**УДК 517.925** **DOI: 10.14529/mmph200404**

# О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ, НЕ ИМЕЮЩИХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

***В.Ш. Ройтенберг***
*Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация*
*E-mail: vroitenberg@mail.ru*

**Рассматриваются автономные дифференциальные уравнения второго порядка, правые части которых являются полиномами степени *n* относительно первой производной с периодическими непрерывными коэффициентами, и соответствующие векторные поля на цилиндрическом фазовом пространстве. Свободный член и старший коэффициент полинома предполагаются не обращающимися в нуль, что равносильно отсутствию особых точек векторного поля. Рассматриваются грубые уравнения, для которых топологическая структура фазового портрета не меняется при малых возмущениях в классе рассматриваемых уравнений. Доказано, что уравнение является грубым тогда и только тогда, когда все его замкнутые траектории являются гиперболическими. Грубые уравнения образуют открытое и всюду плотное множество в пространстве рассматриваемых уравнений. Показано, что при *n* > 4 уравнение степени *n* может иметь сколь угодно много предельных циклов. При *n* = 4 определяется возможное число предельных циклов в случае, когда свободный член и старший коэффициент уравнения имеют противоположные знаки.**

*Ключевые слова: дифференциальное уравнение второго порядка; полиномиальная правая часть; цилиндрическое фазовое пространство; число предельных циклов; грубость.*

**Введение**

Дифференциальное уравнение

$$a: \quad \ddot{x} = a_n(x)\dot{x}^n + \ldots + a_1(x)\dot{x} + a_0(x), \tag{1}$$

с $\omega$-периодическими непрерывными коэффициентами $a_k(x)$, $x \in \mathbf{R}$, естественно считать заданным на окружности $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}$. Такие уравнения, например, описывают динамику кругового маятника. Множество уравнений вида (1) обозначим $\mathrm{A}_\omega^n$. Пусть $C(\mathbf{S}^1)$ – банахово пространство непрерывных $\omega$-периодических функций с нормой $\|g\|_C := \max_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$. Биекция $\underbrace{C(\mathbf{S}^1) \oplus \cdots \oplus C(\mathbf{S}^1)}_{n+1} \ni (a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto a \in \mathrm{A}_\omega^n$ вводит в $\mathrm{A}_\omega^n$ структуру банахова пространства с нормой $\|a\| = \max_{i\in\{0,1,\ldots,n\}} \|a_i\|_C$.

Уравнение $a \in \mathrm{A}_\omega^n$ определяет на фазовом пространстве $\Phi := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ векторное поле

$$\vec{a}(x,y) = y\partial/\partial x + a(x,y)\partial/\partial y \ , \quad \text{где} \quad a(x,y) = a_n(x)y^n + \ldots + a_1(x)y + a_0(x). \tag{2}$$

Его траектории называются *траекториями уравнения* $a$ в фазовом пространстве $\Phi$.

Обозначим через $\bar{\bar{\mathrm{A}}}_\omega^n$ открытое подмножество в $\mathrm{A}_\omega^n$, состоящее из уравнений, для которых при всех $x$ $a_0(x) \neq 0$, $a_n(x) \neq 0$. Условие $\forall x \ a_n(x) \neq 0$ можно трактовать как отсутствие бесконечно удаленных особых точек [1]. Условие $\forall x \ a_0(x) \neq 0$ означает отсутствие особых точек у векторного поля $\vec{a}$. Отсутствие особых точек влечет и отсутствие замкнутых траекторий, гомотопных нулю на цилиндре $\Phi$. Представляет интерес оценка числа замкнутых траекторий, не гомотопных нулю.

Имеется ряд статей, например [1–6], в которых даются оценки числа замкнутых траекторий для разного рода полиномиальных уравнений. В частности, в статье [1] были найдены возможные число и тип замкнутых траекторий уравнения $a \in \bar{\bar{A}}^n_\omega$ для случаев $n = 1, 2, 3$. В разделе 1 настоящей работы мы рассмотрим случай $n \geq 4$.

В теории динамических систем фундаментальную роль играет понятие грубой (структурно устойчивой) системы, для которой топологическая структура фазового портрета не меняется при «малых» возмущениях системы [7]. Для динамических систем, заданных $C^1$-векторными полями на замкнутом многообразии, получены необходимые и достаточные условия грубости относительно пространства таких векторных полей с $C^1$-топологией [8]. Представляет интерес получение естественных необходимых и достаточных условий грубости относительно более «узких» пространств векторных полей. В настоящей работе эта задача решена для пространства $\bar{\bar{A}}^n_\omega$. В разделе 2 дано определение грубости уравнения $a \in \bar{\bar{A}}^n_\omega$, установлено, что уравнение является грубым тогда и только тогда, когда все его замкнутые траектории являются гиперболическими, и доказано, что множество грубых уравнений открыто и всюду плотно в $\bar{\bar{A}}^n_\omega$.

## 1. Оценки числа замкнутых траекторий для уравнения из $\bar{\bar{A}}^n_\omega$

Траектории уравнения (1) на множестве $\{(x, y) \in \Phi : y \neq 0\}$ совпадают с траекториями дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3}$$

где $f(x, y) := a_n(x) y^{n-1} + ... a_2(x) y + a_1(x) + a_0(x)/y$.

Пусть $\varphi(u, x)$ – решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(u, 0) = u$. Траектория $y = \varphi(y_0, x)$ является замкнутой тогда и только тогда, когда $y_0$ – нуль функции расхождения $d(u) := \varphi(u, \omega) - u$. Для уравнения (3) функция расхождения является аналитической [9]. Кратность ее нуля $y_0$ называется *кратностью замкнутой траектории*. Если $d'(y_0) \neq 0$, то замкнутая траектория называется *гиперболическим предельным циклом*. Она устойчива (неустойчива) при $y_0 d'(y_0) < 0$ ($y_0 d'(y_0) > 0$). В случае $d'(y_0) = 0,\ d''(y_0) \neq 0$ замкнутая траектория называется *двойным циклом*, а в случае $d'(y_0) = d''(y_0) = 0,\ d'''(y_0) \neq 0$ – *тройным циклом*.

**Теорема 1.** *Для любого натурального числа $N$ и любого $n \geq 5$ существует уравнение $a \in \bar{\bar{A}}^n_\omega$, имеющее не менее $N$ гиперболических предельных циклов.*

Замкнутые траектории уравнения $a \in \bar{\bar{A}}^4_\omega$ принадлежат либо области $\mathbf{S}^1 \times (0, \infty)$, либо области $\mathbf{S}^1 \times (-\infty, 0)$. Мы ограничимся оценкой числа замкнутых траекторий, принадлежащих области $\Phi^+ := \mathbf{S}^1 \times (0, \infty)$, поскольку отображение $y \mapsto -y$ преобразует уравнение (3) в уравнение, для которого замкнутые траектории, принадлежащие $\mathbf{S}^1 \times (0, \infty)$, являются образами при этом отображении замкнутых траекторий уравнения $a$, принадлежащих $\mathbf{S}^1 \times (-\infty, 0)$.

**Теорема 2.** *Пусть уравнение $a \in \bar{\bar{A}}^4_\omega$ и для любого $x \in \mathbf{R}$ $a_0(x) a_4(x) < 0$. Тогда это уравнение имеет в $\Phi^+$ либо 1) три гиперболических предельных цикла, либо 2) один гиперболический и один двойной цикл, либо 3) один гиперболический предельный цикл, либо 4) один тройной цикл.*

**Замечание.** В случае $a_0(x) a_4(x) > 0$ вопрос о возможном числе замкнутых траекторий уравнения $a \in \bar{\bar{A}}^4_\omega$ остается открытым.

**Доказательство теоремы 1.** Согласно [3, 4] существует уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a_4(x) y^3 + a_3(x) y^2 + a_2(x) y$$

с $\omega$-периодическими непрерывными коэффициентами $a_i(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $i = 2, 3, 4$, имеющее $K \geq N$ замкнутых траекторий, задаваемых уравнениями $y = p_k(x)$, $k = 1, 2, ..., K$, где $p_k$ – $\omega$-периодическая $C^1$-функция, не обращающаяся в нуль. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, \mu), \text{ где } F(x, y, \mu) = a_4(x)y^3 + a_3(x)y^2 + (a_2(x) + \mu)y. \tag{4}$$

Пусть $Y(x,u,\mu)$ – его решение, удовлетворяющее начальному условию $Y(0,u,\mu) = u$. При $u$ и $\mu$ достаточно близких соответственно к $p_k(0)$ и 0, оно определено для $x \in [0,\omega]$ и аналитически зависит от $u, \mu$ [9]. Функция расхождения $d(u,\mu) = Y(\omega,u,\mu) - u$ аналитическая и имеет нули $p_k(0)$. Производная $Y'_\mu(x, p_k(0), 0)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Y'_\mu(x, p_k(0),0) = F'_y(x, p_k(x),0) Y'_\mu(x, p_k(0),0) + p_k(x)$$

и начальному условию $Y'_\mu(0, p_k(0),0) = 0$. Поэтому

$$d'_\mu(p_k(0),0) = Y'_\mu(\omega, p_k(0),0) = \int_0^\omega p_k(x) \exp \int_x^\omega F'_y(s, p_k(s),0)\, ds\, dx \neq 0.$$

Пусть замкнутые траектории пронумерованы так, что траектория номером $k \in \{L+1,...,K\}$ имеет нечетную кратность, а с номером $k \in \{1,...,L\}$ – четную кратность $2m_k$, причем для $M$ из них величина $\sigma_k := d'_\mu(p_k(0),0)\partial^{2m_k}(p_k(0),0)/\partial u^{2m_k}$ отрицательна, а для остальных $L - M$ она положительна. Согласно [7, с. 404, лемма 3] при достаточно малых $|\mu| \neq 0$ функция $d(\cdot,\mu)$ будет иметь простые нули $u_k(\mu)$, $u_k(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, $k = L+1,...,K$. Согласно [7, с. 404, лемма 2] при достаточно малых $|\mu| \neq 0$, $\operatorname{sgn}\mu = -\operatorname{sgn}\sigma_k$, $d(\cdot,\mu)$ будет иметь простые нули $u_{k,s}(\mu)$, $u_{k,s}(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, $k = 1,...,L$, $s = 1, 2$. Выбрав $\mu$ достаточно близким к нулю и так, что $\mu > 0$, если $M \geq L - M$ и $\mu < 0$, если $M < L - M$, получим, что $d(\cdot,\mu)$ имеет не менее $L \geq N$ простых нулей, а уравнение (4) не менее $N$ гиперболических предельных циклов.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon y^{n-1} + a_4(x)y^3 + a_3(x)y^2 + (a_2(x) + \mu)y + \frac{\varepsilon}{y}$$

Пусть $Y(x,u,\varepsilon)$ – его решение, удовлетворяющее начальному условию $Y(0,u,\varepsilon) = u$, $d(u,\varepsilon) = Y(\omega,u,\varepsilon) - u$ – функция расхождения, $Y(x,u_k,0)$, $k = 1,...,N$ периодические решения уравнения при $\varepsilon = 0$, задающие гиперболические предельные циклы. Так как $d(u_k,0) = 0$, $d'_u(u_k,0) \neq 0$, $k = 1,...,N$, то по теореме о неявной функции получаем, что при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ $d(\cdot,0)$ имеет $N$ простых нулей $\hat{u}_k(\varepsilon)$, $\hat{u}_k(\varepsilon) \to u_k$ при $\varepsilon \to 0$ ($k = 1,...,N$). Но тогда уравнение $\ddot{x} = \varepsilon\dot{x}^n + a_4(x)\dot{x}^4 + a_3(x)\dot{x}^3 + (a_2(x) + \mu)\dot{x}^2 + \varepsilon$ принадлежит $\bar{\bar{\mathrm{A}}}^n_\omega$ и имеет не менее $N$ гиперболических предельных циклов. Теорема 1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть $a_0(x) < 0$, $a_4(x) > 0$. Случай $a_0(x) > 0$, $a_4(x) < 0$ сводится к рассматриваемому случаю заменой в уравнении (3) $x$ на $-x$.

Так как $a_4(x) > 0$, то существует такое число $R > 0$, что

$$a(x, y) > 0, \quad \text{если} \quad x \in \mathbf{S}^1, |y| \geq R. \tag{5}$$

Поэтому траектории векторного поля $\vec{a}$ трансверсальны линиям $y = \rho$ при $|\rho| \geq R$. Отсюда следует, что все замкнутые траектории уравнения $a$ в $\Phi^+$ принадлежат области $\Phi^+_R := \mathbf{S}^1 \times (0,R)$. Из неравенства $a_0(x) < 0$ и (5) получаем, что траектории уравнения $a$ в точках $\partial\Phi^+_R = \mathbf{S}^1 \times \{0\} \cup \mathbf{S}^1 \times \{R\}$ выходят из $\Phi^+_R$. Поэтому сумма кратностей замкнутых траекторий, лежащих в $\Phi^+$, нечетна.

В рассматриваемом случае функции $\varphi(u,\omega)$, $d(u)$ и $h(u) := \int_0^\omega f'_y(x, \varphi(u,x))\, dx = \ln \varphi'_u(u,\omega)$ определены и являются аналитическими на некотором интервале $J$.

**Лемма.** Для любого $u \in J$ $h''(u) > 0$.

Лемма является модификацией утверждения из статьи [10], имеющего в наших обозначениях следующий вид. Для уравнения $y' = f(x, y)$ с непрерывной правой частью $f(x, y)$, $\omega$-периодической по $x$, имеющей непрерывную производную $f'_y(x, y)$, строго выпуклую по аргументу $y$, функция $h(u)$ строго выпукла.

**Доказательство леммы.** Обозначим

$$g(u,x) := \int_0^x f'_y(x, \varphi(u,x))\,dx = \ln \varphi'_u(u,x) \text{ для } u \in J\,,\ x \in [0,\omega]\,.$$

Тогда

$$g'_u(u,x) = \int_0^x f''_{yy}(x,\varphi(u,x))\varphi'_u(u,x)dx = \frac{\varphi''_{uu}(u,x)}{\varphi'_u(u,x)}, \quad g''_{xu}(u,x) = f''_{yy}(x,\varphi(u,x))\varphi'_u(u,x)\,. \tag{6}$$

Производная $h''(u) = I_1(u) + I_2(u)$, где

$$I_1(u) = \int_0^\omega f'''_{yyy}(x,\varphi(u,x))(\varphi'_u(u,x))^2\,dx\,,\ I_2(u) = \int_0^\omega f''_{yy}(x,\varphi(u,x))\varphi''_{uu}(u,x)\,dx\,.$$

Используя (6), получаем

$$I_2(u) = \int_0^\omega f''_{yy}(x,\varphi(u,x))\varphi'_u(u,x)\frac{\varphi''_{uu}(u,x)}{\varphi'_u(u,x)}dx =$$

$$= \int_0^\omega g''_{xu}(u,x)g'_u(u,x)\,dx = [(g'_u(u,\omega))^2 - (g'_u(u,0))^2]/2 = (g'_u(u,\omega))^2/2 \ge 0\,.$$

Так как $f'''_{yyy}(x,y) = 6(a_4(x) - a_0(x)/y^4) > 0$ для всех $(x,y) \in \Phi^+$, то $I_1(u) > 0$. В итоге получаем $h''(u) > 0$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Все варианты, перечисленные в теореме, очевидно можно реализовать для уравнений с постоянными коэффициентами $a_k$, $k = 0,...,4$.

1) Уравнения $\ddot{x} = \pm(\dot{x}^2 - 1)(\dot{x} - 2)(\dot{x} - 3)$ имеют $\Phi^+$ три гиперболических предельных цикла.

2) Уравнения $\ddot{x} = \pm(\dot{x}^2 - 1)(\dot{x} - 2)^2$ и $\ddot{x} = \pm(\dot{x} - 1)^2(\dot{x}^2 - 4)$ имеют в $\Phi^+$ двойной цикл и гиперболический предельный цикл.

3) Уравнения $\ddot{x} = \pm(\dot{x}^3 - 1)(\dot{x} + 1)$ имеют в $\Phi^+$ один гиперболический предельный цикл.

4) Уравнения $\ddot{x} = \pm(\dot{x} - 1)^3(\dot{x} + 1)$ имеют в $\Phi^+$ тройной цикл.

Покажем, что других вариантов не может быть.

Так как $\forall u \in J\ \ h''(u) > 0$, то $h$ строго выпукла на $J$, и из [10] следует, что уравнение имеет в $\Phi^+$ не более трех замкнутых траекторий.

Пусть уравнение имеет в $\Phi^+$ три замкнутые траектории $L_k : y = \varphi(u_k, x)$, $k = 1, 2, 3$, $0 < u_1 < u_2 < u_3 < R$. Тогда $[u_1, u_3] \subset J$. Покажем, что все три замкнутые траектории $L_k$ гиперболические. Предположим временно, что это не так, то есть $d(u_s) = d'(u_s) = 0$ при некотором $s \in \{1, 2, 3\}$. Так как $d(u_k) = 0$, $k = 1, 2, 3$, то существуют такие числа $\xi_i \in (u_i, u_{i+1})$, $i = 1, 2$, что $d'(\xi_i) = 0$. Но тогда $\varphi'_u(u_s, \omega) = \varphi'_u(\xi_1, \omega) = \varphi'_u(\xi_2, \omega) = 1$ и $h(u_s) = h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$. Поскольку эти равенства противоречат утверждению леммы, то сделанное предположение неверно и траектории $L_k$, $k = 1,2,3$, – гиперболические предельные циклы. Ясно, что $L_2$ – устойчивый предельный цикл, а $L_1$ и $L_3$ – неустойчивые предельные циклы.

Пусть уравнение имеет в $\Phi^+$ две замкнутые траектории $y = \varphi(u_1, x)$ и $y = \varphi(u_2, x)$, кратностей соответственно $n_1$ и $n_2$. Если обе кратности больше 1, то $d(u_k) = d'(u_k) = 0$, $k = 1,2$. По теореме Ролля $d'(\xi) = 0$, где число $\xi$ находится между числами $u_1$ и $u_2$, но отлично от них. Тогда $h(u_1) = h(u_2) = h(\xi) = 0$ в противоречие с утверждением леммы. Таким образом, одно из чисел $n_1$ или $n_2$ равно единице. Пусть $n_2 = 1$. Тогда $n_1 \ge 2$ и четно. Предположим временно, что

$n_1 = 2m \ge 4$. Разложим $d(u) = \varphi(u,\omega) - u$ в ряд по степеням $u - u_1$ и дважды продифференцируем:

$$\varphi(u,\omega) - u = a(u-u_1)^{2m} + \cdots,\ \text{где } a \ne 0,$$

$$\varphi_u'(u,\omega) = 1 + 2ma(u-u_1)^{2m-1} + \cdots,\quad \varphi_{uu}''(u,\omega) = 2m(2m-1)a(u-u_1)^{2m-2} + \cdots.$$

Функцию $h'(u) = \varphi_{uu}''(u,\omega)/\varphi_u'(u,\omega)$ также разложим в ряд и продифференцируем:

$$h'(u) = 2m(2m-1)a(u-u_1)^{2m-2} + \cdots,\quad h''(u) = 2m(2m-1)(2m-2)a(u-u_1)^{2m-3} + \cdots.$$

Получаем, что $h''(u)$ меняет знак в окрестности точки $u_1$. Но это противоречит утверждению леммы. Поэтому сделанное предположение неверно и $n_1 = 2$. Таким образом, если уравнение имеет в $\Phi^+$ две замкнутые траектории, то одна из них – двойной цикл, а вторая – неустойчивый гиперболический предельный цикл.

Пусть уравнение имеет в $\Phi^+$ единственную замкнутую траекторию $y = \varphi(u_1, x)$. Ее кратность $s$ нечетна. Как и выше получаем, что при $s > 3$ $h''(u) = s(s-1)(s-2)c(u-u_1)^{s-3} + \cdots$ и $h''(u_1) = 0$, что противоречит утверждению леммы. Поэтому $s = 1$ или $s = 3$.

Теорема 2 доказана.

## 2. Грубость уравнений из $\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$

Уравнения $a, \tilde a \in \overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : \Phi \to \Phi$, переводящий ориентированные траектории уравнения $a$ в ориентированные траектории уравнения $\tilde a$.

Уравнение $a \in \overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ назовем *грубым* (относительно $\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$), если существует такая его окрестность $U(a)$ в $\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$, что $a$ и любое уравнение $\tilde a \in U(a)$ топологически эквивалентны.

Обозначим $\Sigma = \Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ множество уравнений из $\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$, у которых все замкнутые траектории гиперболические.

**Теорема 3**. *Множество* $\Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ *открыто и всюду плотно в* $\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$. *Уравнение* $a \in \overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ *является грубым тогда и только тогда, когда оно принадлежит* $\Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$.

**Доказательство теоремы 3**. Докажем плотность $\Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ в $\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$. Пусть уравнение $a \in \overline{\overline{A}}{}_\omega^n \setminus \Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ и записано в виде (1). Из условия $\forall x\ a_n(x) \ne 0$ следует существование такого числа $R > 0$, что векторное поле $\vec a$ трансверсально кривым $y = \rho$ при $|\rho| \ge R$, и потому все замкнутые траектории принадлежат области $S^1 \times (-R, R)$ и их конечное число. Пусть уравнения замкнутых траекторий $y = p_k(x)$, $k = 1, ..., K$. Зададим окрестность $U(a)$ уравнения $a$ в $\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$. Рассмотрим уравнение $a^\mu \in \overline{\overline{A}}{}_\omega^n \setminus \Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n : \ddot x = a^\mu(x, \dot x)$, где $a^\mu(x,y) = a_n(x)y^n + ... + (a_1(x) + \mu)y + a_0(x)$. Выберем такое $\bar\mu > 0$, что $\forall \mu \in (-\bar\mu, \bar\mu)$ $a^\mu \in U(a)$, а векторное поле $\vec a^\mu$ трансверсально кривым $y = \rho$ при $|\rho| \ge R$. Как и при доказательстве теоремы 1 получаем, что для функции расхождения $d(u,\mu)$ производная $d_\mu'(p_k(0), 0) \ne 0$. Поэтому из [7, с. 404, леммы 2 и 3] следует, что при достаточно малом $\mu \in (0, \bar\mu)$ в малой окрестности каждой замкнутой траектории уравнения $a$ имеется не более двух замкнутых траекторий уравнения $a^\mu$, причем эти траектории являются гиперболическими предельными циклами. Аналогично [7, с. 182] доказывается, что при достаточно малом $\mu \in (0, \bar\mu)$ других замкнутых траекторий уравнение $a^\mu$ не имеет. Тем самым $a^\mu \in U(a) \cap \Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ и плотность $\Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ в $\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ доказана.

Докажем открытость $\Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$ и грубость уравнений из $\Sigma\overline{\overline{A}}{}_\omega^n$. Заметим, что мы не можем прямо сослаться на известные результаты о грубых векторных полях на плоскости [7] потому, что векторное поле $\vec a$ не $C^1$-гладкое.

Правая часть уравнения (3), соответствующего уравнению $a \in \overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$, является непрерывной функцией от $x, y, a$ и гладкой функцией от $y, a$. Поэтому решение $Y(x,u,a)$ уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $Y(0,u,a) = u$, и его производная $Y_u'(x,u,a)$ являются $C^1$-функциями от $x, y, a$. Обозначим $d(u,a) = Y(\omega,u,a) - u$ – функцию расхождения. Пусть уравнение $a^0 \in \Sigma\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$, число $R$ выбрано так, что векторное поле $\vec{a}^0$ трансверсально всем кривым $y = \rho$ при $|\rho| \ge R$, $Y(x, u_k, a^0)$, $k = 1,...,N$ – периодические решения уравнения $a^0$, задающие гиперболические предельные циклы. Мы можем выбрать окрестность $V(a^0)$ уравнения $a^0$ в $\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$ так, что $\forall a \in V(a^0)$ векторное поле $\vec{a}$ трансверсально всем кривым $y = \rho$ при $|\rho| \ge R$. Так как $d(u_k, a^0) = 0$, $d_u'(u_k, a^0) \ne 0$, то, используя теорему о неявной функции, получаем, что существует такая окрестность $U(a^0)$ уравнения $a^0$ в $\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$, что $\forall a \in U(a^0)$ $d(\cdot, a)$ имеет простые нули $\tilde{u}_k(a)$, $k = 1,...,N$, где $\tilde{u}_k(\cdot)$ – непрерывные функции, $\tilde{u}_k(a^0) = u_k$. Тогда уравнения $y = Y(x, \tilde{u}_k(a), a)$, $k = 1,...,N$ задают гиперболические предельные циклы. Считая окрестность $U(a^0)$ достаточно малой, аналогично [7, с. 182] получаем, что других замкнутых траекторий уравнение $a \in U(a^0)$ не имеет. Следовательно, уравнение $a \in \Sigma\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$, и потому $\Sigma\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$ – открытое множество. Топологическая эквивалентность уравнений $a \in U(a^0)$ и уравнения $a^0$ очевидна. Следовательно, уравнение $a^0 \in \Sigma\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$ является грубым.

Пусть уравнение $a \in \overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$ грубое и записано в виде (1). Покажем, что $a \in \Sigma\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$. По определению существует такая окрестность $U(a)$ уравнения $a$, что $a$ и любое уравнение из $U(a)$ топологически эквивалентны. Предположим временно, что уравнение $a \notin \Sigma\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$. Пусть ее замкнутые траектории задаются уравнениями $y = p_k(x)$, $k = 1,...,N$, где $p_k$ – $\omega$-периодические $C^1$-функции, не обращающиеся в нуль. Поскольку $\Sigma\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$ всюду плотна в $\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$, то в окрестности $U(a)$ есть уравнение $a^* \in \Sigma\overline{\overline{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$. Уравнения $a$ и $a^*$ топологически эквивалентны и потому кратность всех замкнутых траекторий уравнения $a$ нечетна. По предположению уравнение $a$ имеет негиперболическую замкнутую траекторию $\Gamma$. Будем считать, что ее уравнение $y = p_1(x)$. Для упрощения записи индекс 1 будем опускать: $p(x) = p_1(x)$.

Выберем $\bar{\mu} > 0$ так, чтобы при $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$ уравнение

$$a^{\mu}: \quad \ddot{x} = a_n(x)\dot{x}^n + ... + a_2(x)\dot{x}^2 + (a_1(x) + \mu)\dot{x} + a_0(x) - \mu p(x)$$

принадлежало окрестности $U(a)$. Уравнение (3), соответствующее уравнению $a^{\mu}$, имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = a_n(x)y^{n-1} + ... + a_2(x)y + (a_1(x) + \mu) + \frac{a_0(x) - \mu p(x)}{y}. \tag{7}$$

Для него $p(x)$ является решением. Поэтому $\Gamma$ – траектория уравнения $a^{\mu}$ при всех $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$.

Сделаем в уравнении (7) замену $z = y - p(x)$. Получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} = F(x,z,\mu), \quad F(x,z,\mu) = a_n(x)z^{n-1} + b_{n-2}(x)z^{n-2} ... + b_1(x)z - \frac{[a_0(x) - \mu p(x)]z}{p(x)(p(x)+z)}, \tag{8}$$

где $b_1(x),...,b_{n-2}(x)$ – непрерывные $\omega$-периодические функции. Это уравнение имеет решение $z = 0$, задающее траекторию $\Gamma$ в координатах $x, z$. Пусть $Z(x,v,\mu)$ – решение уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию $Z(0,v,\mu) = v$. Обозначим $\tilde{d}(v,\mu) = Z(\omega,v,\mu) - v$ функцию расхождения. Производная $Z_v'(x,0,\mu)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Z_v'(x,0,\mu) = \left( b_1(x) - \frac{a_0(x) - \mu p(x)}{p^2(x)} \right) Z_v'(x,0,\mu)$$

и начальному условию $Z_v'(0,0,\mu)=1$. Поэтому

$$\tilde{d}_v'(0,\mu)=\exp\int_0^{\omega}\left(b_1(x)-\frac{a_0(x)-\mu p(x)}{p^2(x)}\right)dx-1.$$

Поскольку $\tilde{d}_v'(0,0)=\exp\int_0^{\omega}\left(b_1(x)-a_0(x)/p^2(x)\right)dx-1=0$, то

$$\tilde{d}_v'(0,\mu)=\exp\int_0^{\omega}\mu/p^2(x)\,dx-1. \qquad (9)$$

Пусть кратность цикла Γ равна $2m+1$. Тогда $\tilde{d}(v,0)=cv^{2m+1}+o(v^{2m+1})$, где $c\neq 0$. Выберем непересекающиеся окрестности $V(v_k)$ нулей $v_k=p_k(0)-p(0)$, $k=1,2,...,N$, функции $\tilde{d}(\cdot,0)$. Из (9) получаем, что для $\mu$, достаточно близких к нулю и таких, что $c\mu<0$, функция $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ имеет в окрестности $V(v_1)$ точки $v_1=0$ по меньшей мере три нуля, в окрестностях $V(v_k)$, $k=2,...,N$, по меньшей мере один нуль. Тем самым при выбранном $\mu$ $\tilde{d}(\cdot,\mu)$ имеет больше нулей, чем $\tilde{d}(\cdot,0)$, а уравнение $a^{\mu}$ имеет больше замкнутых траекторий, чем уравнение $a=a^0$. Но это противоречит их топологической эквивалентности. Таким образом, сделанное предположение неверно и потому грубое уравнение $a\in\Sigma\bar{\bar{\mathrm{A}}}_{\omega}^{n}$.

Теорема 3 доказана.

## Литература

1. Ройтенберг, В.Ш. О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности без особых точек / В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. – Ярославль: Изд. дом ЯГТУ, 2017. – Вып. 12. – С. 77–91.

2. Плисс, В.А. О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью / В.А. Плисс // ДАН СССР . – 1959. – Т. 127, № 5. – С. 965–968.

3. Neto, A.L. On the Number of Solutions of the Equation for which x(0)=x(1) / A.L. Neto // Inventiones mathematicae. – 1980. – Vol. 59, no. 2. – P. 67–76.

4. Панов, А.А. О разнообразии отображений Пуанкаре для кубических уравнений с переменными коэффициентами / А.А. Панов // Функциональный анализ и приложения. – 1999. – Т. 33, № 4. – С. 84–88.

5. Casull, A. Limit Cycles for Generalized Abel Equations / A. Casull, A. Guillamon // J. Bifurcation and Chaos. – 2006. – Vol. 16, no. 12. – P. 3737–3745.

6. Ройтенберг, В.Ш. О числе периодических решений некоторых полиномиальных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / В.Ш. Ройтенберг // Вестник Бурятского государственного университета. – 2020. – № 1. – С. 28–34.

7. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.

8. Robinson, C. Structural stability of vector fields / C. Robinson // Annals of Mathematics. Second Series. – 1974. – Vol. 99, no. 1. – P. 154–175.

9. Бибиков, Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1981. – 232 с.

10. Периодические решения дифференциальных уравнений / Г.Г. Иванов, Г.В. Алфёров, В.С. Королёв, Е.А. Селицкая // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – Вып. 3 (46). – С. 5–15.

***Поступила в редакцию 10 сентября 2020 г.***

*Bulletin of the South Ural State University*
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*
*2020, vol. 12, no. 4, pp. 33–40*

**DOI: 10.14529/mmph200404**

## ON POLYNOMIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER ON A CIRCLE WITHOUT SINGULAR POINTS

***V.Sh. Roitenberg***
*Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation*
*E-mail: vroitenberg@mail.ru*

In this paper, autonomous differential equations of the second order are considered, the right-hand sides of which are polynomials of degree $n$ with respect to the first derivative with periodic continuously differentiable coefficients, and the corresponding vector fields on the cylindrical phase space. The free term and the leading coefficient of the polynomial is assumed not to vanish, which is equivalent to the absence of singular points of the vector field. Rough equations are considered for which the topological structure of the phase portrait does not change under small perturbations in the class of equations under consideration. It is proved that the equation is rough if and only if all its closed trajectories are hyperbolic. Rough equations form an open and everywhere dense set in the space of the equations under consideration. It is shown that for $n > 4$ an equation of degree n can have arbitrarily many limit cycles. For $n = 4$, the possible number of limit cycles is determined in the case when the free term and the leading coefficient of the equation have opposite signs.

*Keywords: differential equation of the second order; polynomial right-hand side; cylindrical phase space; number of limit cycles; roughness.*

### References

1. Roytenberg V.Sh. O polinomial'nykh differentsial'nykh uravneniyakh vtorogo poryadka na okruzhnosti bez osobykh tochek (On Polynomial Differential Equations of Second Order without Singular Points). *Matematika i estestvennye nauki. Teoriya i praktika: mezhvuz. sb. nauch. tr.* (Mathematics and natural sciences. Theory and practice: interuniversity collection of scientific papers), Yaroslavl', Izd. dom YaGTU Publ., 2017, Iss. 12, pp. 77–91. (in Russ.).

2. Pliss V.A. O chisle periodicheskikh resheniy uravneniya s polinomial'noy pravoy chast'yu (On the Number of Periodic Solutions of Differential Equations with Polynomial Right-Hand Side). *DAN SSSR*, 1959, Vol. 127, no. 5, pp. 965–968. (in Russ.).

3. Neto A.L. On the Number of Solutions of the Equation for which x(0)=x(1). *Inventiones mathematicae*, 1980, Vol. 59, no. 2, pp. 67–76.

4. Panov A.A. On the Diversity of Poincaré Mappings for Cubic Equations with Variable Coefficients. *Funct. Anal. Its Appl*, 1999, Vol. 33, no. 4, pp. 310–312. DOI: 10.1007/BF02467118

5. Casull A., Guillamon A. Limit Cycles for Generalized Abel Equations. *J. Bifurcation and Chaos*, 2006, Vol. 16, pp. 3737–3745. DOI: 10.1142/S0218127406017130

6. Roytenberg V.Sh. On the Number of Periodic Solutions of some Polynomial Differential Equations with Periodic Coefficients. *BSU bulletin. Mathematics, Informatics*, 2020, no. 1, pp. 28–34. (in Russ.). DOI: 10.18101/2304-5728-2020-1-28-34

7. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Teoriya bifurkatsiy dinamicheskikh sistem na ploskosti* (The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane). Moscow, Nauka Publ., 1967, 487 p. (in Russ.).

8. Robinson C. Structural stability of vector fields. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1974, Vol. 99, no. 1, pp. 154–175. DOI: 10.2307/1971016

9. Bibikov Yu.N. *Obshchiy kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (General Course of Ordinary Differential Equations). Leningrad, Izd-vo Leningradskogo universiteta Publ., 1981, 232 p. (in Russ.).

10. Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S., Selitskaya E.A. Periodic Solutions of Differential Equations. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Informatika*, 2019, no. 2(46), pp. 5–15. (in Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-5-15

***Received September 10, 2020***