УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph200405

ПОСТРОЕНИЕ НАБЛЮДЕНИЯ В МОДЕЛИ ШЕСТАКОВА–СВИРИДЮКА ПРИ ЕГО ИСКАЖЕНИИ МНОГОМЕРНЫМ «БЕЛЫМ ШУМОМ»[1]

М.А. Сагадеева
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: sagadeevama@susu.ru

Модель Шестакова–Свиридюка – это математическая модель измерительного устройства, используемая для восстановления динамически искаженного сигнала по экспериментальным данным, также эту модель называют задачей оптимального динамического измерения. В основе теории оптимальных динамических измерений находится задача минимизации разности значений виртуального наблюдения, полученного с помощью расчетной модели, и экспериментальных данных, обычно искаженных некоторыми помехами. Статья содержит описание модели Шестакова–Свиридюка оптимального динамического измерения при наличии помех разного вида. Основное внимание в статье обращено на предварительный этап исследования задачи оптимального динамического измерения, а именно на метод Пытьева–Чуличкова построения данных наблюдения, т. е. преобразования данных эксперимента для очистки их от помех в виде «белого шума», понимаемого как производная Нельсона–Гликлиха от многомерного винеровского процесса. Для использования этого метода используется априорная информация о свойствах функций, описывающих наблюдение.

Ключевые слова: оптимальное динамическое измерение; система леонтьевского типа; разрешающий поток матриц; многомерный винеровский процесс; производная Нельсона–Гликлиха.

Введение

Одной из основных задач теории динамических измерений является нахождение воздействия на измерительную систему по сигналу, который регистрируется на выходе системы. Классическими методами решения этой задачи являются методы основанные на теории обратных (некорректных) задач (см. обзор [1]). С использованием методов теории автоматического управления А.Л. Шестаков и его ученики разработали и обосновали применение технических методов решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала [2]. При дальнейших исследованиях стало ясно, что для повышения точности получаемых результатов при решении этой задачи необходимо исследование математической модели задачи восстановления динамически искаженного сигнала. Для этого А.Л. Шестаковым и Г.А. Свиридюком было предложено использовать методы теории оптимального управления [3] решениями системы, полученной в результате использования теории автоматического управления. Задачей оптимального динамического измерения [4] называется полученная задача оптимального управления для системы леонтьевского типа. Используя методы численных решений для систем леонтьевского типа [5, 6] построенная математическую модель была доведена «до числа» [7]. Описанию этой математической модели посвящены обзоры [8, 9]. Полученную теорию будем называть теорией оптимальных динамических измерений.

В теории оптимальных динамических измерений могут быть учтены помехи различного вида и природы. Так, к настоящему времени исследованы задачи оптимального измерения при наличии инерционности измерительного устройства [7], резонансов в его цепях [10], а также его деградации [11], понимаемой как снижение чувствительности ИУ при эксплуатации.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № FENU-2020-0022 (2020072ГЗ)).

Основой теории оптимального измерения является модель Шестакова–Свиридюка описания измерительного устройства (ИУ). Данная модель состоит из двух частей. Первая часть модели Шестакова–Свиридюка описывается с помощью нестационарной системы леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t), \qquad \ker L \neq \{0\}, \tag{1}$$

$$y(t) = b(t)Mx(t) + Fu(t), \tag{2}$$

где L, M, N, D, F – квадратные матрицы порядка n; $x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $y(t) = \mathrm{col}(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ и $u(t) = \mathrm{col}(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ – вектор-функции; $a(t)$ и $b(t)$ – функции. Здесь матрицы L, M, N, D, F характеризуют конструкцию ИУ, вектор-функция $x = x(t)$ характеризует состояние ИУ, функции $a(t)$ и $b(t)$ описывают деградацию ИУ при длительной эксплуатации (например, при эксплуатации в околоземном пространстве), вектор-функция $u = u(t)$ соответствует входному сигналу (*измерению*), а вектор-функция $y = y(t)$ соответствует выходному сигналу (*наблюдению*). Систему (1), (2) для получения математической модели ИУ дополняют начальным условием Шоуолтера–Сидорова [12]

$$P(x(0) - x_0) = 0, \tag{3}$$

где P – ортогональный проектор на образ разрешающего семейства матриц [13] однородного уравнения (1). Второй частью модели Шестакова–Свиридюка является задача оптимизации

$$J(v) = \min_{u \in U_\partial} J(u), \tag{4}$$

которая с помощью функционала вида

$$J(u) = \delta \int_0^\tau \|y(t) - \tilde{y}(t)\|^2 \, dt + (1 - \delta) \int_0^\tau \langle Cx(t), x(t) \rangle \, dt \tag{5}$$

минимизирует разницу между модельным (виртуальным) наблюдением y и наблюдением $\tilde{y}$, полученным в результате обработки данных натурного эксперимента. Здесь $\| \cdot \|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$. Используя априорную информацию, строится выпуклое и замкнутое подмножество $U_\partial \subset U$ в пространстве управлений U, которое называется *множеством допустимых измерений*. Минимизируя первое слагаемое функционала (5) на множестве U_∂, добиваемся минимизации воздействия инерционности ИУ на измерение. При минимизации второго слагаемого снижается воздействие резонансов в цепях ИУ, а именно что квадратная симметрическая матрица C порядка n характеризует взаимовлияние резонансов в цепях ИУ. Константа $\delta \in (0,1]$ выбирается таким образом, чтобы учесть предпочтения исследователя. Наконец, $\tilde{y}(t)$ – наблюдение, полученное в результате обработки данных вычислительного или натурного эксперимента. Итак, задача поиска *оптимального измерения* $v(t)$ заключается в поиске минимума (4) для функционала (5) для вектор-функций x и y, удовлетворяющих задаче (1)–(3) при некоторых начальных данных $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Модель Шестакова–Свиридюка представима с помощью задачи (1)–(5), которую мы будем также называть задачей оптимального динамического измерения, и ее решение позволяет восстановить сигнал $v \in U_\partial$, соответствующий результатам наблюдений $\tilde{y}$.

При исследовании модели Шестакова–Свиридюка (1)–(5) необходимо отдельное внимание уделить методам обработки экспериментальных данных, с помощью которых строится детерминированная функция $\tilde{y}$. При этом при построении значений $\tilde{y}$ могут быть использованы математические методы, предназначенные для очистки данных натурного эксперимента от воздействия случайных помех. Стандартные методы фильтрации нахождения полезной части сигнала, с одной стороны, не всегда могут быть применимы, а с другой – могут давать результаты, не применимые для дальнейшего исследования поставленной задачи. Необходимость нахождения полезной части сигнала возникает в исследованиях различного рода (см., например, [2, 14]). Что касается теории оптимального динамического измерения, то эта задача, по сути, является предварительным этапом решения. Метод Пытьева–Чуличкова позволяет на основе априорной информации о свойствах функций, описывающих полезную часть наблюдения, построить ее значения $\tilde{y}$, возмущенные «белым шумом», под которым понимается производная Нельсона–Гликлиха [15–17] n-мерного броуновского движения.

Изначально метод фильтрации данных, предложенный Ю.П. Пытьевым, применялся для очистки радиоволн, получаемых в ходе наблюдения за дальним космосом. Этот метод подразумевал, что искомый сигнал описывается убывающей выпуклой вниз функцией. Кроме того, предполагалось, что помеха имеет известный закон распределения, чаще всего нормальный. Этот метод был развит А.И. Чуличковым и применен при решении других практических задач [14].

В работе [18] метод Пытьева–Чуличкова описан для случая, когда вносящая искажения помеха представлена «белым шумом», т. е. производной Нельсона–Гликлиха от одномерного винеровского процесса. Основной целью данной статьи является описание этого метода в многомерном случае.

1. Оптимальное измерение при учете инерционности, резонансов и деградации измерительного устройства

Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ линейное нестационарное неоднородное уравнение вида

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t), \qquad \det L = 0,$$

где L и M – квадратные матрицы порядка n, а $f(t) = \mathrm{col}(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ – некоторая вектор-функция. Уравнения вида (1) будем называть *уравнениями леонтьевского типа*, отдавая дань В. Леонтьеву [19], который первым начал изучать такие уравнения. В работах В. Леонтьева рассматривались балансовые модели экономики. В этих моделях и в силу того, что труд запасти нельзя, матрица L в левой части уравнения (1) имела нулевой определитель, так как именно эта матрица описывала процесс пополнения «запасов». Для уравнений леонтьевского типа также используются позже появившиеся термины «дифференциально-алгебраические уравнения» [20], «алгебро-дифференциальные системы» [21], «дескрипторные системы» [22] и т. д.

Как показано выше, с помощью нестационарной системы уравнений леонтьевского типа вида

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t) \tag{6}$$

описывается часть математической модели ИУ, где N, D, F – квадратные матрицы порядка n; $x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $y(t) = \mathrm{col}(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ и $u(t) = \mathrm{col}(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ – вектор-функции; $a(t)$ и $b(t)$ – функции.

Будем говорить, что матрица M L-*регулярна*, если $\det(\alpha L - M) \neq 0$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{C}$. Очевидно, что для L таких, что $\det L \neq 0$, всегда можно найти $\alpha \in \mathrm{C}$, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$. В частности, это показывает, что условие L-регулярности выполняется автоматически, если модель ИУ не вырождена, т. е. уравнение (1) может быть разрешено относительно производной. Однако внимательный анализ реальных ИУ [23, 24] показывает, что случай $\det L = 0$ встречается довольно часто. Матрица M называется (L, p)-*регулярной*, если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости для L-*резольвенты матрицы* M вида $(\mu L - M)^{-1}$ является полюсом порядка p. Будем считать, что $p = 0$ при условии, что бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является устранимой особой точкой матриц-функции $(\mu L - M)^{-1}$. При условии (L, p)-регулярности матрицы M ($p \in \{0, \ldots, n-1\}$) рассмотрим начальное *условие Шоуолтера–Сидорова* [12]

$$\lim_{t \to 0+} \left[R_\mu^L(M) \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \tag{7}$$

где $x_0 \in \mathbf{R}^n$ – некоторый вектор, а $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$ – *правая* L-*резольвенты матрицы* M при $\mu \in \mathbf{C}$ таком, что $\det(\mu L - M) \neq 0$.

Фиксируем число $\tau \in \mathbf{R}_+$ и введем в рассмотрение *пространство измерений* $U = \left\{ u \in L_2\left((0, \tau); \mathbf{R}^n\right) : u^{(p)} \in u \in L_2\left((0, \tau); \mathbf{R}^n\right) \right\}$, *пространство наблюдений* $Y = L_2\left((0, \tau); \mathbf{R}^n\right)$ и *пространство состояний* $X = Y$.

Теорема 1. [9] *Пусть матрица* M (L,p)*-регулярна,* $p\in\{0,\dots,n-1\}$ *и* $\det M\neq 0$. *Тогда для любых* $x_0\in\mathbf{R}^n$, $u\in U$, $a\in C((0,\tau);\mathbf{R}_+)\cap C^{p+1}((0,\tau);\mathbf{R})$ *и* $b\in C((0,\tau);\mathbf{R})$ *существует единственное* $y\in Y$ *из* (2), *соответствующее решению задачи* (6), (7), *имеющему вид*

$$x(t)=X(t,t_0)x_0+\int_0^t X(t,s)L_1^{-1}QDu(s)ds+\sum_{k=0}^{p}H^kM^{-1}(Q-E_n)\left(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\right)^k\frac{Du(t)}{a(t)}.$$

Здесь $X(t,s)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\left(L-\frac{1}{k}M\int_s^t a(\zeta)d\zeta\right)^{-1}L\right)^k$ – *вырожденный поток разрешающих матриц* [13], т. е. $X(t,r)X(r,s)=X(t,s)$ для всех $t,r,s\in\mathbf{R}$ таких, что $t\geq r\geq s$, причем $X(t,t)\neq E_n$, для всех $t\in\mathbf{R}$;

$$L_1^{-1}=\lim_{k\to\infty}\left(L-\frac{1}{k}M\right)^{-1}Q,\qquad Q=\lim_{k\to\infty}\left(kL\left(kL-M\right)^{-1}\right)^k,$$

$$L_0=L(E_n-P),\qquad P=\lim_{k\to\infty}\left(k\left(kL-M\right)^{-1}L\right)^k,\qquad H=M^{-1}(E_n-Q)L_0.$$

Замечание 1. Условие $\det M\neq 0$ в теореме 1 не является обременительным и с помощью замены можно добиться, чтобы оно было выполнено. Используя условие (L,p)-регулярности матрицы M, можно подобрать $\lambda\in\mathbf{C}$ так, чтобы $\det(\lambda L-M)\neq 0$. Для этого λ произведем замену $x=e^{\lambda t}z$, в результате которой получим уравнение $L\dot z(t)=a(t)(M-\lambda L)z(t)+Du(t)$, имеющее тот же вид, что и (6), но матрица в правой части при неизвестной функции уже имеет ненулевой определитель.

Приведем теорему о существовании решения задачи (1)–(5).

Теорема 2. [9] *Пусть матрица* M (L,p)*-регулярна,* $p\in\{0,\dots,n-1\}$ *и* $\det M\neq 0$. *Тогда для любых* $x_0\in\mathbf{R}^n$, $\tilde y\in Y$, $a\in C((0,\tau);\mathrm{R}_+)\cap C^{p+1}((0,\tau);\mathbf{R})$ *и* $b\in C((0,\tau);\mathbf{R})$ *существует единственное оптимальное измерение* $v\in U_\partial$ *задачи* (1)–(5).

2. Многомерный «белый шум»

Случайная величина – это отображение $\xi:\Omega\to\mathbf{R}$, измеримое относительно соответствующих мер в пространствах Ω и $\mathbf{R}$, где $\Omega\equiv(\Omega,A,P)$ – полное вероятностное пространство, а $\mathbf{R}$ – множество вещественных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй и стандартной лебеговой мерой. Если нормально распределенная случайная величина ξ такова, что ее математическое ожидание $\mathbf{E}\xi=0$, а дисперсия $\mathbf{D}\xi=\sigma^2$, то коротко это будем записывать следующим образом: $\xi\sim N(0,\sigma^2)$.

Зафиксируем промежуток действительной оси $\Im\subset\mathbf{R}$. Под (*одномерным*) *стохастическим процессом* будем понимать отображение $\eta:\Im\times\Omega\to\mathbf{R}$. При фиксированном $t\in\Im$ значение стохастического процесса $\eta=\eta(t,\cdot)$ будет случайной величиной, которую будем называть *сечением стохастического процесса*. При каждом фиксированном $\omega\in\Omega$ значение стохастического процесса $\eta=\eta(\cdot,\omega)$ будет детерминированной функцией и ее будем называть (*выборочной*) *траекторией*. Стохастический процесс η назовем *непрерывным*, если п. н. все его траектории непрерывны (т. е. при п. в. (почти всех) $\omega\in\Omega$ траектории $\eta(\cdot,\omega)$ непрерывны). В дальнейшем зависимость от $\omega\in\Omega$ стохастического процесса будем опускать. Непрерывный стохастический процесс, чьи (независимые) сечения гауссовы, называется гауссовым.

Важнейшим примером непрерывного гауссова стохастического процесса служит (одномерный) винеровский процесс $\beta=\beta(t)$, моделирующий броуновское движение на прямой в теории Эйнштейна–Смолуховского [25], представленный формулой

$$\beta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k \sin\left(\tfrac{\pi}{2}(2k+1)t\right), \tag{8}$$

где $\xi_k \sim N\left(0,\left[\tfrac{\pi}{2}(2k+1)\right]^{-2}\right)$ – независимые нормально распределенные величины. Сечения стохастического процесса β являются нормально распределенными случайными величинами с $\mathbf{E}\beta=0$ и $\mathbf{D}\beta=\sigma^2 t$ при некотором $\sigma>0$. Стохастический процесс β, представленный с помощью (8), назовем *одномерным броуновским движением*.

Пусть $\eta=\eta(t)$ – произвольный стохастический процесс, обозначим $\overset{o}{\eta}(t)$ производную Нельсона–Гликлиха [9, 10, 18] этого процесса в точке $t\in(\varepsilon,\tau)$. Будем говорить, что процесс η дифференцируем в смысле Нельсона–Гликлиха на интервале, если в каждой точке этого интревала существует производная Нельсона–Гликлиха.

Теорема 3. [16] *Пусть* β *– винеровский процесс* (8), *тогда* $\overset{o}{\beta}=\dfrac{\beta}{2t}$ $\forall t\in\mathbf{R}_+$.

Производную Нельсона–Гликлиха $\overset{o}{\beta}$ броуновского движения β из (8) будем называть *одномерным «белым шумом»*. Отметим, что сечения стохастического процесса $\overset{o}{\beta}$ распределены по нормальному закону с параметрами $\left(0,\sigma^2/_{4t}\right)$, то есть $\overset{o}{\beta}\sim N\left(0,\sigma^2/_{4t}\right)$.

Пусть $n\in\mathrm{N}$, возьмем n независимых случайных процессов $\{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n\}$ и формулой $\Theta(t)=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k$, где e_k – орты в пространстве $\mathbf{R}^n$ ($k=\overline{1,n}$), зададим n*-мерный случайный процесс* (коротко, n*-случайный процесс*). По построению легко заметить, что п.н. все его траектории непрерывны и дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху, при условии что таковыми являются η_k ($k=\overline{1,n}$). По аналогии с одномерным случаем назовем n*-мерным «белым шумом»* стохастический процесс вида $\overset{o}{W}_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\overset{o}{\beta}_k e_k$, где $\overset{o}{\beta}_k$ – одномерный «белый шум» ($k=\overline{1,n}$).

3. Построение полезной части наблюдения при наличии многомерного «белого шума»

Пусть в результате эксперимента одновременно наблюдаются через равные промежутки в моменты времени $\{t_j : j\in I\}$, $I=\{0,1,\ldots,N\}$ несколько величин, характеризующих наблюдаемый процесс, т. е. наблюдение – это n-мерный вектор $\left(\eta^1,\eta^2,\ldots,\eta^n\right)$. В результате таких наблюдений получены $\eta^i(t_j)$ ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,N}$). Дополнительно известна априорная информация о полезной части каждой из наблюдаемых величин $\eta^i(t)$, а именно об экстремуме и характере выпуклости полезной части. Однако в силу воздействия случайных помех наблюдаемые величины $\left\{\eta^i(t_j)\right\}_{j=0}^{N}$ ($i=\overline{1,n}$) не обладают этими свойствами. Будем считать, что наблюдаемые величины представимы в виде

$$\eta(t)=\tilde{y}(t)+\overset{o}{W}_n(t),$$

где $\tilde{y}:[t_0,t_N]\to\mathbf{R}^n$ – вектор-функция полезной части наблюдения, а $\overset{o}{W}_n(t)$ – часть, вносящая помехи в измерения – многомерный «белый шум».

Так как система (1), (2) в модели ИУ линейна, то ясно, что построение значений наблюдения по данным, искаженным многомерным «белым шумом», можно проводить для каждой координаты по отдельности. То есть для каждой составляющей наблюдения имеет место представление

$$\eta^i(t) = \tilde{y}_i(t) + \overset{o}{\beta}_i(t) \qquad (i = \overline{1,n}).$$

Здесь $\tilde{y}_i(t)$ – полезная часть соответствующей составляющей наблюдения, а $\overset{o}{\beta}_i(t)$ – часть, вносящая помехи – «белый шум», сечения которого имеют распределение $\overset{o}{\beta}_i \sim N\left(0, \sigma^2/4t\right)$.

Приведем краткое описание процедуры проверки статистического критерия, с помощью которого находится точка экстремума в предположении о ее единственности и выпуклости вверх полезной части наблюдения. Введем в рассмотрение класс функций V_k таких, что они выпуклы и имеют единственную точку максимума t_k на равномерной сетке $\left\{t_j : j \in I\right\}$, $I = \left\{0, 1, \ldots, N\right\}$. Точное описание класса функций V_k приведено в работе [18].

Зафиксируем координату наблюдения $i \in \mathbf{N} : 1 \le i \le n$. Пусть в точке $k_0 \in I$ равномерной сетки полезная составляющая часть сигнала $\tilde{y}_i(t)$ имеет максимум, т. е. $\tilde{y}_i \in V_{k_0}$. Нашей целью является оценка параметра k_0 по зарегистрированным значениям $\left\{\eta^i(t_j)\right\}_{j=0}^{N}$. То есть с заданной вероятностью γ оценить параметр k_0 по данным наблюдения

$$\eta^i(t) = \tilde{y}_i(t) + \overset{o}{\beta}_i(t), \qquad \tilde{y}_i \in V_{k_0}, \qquad \overset{o}{\beta}_i \sim N\left(0, \sigma^2/4t\right). \tag{9}$$

На основе результатов [26] для оценки параметра $k_0 \in I$ для i-й координаты наблюдения будем применять статистику вида

$$\tau_k(i) = \frac{\sum_{j=0}^{N} \left(\eta^i(t_j)\sqrt{t_j} - P_k\left(\eta^i(t_j)\sqrt{t_j}\right)\right)^2}{\sum_{j=0}^{N} \left(\overline{\eta^i} - P_k\left(\eta^i(t_j)\sqrt{t_j}\right)\right)^2},$$

где $\overline{\eta^i} = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} \eta^i(t_j)\sqrt{t_j}$, а $P_k\left(\eta^i(t)\sqrt{t}\right)$ – проекция $\eta^i(t)\sqrt{t}$ на множество V_k, существование которой показано в [26], а ее построение описано в [18]. Значение построенной статистики используется для нахождения значения параметра k, при котором полезная часть сигнала $\eta^i(t)\sqrt{t}$ наиболее близка по форме с $P_k\left(\eta^i(t)\sqrt{t}\right)$. Подробное описание приведено в [18].

Задачу построения значений одной координаты наблюдений на равномерной сетке $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ будем рассматривать как задачу наилучшего приближения $\eta^i(t)\sqrt{t}$ элементами множества V_k, то есть поиска функции $P_k\left(\eta^i(t)\sqrt{t}\right) \in V_k$, такой что $\left\|P_k\left(\eta^i(t)\sqrt{t}\right) - \eta^i(t)\sqrt{t}\right\|^2 = \inf_{f_i \in V_k} \left\|f_i - \eta^i(t)\sqrt{t}\right\|^2$. Алгоритм построения значений полезной части одной координаты наблюдения $P_k\left(\eta^i(t)\sqrt{t}\right)$ приведен в работе [18].

Применение алгоритма из [18] к преобразованию координаты наблюдения $\eta^i(t)\sqrt{t}$ будет давать значения $\tilde{y}_i(t_j)\sqrt{t_j}$ и точка максимума $\tilde{y}_i(t_j)\sqrt{t_j}$ с вероятностью γ находится в точке k_0. Значение полезной части наблюдения будет иметь вид $\tilde{y}_i(t_j)$. Если равномерная сетка $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ содержит точку $t = 0$, то это значение вместе с точками некоторой окрестности этой точки убираем из массива значений. Количество таких точек зависит от количества интервалов сетки N и длины временного промежутка τ, на котором решается задача (1)–(5).

Применяя описанную процедуру к каждой из координат, получим значения вектор-функции наблюдения $\tilde{y}(t)$, на основе которой производится поиск решения задачи оптимального измерения (1)–(5).

Заключение. В дальнейшем планируется проведение вычислительных экспериментов построения значений наблюдений по экспериментальным данным, искаженным многомерным «белым шумом». Кроме того, описанная процедура может быть применена как к помехам другого вида, так и при другой априорной информации о свойствах полезной части сигнала.

Литература

1. Грановский, В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224 с.

2. Шестаков, А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А. Л. Шестаков. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2013. – 256 с.

3. Свиридюк Г.А. Оптимальное управление одним классом линейных вырожденных уравнений / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов / Доклады Академии наук. – 1999. – Т. 346, № 3. – С. 323–325.

4. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16(192). – С. 116–120.

5. Келлер, А.В. Численное решение задачи оптимального управления вырожденной линейной системой уравнений с начальными условиями Шоуолтера–Сидорова / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – № 27(127). – С. 50–56.

6. Келлер, А.В. Численное исследование задач оптимального управления для моделей леонтьевского типа: дис. … д-ра. физ.-мат. наук / А.В. Келлер. – Челябинск, 2011. – 237 с.

7. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

8. Shestakov, A.L. The Theory of Optimal Measurements / A.L. Shestakov, A.V. Keller, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2014. – Vol. 1, no. 1. – P. 3–16.

9. Shestakov, A.L. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology / A.L. Shestakov, A.V. Keller, A.A. Zamyshlyaeva, N.A. Manakova, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2020. – Vol. 7, no. 1. – P. 3–23.

10. Keller, A.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals / A.V. Keller, A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk, Y.V. Khudyakov // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2015. – Vol. 113. – P. 183–195.

11. Sagadeeva, M.A. On Nonstationary Optimal Measurement Problem for the Measuring Transducer Model / M.A. Sagadeeva // 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM–2016), 19–20 May 2016. – 2016. – A/N 7911710.

12. Загребина, С.А. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5–23.

13. Keller, A.V. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy / A.V. Keller, M.A. Sagadeeva // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2020. – Vol. 325. – P. 263–277.

14. Пытьев, Ю.П. Методы морфологического анализа изображений / Ю.П. Пытьев, А.И. Чуличков. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.

15. Nelson, E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.

16. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011. – 436 p.

17. Gliklikh, Yu.E. On Existence of Optimal Solutions for Stochastic Differential Inclusions with Mean Derivatives / Yu.E. Gliklikh, O.O. Zheltikova // Applicable Analysis. – 2014. – Vol. 93, no. 1. – P. 35–45.

18. Сагадеева, М.А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным / М.А. Сагадеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 82–96.

19. Леонтьев, В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты, политика / В. Леонтьев. – М.: Политиздат, 1990. – 414 с.

20. Бояринцев, Ю.Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю.Е. Бояринцев. – Новосибирск: Наука, 2000. – 222 с.

21. Mäarz, R. On Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations and their Numerical Treatment / R. Mäarz // Computing. – 1985. – Vol. 35, no. 1. – P. 13–37.

22. Белов, А.А. Дескрипторные системы и задачи управления / А.А. Белов, А.П. Курдюков. – М.: Физматлит, 2015. – 270 p.

23. Khudyakov, Yu.V. On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers / Yu.V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2016. – Vol. 3, no. 3. – P. 68–73.

24. Khudyakov, Yu.V. On Adequacy of the Mathematical Model of the Optimal Dynamic Measurement / Yu.V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2017. – Vol. 4, no. 2. – P. 14–25.

25. Эйнштейн, А. Брауновское движение / А. Эйнштейн, М. Смолуховский. – М.: ОНТИ, 1936. – 607 с.

26. Демин, Д.С. Фильтрация монотонных выпуклых сигналов, искаженных шумом, и оценка положения особых точек / Д.С. Демин, А.И. Чуличков // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 6. – С. 15–31.

Поступила в редакцию 9 октября 2020 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2020, vol. 12, no. 4, pp. 41–50

MSC 49J15, 62M86, 60H40 **DOI: 10.14529/mmph200405**

CONSTRUCTION AN OBSERVATION IN THE SHESTAKOV–SVIRIDYUK MODEL IN TERMS OF MULTIDIMENSIONAL “WHITE NOISE” DISTORTION

M.A. Sagadeeva
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: sagadeevama@susu.ru

The Shestakov–Sviridyuk model is a mathematical model of a measuring unit used to reconstruct a dynamically distorted signal with the help of experimental data. This model is also called the optimal dynamic measurement problem. The theory of optimal dynamic measurement is based on the problem of minimizing the difference between the values of a virtual observation obtained using a computational model and experimental data, usually distorted by some disturbances. The article describes the Shestakov–Sviridyuk model of optimal dynamic measurement in terms of various types of disturbances. It focuses on the preliminary stage of the study of the optimal dynamic measurement problem, namely, the Pyt’ev–Chulichkov method for constructing observation data, i. e. converting experimental data to clean them from disturbances in the form of “white noise”, which is understood as the Nelson–Glicklich derivative of the multidimensional Wiener process. To use this method, a priori information on the properties of the functions describing the observation, is used.

Keywords: optimal dynamic measurement; the Leontief-type system; resolving flow of matrices; multidimensional Wiener process; Nelson–Glicklich derivative.

References

1. Granovskii V.A. *Dinamicheskie izmereniya. Osnovy metrologicheskogo obespecheniya* (Dynamic Measurements. Basics of Metrological Support). Leningrad, 1984, 257 p. (in Russ.).

2. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskih izmereniyah* (Methods of the Theory of Automatic Control in Dynamic Measurements). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2013, 256 p. (in Russ.).

3. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of a Class of Linear Degenerate Equations. *Doklady Mathematics*, 1999, Vol. 59, no. 1, pp. 157–159.

4. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. A New Approach to Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16, pp. 116–120. (in Russ.).

5. Keller A.V. Numerical Solutions of the Optimal Control Theory for Degenerate Linear System of Equations with Showalter–Sidorov Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2008, no. 27, pp. 50–56. (in Russ.).

6. Keller A.V. *Chislennoe issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dlya modeley leont'evskogo tipa: dis. … d-ra. fiz.-mat. nauk* (Numerical Investigation of the Optimal Control Problem for Leontief Type Models. Dr. phys. and math. sci. diss.). Chelyabinsk, 2011, 237 p.

7. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control*, 2012, Vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079

8. Shestakov A.L., Keller A.V., Sviridyuk G.A. The Theory of Optimal Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, Vol. 1, no. 1, pp. 3–16. (in Russ.).

9. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2020, Vol. 7, no. 1, pp. 3–23. DOI: 10.14529/jcem200101

10. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signals. In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M. (eds). *Semigroups of Operators – Theory and Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2015, Vol. 113, pp. 183–195. DOI: 10.1007/978-3-319-12145-1_11

11. Sagadeeva M.A. On Nonstationary Optimal Measurement Problem for the Measuring Transducer Model. *2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM–2016)*, 2016, A/N 7911710. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911710

12. Zagrebina S.A., Keller A.V. Some Generalizations of the Showalter–Sidorov Problem for Sobolev-Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematica Modelling, Programming & Computer Software"*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 5–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150201

13. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Degenerate Matrix Groups and Degenerate Matrix Flows in Solving the Optimal Control Problem for Dynamic Balance Models of the Economy. In: Banasiak J., Bobrowski A., Lachowicz M., Tomilov Y. (eds). *Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, 2020, Vol. 325, pp. 263–277. DOI: 10.1007/978-3-030-46079-2_15

14. Pyt'ev Yu.P., Chulichkov A.I. *Metody morfologicheskogo analiza izobrazheniy* (Methods of Morphological Analysis of Images). Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 336 p. (in Russ.).

15. Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967, 142 p.

16. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011, 436 p.

17. Gliklikh Yu.E., Zheltikova O.O. On Existence of Optimal Solutions for Stochastic Differential Inclusions with Mean Derivatives. *Applicable Analysis*, 2014, Vol. 93, no. 1, pp. 35–45. DOI: 10.1080/00036811.2012.753588

18. Sagadeeva M.A. Reconstruction of Observation from Distorted Data for the Optimal Dynamic Measurement Problem. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling,*

Programming and Computer Software, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 82–96. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp190207

19. Leontief W. *Essays in Economics: Theories, Theorizing, Facts, and Policies*. New York, London, Toronto, Oxford University Press, Inc., 1966, 252 p.

20. Boyarintsev Yu.E. *Lineynye i nelineynye algebro-differentsial'nye sistemy* (Linear and nonlinear algebro-differential systems). Novosibirsk, Nauka Publ., 2000, 222 p. (in Russ.).

21. Mäarz R. On Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations and their Numerical *Treatment. Computing*, 1985, Vol. 35, no. 1, pp. 13–37. DOI: 10.1007/BF02240144

22. Belov A.A., Kurdyukov A.P. *Deskriptornye sistemy i zadachi upravleniya* (Descriptor Systems and Control Tasks). Moscow, Fizmatlit Publ., 2015, 270 p. (in Russ).

23. Khudyakov Yu.V. On Mathematical Modeling of the Measurement Transducers. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, Vol. 3, no. 3, pp. 68–73. DOI: 10.14529/jcem160308

24. Khudyakov Yu.V. On Adequacy of the Mathematical Model of the Optimal Dynamic Measurement. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2017, Vol. 4, no. 2, pp. 14–25. DOI: 10.14529/jcem170202

25. Eynshteyn A., Smolukhovskiy M. *Braunovskoe dvizhenie* (Brownian Motion). Moscow, ONTI Publ., 1936, 607 p. (in Russ.).

26. Demin D.S., Chulichkov A.I. Filtering of monotonic convex noise-distorted signals and estimates of positions of special points. *Journal of Mathematical Sciences* (New York), 2011, Vol. 172, no. 6, pp. 770–781. DOI: 10.1007/s10958-011-0220-2

Received October 9, 2020