),...H_n(\mathrm{u},t)\right)$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Пусть помимо (А.1) выполняется дополнительное соотношение

$$G(\mathrm{u},t)=0, \tag{A.2}$$

где $G(\mathrm{u},t)$ – достаточно гладкая функция своих аргументов. Продифференцируем уравнения (А.1) и (А.2) по переменной t:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{u}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}=0, \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathrm{u}}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial t}=0. \tag{A.4}$$

Положим, что определитель матрицы в (А.3) отличен от нуля. Тогда

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t}=-\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{u}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}. \tag{A.5}$$

Подставим (А.5) в (А.4). Следовательно,

$$-\frac{\partial G}{\partial \mathrm{u}}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{u}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial t}=G^{(1)}(\mathrm{u},t)=0. \tag{A.6}$$

Таким образом, дополнительно к (А.1) и (А.2) мы получаем дополнительное соотношение (А.6), являющееся их следствием. Производя такую же процедуру с (А.6), можно получать еще следствия. Эти следствия могут позволить найти решение системы (А.1), (А.2) в явном виде.

Пример 3. Рассмотрим следующую переопределенную систему уравнений относительно неизвестной функции $x=x(t)$

$$\cos x=x^2+\cos t-t^2, \tag{A.7}$$

$$\sin x=x-\sin t+t. \tag{A.8}$$

Продифференцируем уравнение (А.7) по переменной t. Тогда

$$-\sin x\frac{dx}{dt}=2x\frac{dx}{dt}-\sin t-2t$$

или

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sin t+2t}{2x+\sin x}. \tag{A.9}$$

Продифференцируем (А.8) по переменной t и подставим выражение для производной (А.9). Тогда

$$\left(1-\cos x\right)\frac{dx}{dt}-\cos t+1=0$$

или

$$\left(1-\cos x\right)\frac{\sin t+2t}{2x+\sin x}-\cos t+1=0$$

или

$$\left(1-\cos t\right)\sin x-\left(\sin t+2t\right)\cos x+2\left(1-\cos t\right)x+\left(\sin t+2t\right)=0\,. \qquad (A.10)$$

Обозначим

$$w=\cos x,\ v=\sin x\,. \qquad (A.11)$$

В новых неизвестных величинах (A.11) уравнения (A.7), (A.8), (A.10) имеют вид:

$$w=x^2+\cos t-t^2\,, \qquad (A.12)$$

$$v=x-\sin t+t\,, \qquad (A.13)$$

$$\left(1-\cos t\right)v-\left(\sin t+2t\right)w+2\left(1-\cos t\right)x+\left(\sin t+2t\right)=0\,. \qquad (A.14)$$

Кроме того, используем известное соотношение из тригонометрии:

$$v^2+w^2=1. \qquad (A.15)$$

Система уравнений (A.12)–(A.15) относительно неизвестных w, v, x является переопределенной системой алгебраических уравнений. Подставим выражения для w, v из (A.12), (A.13) в уравнения (A.14), (A.15). Имеем

$$x^2-3\frac{\left(1-\cos t\right)}{\left(\sin t+2t\right)}x+\frac{\left(1-\cos t\right)\left(\sin t-t\right)}{\left(\sin t+2t\right)}+\cos t-t^2-1=0\,, \qquad (A.16)$$

$$x^4+\left(2\cos t-2t^2+1\right)x^2+2\left(t-\sin t\right)x+t^4+\left(1-2\cos t\right)t^2-2t\sin t=0\,. \qquad (A.17)$$

Решая систему (A.16), (A.17) относительно x аналогично примеру 2, находим $x=-t$. Из (A.12), (A.13) получаем, что $w=\cos t$, $v=-\sin t$. Условия согласования (A.11) выполняются. Следовательно, решение системы (A.7), (A.8) имеет вид $x=-t$.

Приложение B. Упрощение алгоритма нахождения решений систем переопределенных алгебраических уравнений в частном случае

Пример 4. Рассмотрим следующую переопределенную систему алгебраических уравнений относительно x

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0\,, \qquad (B.1)$$

$$a_2x^2+b_2x+c_2=0\,. \qquad (B.2)$$

Умножим обе части (B.1), (B.2) на x и x^2. Тогда

$$a_1x^3+b_1x^2+c_1x=0\,, \qquad (B.3)$$

$$a_2x^3+b_2x^2+c_2x=0\,, \qquad (B.4)$$

$$a_1x^4+b_1x^3+c_1x^2=0\,, \qquad (B.5)$$

$$a_2x^4+b_2x^3+c_2x^2=0\,. \qquad (B.6)$$

Обозначим

$$R=x\,,\ Q=x^2,\ S=x^3,\ M=x^4\,. \qquad (B.7)$$

Тогда уравнения (B.1)–(B.6) запишутся в виде переопределенной системы линейных уравнений вида

$$a_1Q+b_1R+c_1=0\,, \qquad (B.8)$$

$$a_2Q+b_2R+c_2=0\,, \qquad (B.9)$$

$$a_1S+b_1Q+c_1R=0\,, \qquad (B.10)$$

$$a_2S+b_2Q+c_2R=0\,, \qquad (B.11)$$

$$a_1M+b_1S+c_1Q=0\,, \qquad (B.12)$$

$$a_2M+b_2S+c_2Q=0\,. \qquad (B.13)$$

Умножим обе части (В.8) и (В.9) на R и вычтем их почленно из (В.10) и (В.11) соответственно. И аналогично умножим обе части (В.10) и (В.11) на R и вычтем их почленно из (В.12) и (В.13). Тогда получим следующие уравнения:

$$a_1(S-RQ)+b_1\left(Q-R^2\right)=0, \tag{В.14}$$

$$a_2(S-RQ)+b_2\left(Q-R^2\right)=0, \tag{В.15}$$

$$a_1(M-RS)+b_1(S-RQ)+c_1\left(Q-R^2\right)=0, \tag{В.16}$$

$$a_2(M-RS)+b_2(S-RQ)+c_2\left(Q-R^2\right)=0. \tag{В.17}$$

Условие того, что система из четырех линейных уравнений (В.14)–(В.17) относительно трех неизвестных $\left(Q-R^2\right)$, $(S-RQ)$ и $(M-RS)$ имеет только нулевое решение, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \text{ или } \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{В.18}$$

Любое решение переопределенной системы алгебраических уравнений (В.1), (В.2), если сделать замену (В.7), удовлетворяет переопределенной системе **линейных** уравнений (В.8)–(В.13). Если выполняется условие (В.18), то $\left(Q-R^2\right)=0$, $(S-RQ)=0$ и $(M-RS)=0$, т. е. верны соотношения (В.7). Тогда в этом случае всякое решение (В.8)–(В.13) определяет решение исходной системы уравнений (В.1), (В.2). Выкладки показывают, что условие совместности переопределенной системы (В.8)–(В.13) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{В.19}$$

Условия (В.18) и (В.19) идентичны условиям (38) и (40) соответственно.

Данный прием легко обобщить на случай произвольной переопределенной системы алгебраических уравнений. Тогда при некотором условии на коэффициенты, аналогичном (В.18), решение этой системы сводится к решению переопределенной системы линейных уравнений.

Рассмотрим общий случай системы из $p \geq 2$ алгебраических уравнений от m переменных

$$P_l(x_1,...x_m)=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m} a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}(x_1)^{i_1}\cdot(x_2)^{i_2}\cdots(x_m)^{i_m}=0, \tag{В.20}$$

где $a^l_{(i_1,i_2,...i_m)} \in \mathbb{R}$, $i_1=0...n_1$, … $i_m=0...n_m$, $l=1...p$. Умножим обе части уравнений (В.20) на выражения $(x_1)^{j_1}\cdot(x_2)^{j_2}\cdots(x_m)^{j_m}$, $j_1=0...N_1, \dots\ j_m=0...N_m$. Получим уравнения вида

$$P_\alpha(x_1,...x_m)=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m} a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}(x_1)^{i_1+j_1}\cdot(x_2)^{i_2+j_2}\cdots(x_m)^{i_m+j_m}=0, \tag{В.21}$$

где $\alpha=\alpha(l,j_1,...j_m)$, $l=1...p$. Количество мульти-индексов $\alpha=\alpha(l,j_1,...j_m)$ (количество уравнений (В.21)) равно $N_H=p(N_1+1)\cdots(N_m+1)$. Эти уравнения можно записать в виде

$$P_\alpha(x_1,...x_m)=H_\alpha\left(Q_\beta\right)=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m} a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}Q_{\beta((i_1+j_1),...(i_m+j_m))}=0, \tag{В.22}$$

где $Q_\beta = (x_1)^{q_1} \cdot (x_2)^{q_2} \cdots (x_m)^{q_m}$, $\beta = \beta(q_1,...q_m)$, $q_1 = 0...(N_1 + n_1),...\ q_m = 0...(N_m + n_m)$, $Q_{\beta(0...0)} = 1$, $l = 1...p$. Количество мульти-индексов $\beta = \beta(q_1,...q_m)$ (количество неизвестных в уравнениях (B.22)) равно $N_S = (N_1 + n_1 + 1)\cdots(N_m + n_m + 1)$.

Потребуем, чтобы $N_H \ge N_S$. Тогда

$$p(N_1+1)\cdots(N_m+1) \ge (N_1+n_1+1)\cdots(N_m+n_m+1)$$

или

$$p \ge \left(1 + \frac{n_1}{(N_1+1)}\right)\cdots\left(1 + \frac{n_m}{(N_m+1)}\right). \tag{B.23}$$

Выберем $\dfrac{(N_1+1)}{n_1} \approx ... \approx \dfrac{(N_m+1)}{n_m} \approx N$. Тогда из (B.23) следует, что $p \ge \left(1+\dfrac{1}{N}\right)^m \ge 1 + \dfrac{m}{N}$, т. е. $N \ge \dfrac{m}{(p-1)}$. В этом случае $N_H \ge p(Nn_1)\cdots(Nn_m) = pn_1\cdots n_m \left[\dfrac{m}{(p-1)}\right]^m$.

Из (B.23) следует, что

$$p \ge \left(1+\frac{n_1}{(N_1+1)}\right)\cdots\left(1+\frac{n_m}{(N_m+1)}\right) > 1 + \frac{n_1}{(N_1+1)} + ...\frac{n_m}{(N_m+1)} \tag{B.24}$$

В частности, из (B.24) следует

$$p - 1 > \frac{n_i}{(N_i+1)},\ \ i = 1...m. \tag{B.25}$$

Тогда, используя известное соотношение между средним геометрическим, гармоническим и (B.24), мы имеем оценку для минимального количества редуцированных уравнений:

$$N_H = p(N_1+1)\cdots(N_m+1) \ge pn_1\cdots n_m \frac{(N_1+1)}{n_1}\cdots\frac{(N_m+1)}{n_m} \ge$$

$$\ge pn_1\cdots n_m \left(\frac{m}{\dfrac{n_1}{(N_1+1)} + ...\dfrac{n_m}{(N_m+1)}}\right)^m > pn_1\cdots n_m\left(\frac{m}{p-1}\right)^m. \tag{B.26}$$

Минимум в (B.26) реализуется примерно при $\dfrac{(N_1+1)}{n_1} \approx ... \approx \dfrac{(N_m+1)}{n_m} \approx N \approx \dfrac{m}{(p-1)}$.

Формально мы получили, что любая система из $p \ge 2$ алгебраических уравнений (B.20) может быть преобразована к переопределенной системе линейных уравнений (B.22). В частности, рассмотрим следующую систему.

Пример 5.

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0, \tag{B.27}$$

$$x_3 = x_2. \tag{B.28}$$

В этом случае $p = 2$, $m = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$. Из оценки (B.26) находим, что $N_H \ge 216$. Очевидно, система (B.27), (B.28) имеет единственное решение. По-видимому, соответствующая система (B.22) также имеет единственное решение.

Приложение C. Некоторые способы переопределения систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим общие уравнения в виде [1, 2]

$$H_k\left(U_1^1,...U_\nu^i,...U_p^m, S_1,...S_\nu,...S_p, \mathrm{x}\right) = 0,\ i = 1...m,\ \nu = 1...p,\ k = 1...p. \tag{C.1}$$

$$\frac{\partial U_v^i}{\partial x_m}=\frac{\partial U_v^m}{\partial x_i},\ i=1...(m-1),\ v=1...p, \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m}=U_v^m,\ v=1...p, \tag{C.3}$$

где $\mathrm{x}=(x_1,...x_m)\in\mathbb{R}^m$. Пусть

$$H_k=\sum_{\substack{k_1^1,...k_s^l,...k_p^{m-1},\\ i_1,...i_p,j_1,...j_p}} A^{k,(i_1,...i_p,)(j_1,...j_p)}_{(k_1^1,...k_s^l,...k_p^{m-1})}(\mathrm{x})\left(U_1^1\right)^{k_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{k_s^l}\cdots\left(U_p^{m-1}\right)^{k_p^{m-1}}\left(U_1^m\right)^{i_1}\cdots\left(U_p^m\right)^{i_p}(S_1)^{j_1}\cdots\left(S_p\right)^{j_p}=0 \tag{C.4}$$

где $k=1...p$, $l=1...(m-1)$, $s=1...p$, $k_s^l=0...r_s^l$, $i_1=0...n_1$, $\dots i_p=0...n_p$, $j_1=0...w_1$, $\dots j_p=0...w_p$. К виду (С.1)–(С.3) могут быть преобразованы, например, уравнения Навье–Стокса или уравнения из статьи [7]. Умножим обе части (С.2)–(С.4) на

$$\left(U_1^1\right)^{\tilde{k}_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{\tilde{k}_s^l}\cdots\left(U_p^{m-1}\right)^{\tilde{k}_p^{m-1}}\cdot\left(U_1^m\right)^{\tilde{i}_1}\cdots\left(U_p^m\right)^{\tilde{i}_p}\cdot(S_1)^{\tilde{j}_1}\cdots\left(S_p\right)^{\tilde{j}_p}, \tag{C.5}$$

где $l=1...(m-1)$, $s=1...p$, $\tilde{k}_s^l=0...R_s^l$, $\tilde{i}_1=0...N_1$, $\dots\tilde{i}_p=0...N_p$, $\tilde{j}_1=0...W_1$, $\dots\tilde{j}_p=0...W_p$. После преобразований получим, что

$$\frac{\partial Q^{(\tilde{i}_1,...\tilde{i}_p,)(\tilde{j}_1,...\tilde{j}_p)}_{(\tilde{k}_1^1,...\tilde{k}_s^l,...\tilde{k}_v^i+1...\tilde{k}_p^{m-1})}}{\partial x_m}-U_v^i\frac{\partial Q^{(\tilde{i}_1,...\tilde{i}_p,)(\tilde{j}_1,...\tilde{j}_p)}_{(\tilde{k}_1^1,...\tilde{k}_s^l,...\tilde{k}_p^{m-1})}}{\partial x_m}=\frac{\partial Q^{(\tilde{i}_1,...\tilde{i}_v+1...\tilde{i}_p,)(\tilde{j}_1,...\tilde{j}_p)}_{(\tilde{k}_1^1,...\tilde{k}_s^l,...\tilde{k}_p^{m-1})}}{\partial x_i}-U_v^m\frac{\partial Q^{(\tilde{i}_1,...\tilde{i}_p,)(\tilde{j}_1,...\tilde{j}_p)}_{(\tilde{k}_1^1,...\tilde{k}_s^l,...\tilde{k}_p^{m-1})}}{\partial x_i}, \tag{C.6}$$

$$\frac{\partial Q^{(\tilde{i}_1,...\tilde{i}_p,)(\tilde{j}_1,..\tilde{j}_v+1....\tilde{j}_p)}_{(\tilde{k}_1^1,...\tilde{k}_s^l,...\tilde{k}_p^{m-1})}}{\partial x_m}-U_v^m\frac{\partial Q^{(\tilde{i}_1,...\tilde{i}_p,)(\tilde{j}_1,...\tilde{j}_p)}_{(\tilde{k}_1^1,...\tilde{k}_s^l,...\tilde{k}_p^{m-1})}}{\partial x_m}=Q^{(\tilde{i}_1,...\tilde{i}_v+1...\tilde{i}_p,)(\tilde{j}_1,...\tilde{j}_p)}_{(\tilde{k}_1^1,...\tilde{k}_s^l,...\tilde{k}_p^{m-1})}, \tag{C.7}$$

$$\sum_{\substack{k_1^1,...k_s^l,...k_p^{m-1},\\ i_1,...i_p,j_1,...j_p}} A^{k,(i_1,...i_p,)(j_1,...j_p)}_{(k_1^1,...k_s^l,...k_p^{m-1})}(\mathrm{x})Q^{(i_1+\tilde{i}_1,...i_p+\tilde{i}_p,)(j_1+\tilde{j}_1,...j_p+\tilde{j}_p)}_{(k_1^1+\tilde{k}_1^1,...k_s^l+\tilde{k}_s^l,...k_p^{m-1}+\tilde{k}_p^{m-1})}=0, \tag{C.8}$$

где введены обозначения

$$Q^{(i_1,...i_p)(j_1,...j_p)}_{(k_1^1,...k_s^l,...k_p^{m-1})}=\left(U_1^1\right)^{k_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{k_s^l}\cdots\left(U_p^{m-1}\right)^{k_p^{m-1}}\cdot\left(U_1^m\right)^{i_1}\cdots\left(U_p^m\right)^{i_p}\cdot(S_1)^{j_1}\cdots\left(S_p\right)^{j_p},$$

$$Q^{(0,...0)(0,...0)}_{(0,...k_v^i,...0)}=U_v^i,\ k_v^i=1,\ Q^{(0,...i_v,...0)(0,...0)}_{(0,...0)}=U_v^m,\ i_v=1. \tag{C.9}$$

Систему уравнений (С.6)–(С.8) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений от неизвестных вида (С.9), следующую из системы (С.1)–(С.3). Уравнения (С.8) относительно неизвестных (С.9) линейные. Количество уравнений (С.6)–(С.8) равно

$$N_H=p(m+1)\left(R_1^1+1\right)\cdots\left(R_s^l+1\right)\cdots\left(R_p^{m-1}+1\right)\cdot(N_1+1)\cdots\left(N_p+1\right)(W_1+1)\cdots\left(W_p+1\right). \tag{C.10}$$

Количество неизвестных, которые содержат уравнения (С.6)–(С.8), равно

$$N_S=\left(R_1^1+r_1^1+1\right)\cdots\left(R_s^l+r_s^l+1\right)\cdots\left(R_p^{m-1}+r_p^{m-1}+1\right)(N_1+n_1+1)\cdots\left(N_p+n_p+1\right)\cdot$$
$$\cdot(W_1+w_1+1)\cdots\left(W_p+w_p+1\right). \tag{C.11}$$

Величины $l=1...(m-1)$, $s=1...p$, R_s^l, N_1, $\dots N_p$, W_1, $\dots W_p$ можно взять достаточно большими так, чтобы $N_H\ge N_S$ (см. Приложение В). Таким образом, тогда система дифференциальных уравнений (С.6)–(С.8) от неизвестных вида (С.9) будет переопределенной.

Пусть нас интересуют решения уравнений (C.1)–(C.3), на которых, например, неизвестное S_1 автомодельное. Тогда $S_1 = S_1\left(\varphi_1(\mathrm{x}),...\varphi_{m-1}(\mathrm{x})\right)$, где $\varphi_1(\mathrm{x}),..\ \varphi_{m-1}(\mathrm{x})$ достаточно гладкие функции от $\mathrm{x} = (x_1,...x_m)$. Следовательно,

$$\frac{\partial S_1}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathrm{x}} + ... + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \mathrm{x}}. \tag{C.12}$$

Исключая из (C.12) $\partial S_1/\partial \varphi_1$, … $\partial S_1/\partial \varphi_{m-1}$, получаем дополнительное уравнение к системе (C.1) – (C.3)

$$\begin{vmatrix} \partial S_1/\partial x_1 & \partial \varphi_1/\partial x_1 & ... & \partial \varphi_{m-1}/\partial x_1 \\ \partial S_1/\partial x_2 & \partial \varphi_1/\partial x_2 & ... & \partial \varphi_{m-1}/\partial x_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial S_1/\partial x_m & \partial \varphi_1/\partial x_m & ... & \partial \varphi_{m-1}/\partial x_m \end{vmatrix} = 0. \tag{C.13}$$

Сделаем теперь в системе уравнений (C.1)–(C.3) параметрическую замену переменных вида $\mathrm{x} = \mathrm{x}\left(\mathrm{x}_0, \xi\right)$ и $\mathrm{x}_0 = \mathrm{x}_0(\mathrm{x}, \xi)$, где $\mathrm{x}_0 = (x_{01},...x_{0m}) \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}$ – параметр. Рассмотрим теперь эту систему как систему уравнений в переменных $\left(\mathrm{x}_0, \xi\right)$. Тогда решения исходной системы уравнений (C.1)–(C.3) в переменных $\left(\mathrm{x}_0, \xi\right)$ будут автомодельные вида $S_v = S_v\left(\mathrm{x}\left(\mathrm{x}_0, \xi\right)\right)$, $v = 1...p$. Следовательно, для них в переменных $\left(\mathrm{x}_0, \xi\right)$ могут быть выписаны дополнительные соотношения вида (C.13).

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
3. Аккерман, В.Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.
4. Зайцев, М.Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 5–27.
5. Зайцев, М.Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.
6. Зайцев, М.Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 43–67.
7. Зайцев, М.Л. Преобразование систем уравнений в частных производных к системам квазилинейных и линейных дифференциальных уравнений. Их редукция и унификация / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 18–33.
8. Бухбергер, Б. Базисы Грёбнера. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов / Б. Бухбергер // Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления: сб. науч. тр. – М.: Мир, 1986. – С. 331–372.

Поступила в редакцию 24 декабря 2019 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2020, vol. 12, no. 4, pp. 5–18

DOI: 10.14529/mmph200401

ALGORITHM FOR FINDING EXPLICIT SOLUTIONS OF OVERDETERMINED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

***M.L. Zaytsev*[1]*, V.B. Akkerman*[2]**
[1] *Moscow, Russian Federation*
[2] *West Virginia University, Morgantown, USA*
E-mail: mlzaytsev@gmail.com, Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Previously, the authors proposed a general method for finding particular solutions for overdetermined systems of partial differential equations (PDE), where the number of equations is greater than the number of unknown functions. In this paper, an algorithm for finding solutions for overdetermined PDE systems is proposed, where the authors use a method for finding an explicit solution for overdetermined algebraic (polynomial) equations. Using this algorithm, some overdetermined PDE systems can be solved in explicit form. The main difficulty of this algorithm is the huge number of polynomial equations that arise, which need to be investigated and solved numerically or explicitly. For example, the overdetermined hydrodynamic equations obtained earlier by the authors give at least 10 million such equations. However, if the equations are solved explicitly, then it is possible to write out the solution of the hydrodynamic equations in a general form, which is of great scientific interest.

Keywords: overdetermined systems of differential equations; partial differential equations (PDE); dimension of differential equations; algebraic (polynomial) equations; symbolic computation.

References

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (in Russ.).

2. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2, Partial Differential Equations*, New York, London, 1962, 830 p.

3. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 8, pp. 1418–1430. DOI: 10.1134/S0965542511080021

4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Hypothesis on reduction of overdetermined systems of differential equations and its application to equations of hydrodynamics. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 5–27. (in Russ.).

5. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics. *Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics*, 2016, no. 6 (37), pp. 119–127. (in Russ.). DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.6.11

6. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduction of Overdetermined Differential Equations of Mathematical Physics. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2017, Vol. 20, Iss. 4, pp. 43–67. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5 (in Russ.).

7. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Transformation of Systems of Partial Differential Equations to Systems of Quasilinear and Linear Differential Equations. Their Reduction and Unification. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2018, Vol. 21, Iss. 1, pp. 18–33. (in Russ.). DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.3

8. Bukhberger B. Bazisy Gryebnera. Algoritmicheskiy metod v teorii polinomial'nykh idealov (Groebner Bases. Algorithmic Method in the Theory of Polynomial Ideals). *Komp'yuternaya algebra. Simvol'nye i algebraicheskie vychisleniya: sb. nauch. tr.* (Computer Algebra. The Symbolic and Algebraic Computation: Collection of Scientific Papers), Moscow, Mir Publ., 1986, pp. 331–372. (in Russ.).

Received December 24, 2019