# Математика

**УДК 517.544.8** **DOI: 10.14529/mmph210101**

## УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИОННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ КАНОНИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

***Н.В. Адукова, В.Л. Дильман***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*E-mail: adukovanv@susu.ru*

**Задача факторизации Винера–Хопфа матриц-функций является одной из самых востребованных задач математического анализа. Однако, ее применение сдерживается тем, что к настоящему времени в общем случае нет методов конструктивного построения факторизации. Кроме того, задача является, вообще говоря, неустойчивой, то есть малое возмущение исходной матрицы-функции может привести к изменению целочисленных инвариантов задачи (частных индексов), а факторизационные множители исходной и возмущенной матриц-функций могут быть не близкими. Это означает, что зависимость факторов от возмущения не является непрерывной. Положение осложняется тем, что факторизационные множители находятся неединственным образом, и потому перед сравнением факторизаций их требуется пронормировать. Эта задача также не решена в общем случае. В известной теореме М.А. Шубина проблема нормировки обходится следующим образом: в ней доказано, что если исходная и возмущенная матрицы-функции имеют одинаковые наборы частных индексов, то существуют их факторизации с близкими факторизационными множителями. Ясно, что в данном случае провести эффективную оценку степени их близости нельзя. В предлагаемой работе теорема М.А. Шубина уточняется для случая, когда исходная матрица-функция допускает каноническую факторизацию. В этом случае указано, как должны быть пронормированы канонические факторизации двух достаточно близких матриц-функций для того, чтобы их факторизационные множители также были достаточно близки. Главным результатом работы является получение явных оценок, в терминах факторизации исходной матрицы-функции, для абсолютной погрешности при приближенном вычислении факторов. Оценки получены с использованием техники теплицевых операторов.**

*Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа; матрица-функция; частные индексы; нормировка факторизации; непрерывность факторов; оценка погрешности.*

### Введение

Обозначим $W^{n\times n}$ – множество $n\times n$ матриц-функций, элементы которых принадлежат алгебре Винера $W$, то есть разлагается в абсолютно сходящийся комплексный ряд Фурье.

Тогда $W^{n\times n}$ состоит из тех матриц-функций $A(t)$, которые разлагаются в абсолютно сходящийся матричный ряд Фурье:

$$A(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k t^k, A_k\in\mathbb{C}^{n\times n}, |t|=1,$$

причем $\|A\|_W := \sum_{k=-\infty}^{\infty}\|A_k\|<\infty$. Здесь $\|A_k\|$ – любая операторная норма матриц.

$W^{n\times n}$ со стандартными операциями сложения и умножения матриц-функций, наделенное нормой $\|\cdot\|_W$, является банаховой алгеброй.

Определим два подмножества алгебры $W^{n\times n}$:

$$W_{+}^{n\times n}=\left\{A_{+}(t)\in W^{n\times n}:A_{+}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{k}^{+}t^{k}\right\}$$

и

$$W_{-}^{n\times n}=\left\{A_{-}(t)\in W^{n\times n}:A_{-}(t)=\sum_{k=-\infty}^{0}A_{k}^{-}t^{k}\right\}$$

– это замкнутые подалгебры $W^{n\times n}$ с единицей, которой является единичная матрица $I_n$.

Любая обратимая матрица-функция $A(t)\in W^{n\times n}$ допускает следующее представление:

$$A(t)=A_{-}(t)D(t)A_{+}(t),\quad |t|=1.$$

Здесь $A_{-}(t),A_{-}^{-1}(t)\in W_{-}^{n\times n},A_{+}(t),A_{+}^{-1}(t)\in W_{+}^{n\times n}$, а $D(t)$ является диагональной матрицей-функцией вида

$$D(t)=diag\left[t^{\varkappa_1},\ldots,t^{\varkappa_n}\right],\varkappa_j\in\mathbb{Z}.$$

Это представление называется *правой факторизацией Винера–Хопфа* $A(t)$ на единичной окружности, а целые числа $\varkappa_1,\cdots,\varkappa_n$ называются *правыми частными индексами* $A(t)$.

Основные факты о факторизации приведены в [1], более общая постановка задачи дана в [2].

Задача факторизации Винера–Хопфа является одной из наиболее востребованных задач комплексного анализа. Она имеет многочисленные применения в задачах математической физики (дифракция волн, акустика, теория упругости, механика разрушения, геофизика) [3, 4], в теории дифференциальных уравнений (аналитическая теория, теория солитонов) [5] и математического анализа (системы уравнений Винера–Хопфа, системы сингулярных интегральных уравнений) [6, 7].

Основной проблемой, ограничивающей применение факторизации, является отсутствие в общем случае явных формул для частных индексов и факторов $A_{\pm}(t)$.

Известно, что частные индексы определяются однозначно матрицей-функцией $A(t)$, однако факторы $A_{\pm}(t)$ находятся не единственным образом (см. [1], гл. VIII, Теорема 1.1 и Теорема 1.2). Кроме того, частные индексы, вообще говоря, неустойчивы при малом возмущении матрицы-функции $A(t)$. Необходимым и достаточным условием устойчивости индексов является условие Гохберга–Крейна–Боярского

$$|\varkappa_n-\varkappa_1|\le 1.$$

Поскольку неизвестно, как вычислять частные индексы, этот критерий не является эффективным. Также неизвестно как нормировать факторизацию, чтобы множители $A_{\pm}(t)$ находились единственным образом. Однако, если все частные индексы равны нулю (такая факторизация называется *канонической*), то такую нормировку можно провести: нужно, например, потребовать, чтобы $A_{-}(\infty)=A_0$, где $A_0$ – любая фиксированная обратимая матрица. Любая каноническая факторизация с таким условием будет определяться единственным образом. В настоящее время в общем случае не известно, когда матрица-функция допускает каноническую факторизацию. Однако для лорановских матричных многочленов имеется эффективный критерий существования канонической факторизации [8].

В силу неустойчивости частных индексов нельзя ожидать, что при достаточно малом возмущении матрицы-функции $A(t)$ факторы $A_{\pm}(t)$ будут также мало меняться. Однако, если наложить условие, что возмущенная матрица-функция $\tilde{A}(t)$ имеет те же частные индексы, что и $A(t)$, можно получить следующий результат, впервые отмеченный М.А. Шубиным [9]: для любого достаточно малого $\epsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что при $\|A-\tilde{A}\|_W<\delta$ найдется факторизация $\tilde{A}=\tilde{A}_{-}(t)D(t)\tilde{A}_{+}(t)$, для которой справедливы неравенства

$$\left\|A_+(t)-\tilde{A}_+(t)\right\|_W<\epsilon \text{ и } \left\|A_-(t)-\tilde{A}_-(t)\right\|_W<\epsilon .$$

Здесь $\|\cdot\|_W$ – норма в банаховой алгебре $W^{n\times n}$. Мы привели этот результат в редакции близкой к формулировке Теоремы 6.15 (см. [2], гл. 6). Эта теорема очень важна, поскольку она показывает, что главной проблемой при решении неустойчивой задачи факторизации является задача устойчивого вычисления частных индексов.

Однако, для того чтобы вышеприведенный результат можно было применять при приближенном построении факторизации, нужно:

1) указать способ нормировки факторизации $A(t)$ и $\tilde{A}(t)$, которая гарантирует непрерывность факторов $A_\pm(t)$ при малом возмущении,

2) указать явные оценки абсолютных погрешностей $\left\|A_+-\tilde{A}_+\right\|$, $\left\|A_--\tilde{A}_-\right\|$, что позволит строить приближенно факторизацию $A(t)$ с гарантированной точностью.

В статье мы ответим на эти вопросы для случая канонической факторизации. Это удается сделать потому, что для канонической факторизации частные индексы устойчивы при малом возмущении, и мы знаем, каким образом проводится нормировка этой факторизации.

**1. Предварительные утверждения**

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые стандартные утверждения об оценке погрешности решений операторных уравнений в удобной для дальнейшего форме. Для полноты изложения приведем доказательства этих утверждений.

Пусть $\mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ – линейные ограниченные операторы в банаховом пространстве $X$.

Рассмотрим в $X$ операторные уравнения $\mathcal{A}x=b$ и $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}=\tilde{b}$. Если $\mathcal{A}$ – обратный оператор и возмущенный оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ удовлетворяют неравенству

$$\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|<\frac{1}{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}, \tag{1}$$

то $\tilde{\mathcal{A}}$ также обратим и $x=\mathcal{A}^{-1}b$, $\tilde{x}=\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\tilde{b}$ – единственные решения этих уравнений. Оценим абсолютную погрешность решения $\|x-\tilde{x}\|$ при замене уравнения $\mathcal{A}x=b$ возмущенным уравнением $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{x}=\tilde{b}$.

Для получения более простых оценок можно потребовать выполнения более сильного условия $\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|<\frac{q}{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}$, для некоторого $0<q<1$. Чтобы не загромождать оценки мы возьмем $q=\frac{1}{2}$ и считаем, что справедливо неравенство

$$\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|<\frac{1}{2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}. \tag{2}$$

Прежде всего, получим формулу для $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$ и оценим норму этого оператора.

**Лемма 1.** Если $\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|<\frac{1}{2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}$, то оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ обратим,

$$\tilde{\mathcal{A}}^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}})\right)^k\cdot\mathcal{A}^{-1} \tag{3}$$

и

$$\left\|\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right\|\le 2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|. \tag{4}$$

**Доказательство.** Справедливо равенство

$$\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}-\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)=\mathcal{A}\left(I-\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)\right),$$

где $\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)\right\| \le \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\| < q < 1$.

Поэтому оператор $I-\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)$ обратим и

$$\left(I-\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)\right)^{k}.$$

Здесь ряд сходится абсолютно.

Таким образом, $\tilde{\mathcal{A}}$ обратим как произведение обратимых операторов и

$$\tilde{\mathcal{A}}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)\right)^{k}\cdot\mathcal{A}^{-1}.$$

В силу абсолютной сходимости ряда получаем

$$\left\|\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|\right)^{k}\cdot\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| = 2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|. \qquad \blacksquare$$

**Замечание.** Конечно же выбрав $\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|$ достаточно малым можно добиться, чтобы $\left\|\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right\|$ была сколь угодно близка к $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|$.

Оценим теперь $\left\|\mathcal{A}^{-1}-\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right\|$.

**Лемма 2.** Если $\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\| < \dfrac{1}{2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}$, то $\left\|\mathcal{A}^{-1}-\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right\| \le 2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^2\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|$.

**Доказательство.** Воспользовавшись формулой (3), получаем

$$\mathcal{A}^{-1}-\tilde{\mathcal{A}}^{-1} = \left(I-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)\right)^{k}\right)\cdot\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right)\right)^{k}\cdot\mathcal{A}^{-1}.$$

Поэтому, $\left\|\mathcal{A}^{-1}-\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right\| \le \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^2\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^2\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|$. $\blacksquare$

**Замечание.** Утверждения лемм 1, 2 очевидным образом выполняются в любой банаховой алгебре. Теперь можно получить оценку абсолютной погрешности решения уравнения $\mathcal{A}x=b$.

**Лемма 3.** Если $\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\| \le \dfrac{1}{2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}$, то

$$\left\|x-\tilde{x}\right\| \le 2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^2\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|\left\|b\right\| + 2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|b-\tilde{b}\right\|.$$

**Доказательство.** Так как $x-\tilde{x} = \left(\mathcal{A}^{-1}-\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right)b + \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\left(b-\tilde{b}\right)$, то

$$\left\|x-\tilde{x}\right\| \le \left\|\mathcal{A}^{-1}-\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right\|\left\|b\right\| + \left\|\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\right\|\left\|b-\tilde{b}\right\|.$$

Воспользовавшись леммой 1 и леммой 2 получаем нужную оценку

$$\left\|x-\tilde{x}\right\| \le 2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^2\left\|\mathcal{A}-\tilde{\mathcal{A}}\right\|\left\|b\right\| + 2\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|b-\tilde{b}\right\|. \qquad \blacksquare$$

Этот результат приведен без доказательства в [10] для случая матричных уравнений и любого $q$, $0<q<1$.

## 2. Непрерывность факторов канонической факторизации

В силу того, что факторизация Винера–Хопфа:

$$A(t) = A_{-}(t)D(t)A_{+}(t), \quad |t|=1,$$

находится неединственным образом, в формулировке теоремы Шубина имеется некая неопределенность: не указано, как выбрать факторизацию близкой к $A(t)$ матрицы-функции $\tilde{A}(t)$ для того, чтобы получить факторизацию с близкими к $A_{\pm}(t)$ факторами.

Основной причиной этого пробела в теории факторизации является то, что к настоящему времени в общем случае нет условий нормировки факторизации, которые гарантировали бы ее единственность.

Однако в случае канонической факторизации

$$A(t) = A_-(t)A_+(t)$$

такие условия легко указать. Нетрудно проверить, что, например, нормировка

$$A_-(\infty) = A_0, \tag{5}$$

где $A_0$ – произвольная, наперед заданная обратимая матрица, позволяет найти каноническую факторизацию единственным образом.

Далее мы будем предполагать, что условие (5) с фиксированной матрицей $A_0$ выполнено. Обычно для получения оценок погрешностей при нахождении приближенной факторизации привлекается техника сингулярных интегральных операторов (например, см. [2], гл. 6).

Для факторизации в алгебре Винера $W^{n\times n}$ вместо сингулярных интегральных операторов можно использовать операторы Винера–Хопфа с матричным символом $A(t)$. Однако в нашем случае удобнее будет использовать вместо классического оператора Винера–Хопфа аналог такого оператора, определенный на банаховой подалгебре $W_+^{n\times n}$, рассматриваемой как банахово пространство.

Помимо $W_-^{n\times n}$ введем еще одно подмножество $W^{n\times n}$:

$$(W_-^{n\times n})_0 = \left\{ A_-(t) \in W_-^{n\times n} : A_-(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} A_k^- t^k \right\}.$$

Это банахова подалгебра $W^{n\times n}$ без единицы и $\left(W_-^{n\times n}\right)_0 \bigcap W_+^{n\times n} = \varnothing$. Поэтому

$$W^{n\times n} = \left(W_-^{n\times n}\right)_0 \oplus W_+^{n\times n},$$

то есть алгебра $W^{n\times n}$ является распадающейся.

Определим оператор проектирования $\mathcal{P}_+ : W^{n\times n} \to W_+^{n\times n}$, действующий по правилу

$$\mathcal{P}_+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k .$$

Это линейный ограниченный оператор, причем $\|\mathcal{P}_+\| \le 1$.

Пусть $A(t) \in W^{n\times n}$. На банаховом пространстве $W_+^{n\times n}$ определим оператор $T_A$, действующий в $W_+^{n\times n}$ по правилу

$$T_A X(t) = \mathcal{P}_+ A(t) X(t).$$

Очевидно, что $T_A$ – линейный оператор и $\|T_A\| \le \|A\|_W$. Оператор $T_A$ обладает следующим легко проверяемым свойством частичной мультипликативности

$$T_{A_- A_+} = T_{A_-} T_{A_+}$$

при условии, что $A_\pm \in W_\pm^{n\times n}$. Отсюда следует, что оператор $T_{A_-}$ $(T_{A_+})$ обратим тогда и только тогда, когда $A_-^{-1}(t)\left(A_+^{-1}(t) \in W_+^{n\times n}\right)$, причем $T_{A_-}^{-1} = T_{A_-^{-1}}\left(T_{A_+}^{-1} = T_{A_+^{-1}}\right)$.

Поэтому оператор $T_A$ обратим тогда и только тогда, когда символ $A$ допускает каноническую правую факторизацию Винера–Хопфа

$$A(t) = A_-(t)A_+(t),$$

где $A_-^{\pm1}(t) \in W_-^{n\times n}$, $A_+^{\pm1}(t) \in W_+^{n\times n}$.

Теперь мы можем доказать основные результаты работы.

**Теорема 1.** Пусть $A(t) \in W^{n\times n}$ допускает каноническую факторизацию

$$A(t)=A_-(t)A_+(t),\ |t|=1,$$

факторизация нормирована условием $A_-(\infty)=A_0$, и матрица-функция $\tilde{A}(t)\in W^{n\times n}$ удовлетворяет неравенству

$$\|A-\tilde{A}\|_W\le\frac{1}{2\|A_+^{-1}\|_W\|A_-^{-1}\|_W},\ 0<q<1.$$

Тогда $\tilde{A}(t)$ – обратимая матрица-функция, допускающая каноническую факторизацию

$$\tilde{A}(t)=\tilde{A}_-(t)\tilde{A}_+(t),\ |t|=1.$$

Если эту факторизацию пронормировать условием $\tilde{A}_-(\infty)=A_0$, то справедлива оценка:

$$\|A_+^{-1}-\tilde{A}_+^{-1}\|_W\le 2\|A_+^{-1}\|_W^2\|A_-^{-1}\|_W^2\|A_0\|\|A-\tilde{A}\|_W.$$

**Доказательство.** Поскольку $\|A^{-1}\|_W\le\|A_+^{-1}\|_W\|A_-^{-1}\|_W$, то $\dfrac{1}{2\|A_+^{-1}\|_W\|A_-^{-1}\|_W}\le\dfrac{1}{2\|A^{-1}\|}$, то есть $\|A-\tilde{A}\|_W<\dfrac{1}{2\|A^{-1}\|}$ и поэтому $\tilde{A}$ – обратимая матрица-функция.

Докажем, что $\tilde{A}$ допускает каноническую факторизацию. Поскольку

$$\|T_A-T_{\tilde{A}}\|\le\|A-\tilde{A}\|_W<\frac{1}{2\|A_+^{-1}\|_W\|A_-^{-1}\|_W}\tag{6}$$

и $T_A$ обратим, причем $T_A^{-1}=T_{A_+^{-1}}T_{A_-^{-1}}$, то $\|T_A^{-1}\|\le\|T_{A_+^{-1}}\|\|T_{A_-^{-1}}\|\le\|A_+^{-1}\|_W\|A_-^{-1}\|_W$.

Значит, $\dfrac{1}{2\|A_+^{-1}\|_W\|A_-^{-1}\|_W}\le\dfrac{1}{2\|T_A^{-1}\|}$.

Из неравенства (6) следует тогда, что оператор $T_{\tilde{A}}$ обратим и поэтому $\tilde{A}$ допускает каноническую факторизацию $\tilde{A}=\tilde{A}_-\tilde{A}_+$.

Рассмотрим теперь операторные уравнения $T_AX=A_0$ и $T_{\tilde{A}}\tilde{X}=A_0$, которые имеют единственные решения. Нетрудно видеть, что это будут матрицы-функции $X=A_+^{-1}$ и $\tilde{X}=\tilde{A}_+^{-1}$ из $W_+^{n\times n}$.

В самом деле, $T_AA_+^{-1}=T_{A_-}T_{A_+}A_+^{-1}=\mathcal{P}_+A_-\mathcal{P}_+A_+A_+^{-1}=\mathcal{P}_+A_-I_n=\mathcal{P}_+A_-=A_-(\infty)=A_0$.

Применим теперь к этим решениям лемму 3

$$\|A_+^{-1}-\tilde{A}_+^{-1}\|_W\le 2\|T_A^{-1}\|^2\|T_A-T_{\tilde{A}}\|\|A_0\|.$$

Поскольку, как уже отмечалось $\|T_A^{-1}\|\le\|A_+^{-1}\|_W\|A_-^{-1}\|_W$, то получаем

$$\|A_+^{-1}-\tilde{A}_+^{-1}\|_W\le 2\|A_+^{-1}\|_W^2\|A_-^{-1}\|_W^2\|A_0\|\|A-\tilde{A}\|_W.$$

Необходимая оценка получена. ■

Теперь мы можем доказать непрерывность фактора $A_-$.

**Теорема 2.** Пусть $A(t)\in W^{n\times n}$ допускает каноническую факторизацию

$$A(t)=A_-(t)A_+(t),\ |t|=1,$$

где $A_-(\infty)=A_0$.

Если $\left\|A-\tilde{A}\right\|_W \le \min\left\{\dfrac{1}{2\left\|A_+^{-1}\right\|_W \left\|A_-^{-1}\right\|_W}, \left\|A\right\|_W\right\}$, то для фактора $\tilde{A}_-(t)$ канонической факторизации $\tilde{A}(t)=\tilde{A}_-(t)\tilde{A}_+(t)$, нормированной условием $\tilde{A}_- = A_0$ справедливо неравенство

$$\left\|A_-(t)-\tilde{A}_-(t)\right\| < \left(\left\|A_+^{-1}\right\|_W + 4\left\|A\right\|_W \left\|A_+^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_0\right\|\right)\left\|A-\tilde{A}\right\|_W .$$

**Доказательство.** Условие $\left\|A-\tilde{A}\right\|_W < \dfrac{1}{2\left\|A_+^{-1}\right\|_W \left\|A_-^{-1}\right\|_W}$ в силу теоремы 1 обеспечивает существование канонической факторизации $\tilde{A}_-(t)$. Из канонических факторизаций $A(t)=A_-(t)A_+(t)$, $\tilde{A}(t)=\tilde{A}_-(t)\tilde{A}_+(t)$ следует $A_- - \tilde{A}_- = (A-\tilde{A})A_+^{-1} + \tilde{A}(A_+^{-1} - \tilde{A}_+^{-1})$.
Поэтому

$$\left\|A_- - \tilde{A}_-\right\|_W \le \left\|A_+^{-1}\right\|_W \left\|A-\tilde{A}\right\| + \left\|\tilde{A}\right\|_W \left\|A_+^{-1}-\tilde{A}_+^{-1}\right\|.$$

Поскольку

$$\left\|\tilde{A}\right\|_W \le \left\|A\right\|_W + \left\|A-\tilde{A}\right\|_W \le 2\left\|A\right\|_W$$

из теоремы 1 $\left\|A_+^{-1}-\tilde{A}_+^{-1}\right\|_W < 2\left\|A_+^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_0\right\| \left\|A-\tilde{A}\right\|_W$, то

$$\left\|A_- - \tilde{A}_-\right\|_W \le \left(\left\|A_+^{-1}\right\|_W + 4\left\|A\right\|_W \left\|A_+^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_0\right\|\right)\left\|A-\tilde{A}\right\|_W . \qquad \blacksquare$$

Наконец, докажем непрерывность фактора $A_+(t)$ при малом возмущении $A(t)$.

**Теорема 3.** Пусть $A(t)\in W^{n\times n}$ допускает каноническую факторизацию $A(t)=A_-(t)A_+(t),\ A_-(\infty)=A_0$.

Если

$$\left\|A-\tilde{A}\right\|_W \le \min\left\{\frac{1}{2\left\|A_+^{-1}\right\|_W \left\|A_-^{-1}\right\|_W}, \frac{1}{4\left\|A_+\right\|_W \left\|A_+^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_0\right\|}\right\}, \tag{7}$$

то для фактора $\tilde{A}_+(t)$ канонической факторизации $\tilde{A}(t)=\tilde{A}_-(t)\tilde{A}_+(t)$ справедливо неравенство

$$\left\|A_+ - \tilde{A}_+\right\|_W \le 4\left\|A_+\right\|_W^2 \left\|A_+^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_0\right\| \left\|A-\tilde{A}\right\|_W .$$

**Доказательство.** Условие $\left\|A-\tilde{A}\right\|_W \le \dfrac{1}{2\left\|A_+^{-1}\right\|_W \left\|A_-^{-1}\right\|_W}$ гарантирует по теореме 1 существование канонической факторизации $\tilde{A}(t)$. Кроме того, в силу этой теоремы $\left\|A_+^{-1}-\tilde{A}_+^{-1}\right\|_W \le 2\left\|A_+^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_0\right\| \left\|A-\tilde{A}\right\|_W$. Таким образом, из (7) получаем

$$\left\|A_+^{-1}-\tilde{A}_+^{-1}\right\|_W \le \frac{1}{2\left\|A_+\right\|_W}.$$

Применим лемму 2 к $\mathcal{A}=A_+^{-1}(t)$ из банаховой алгебры $W_+^{n\times n}$. Тогда

$$\left\|A_+ - \tilde{A}_+\right\|_W \le 2\left\|A_+\right\|_W^2 \left\|A_+^{-1}-\tilde{A}_+^{-1}\right\|_W \le 4\left\|A_+\right\|_W^2 \left\|A_+^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|A_0\right\| \left\|A-\tilde{A}\right\|_W . \qquad \blacksquare$$

Итак, мы получили явные оценки для абсолютных погрешностей $\left\|A_+ - \tilde{A}_+\right\|_W$ и $\left\|A_- - \tilde{A}_-\right\|_W$ в терминах канонических факторизаций исходной матрицы-функции $A(t)$.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-000001.*

**Литература**

1. Гохберг, И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. – М: Наука, 1971. – 352 с.
2. Litvinchuk, G.S. Factorization of Measurable Matrix Functions / G.S. Litvinchuk, I.M. Spitkovsky. – Birkhauser, Basel-Boston, 1987. – 372 p.
3. Daniele, V.G. The Wiener–Hopf Method in Electromagnetics / V.G. Daniele, R.S. Zich. – ISMB Series. New York: SciTech Publishing, Edison, 2014. – 384 p.
4. Lawrie, J.B. A Brief Historical Perspective of the Wiener–Hopf Technique / J.B. Lawrie, I.D. Abrahams // Journal of Engineering Mathematics. – 2007. – Vol. 59. – P. 351–358.
5. Тахтаджян, Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фадеев. – М: Наука, 1986. – 527 с.
6. Гохберг, И.Ц. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн // УМН. – 1958. – Т. 13. – Вып. 2(80). – С. 3–72.
7. Векуа, Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н.П. Векуа. – М.: Наука, 1970. – 379 с.
8. Adukova, N.V. On Effective Criterion of Stability of Partial Indices for Matrix Polynomials / N.V. Adukova, V.M. Adukov // Proc. R. Soc. A. – 2020. – Vol. 476, Iss. 2238. – 20200012.
9. Шубин, М.А. Факторизация зависящих от параметра матриц–функций в нормированных кольцах и связанные с ней вопросы теории нетеровых операторов / М.А. Шубин // Матем.сб. – 1967. – Т. 73(115), № 4. – С. 610–629.
10. Adukov, V.M. Algorithm of Polynomial Factorization and its Implementation in Maple / V.M. Adukov // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2018. – Т. 11, № 4. – С. 110–122.

***Поступила в редакцию 19 января 2021 г.***

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series “Mathematics. Mechanics. Physics”***
***2021, vol. 13, no. 1, pp. 5–13***

**DOI: 10.14529/mmph210101**

## STABILITY OF FACTORIZATION FACTORS OF THE CANONICAL FACTORIZATION OF WIENER–HOPF MATRIX FUNCTIONS

***N.V. Adukova, V.L. Dilman***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*E-mail: adukovanv@susu.ru*

The problem of Wiener–Hopf factorization of matrix functions is one of the most demanded problems of mathematical analysis. However, its application is constrained by the fact that at the present time, there are no methods for constructively constructing factorization in the general case. In addition, the problem is far and by unstable, that is, a small perturbation of the original matrix function can lead to a change in the integer invariants of the problem (partial indices), and the factorization factors of the original and perturbed matrix functions may not be close. This means that the dependence of factors on perturbation is not continuous. The situation is complicated by the fact that factorization factors are found in a non-unique way, and therefore, before comparing factorizations, they need to be normalized. This problem is also not solved in the general case. In the well-known theorem of M.A. Shubin, the normalization problem is bypassed in the following way: it is proved that if the original and perturbed matrix functions have the same sets of partial indices, then their factorizations with close factorization factors exist. It is clear that in this case it is impossible to assess the degree of their proximity efficiently. In the proposed work, the theorem of M.A. Shubin is refined for the case when the original matrix function admits a canonical factorization. In this case, it is indicated how the canonical factorizations of two sufficiently close matrix functions should be normalized so that their factorization factors are also close enough. The main result of the work is to obtain explicit estimates, in terms of factorization of the original matrix function, for the absolute error in the approximate calculation of factors. The estimates are obtained by using the Toeplitz operator technique.

*Keywords: Wiener–Hopf factorization; matrix functions; partial indices; normalization of factorization; continuity of factors; error estimation.*

## References

1. Gokhberg I.Ts., Fel'dman I.A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* (Convolution Equations and Projection Methods for Their Solution). Moscow, Nauka Publ., 1971, 352 p. (in Russ.).

2. Litvinchuk G.S., Spitkovsky I.M. *Factorization of measurable matrix functions*. Birkhauser, Basel-Boston, 1987, 372 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-6266-0

3. Daniele V.G., Zich R.S. *The Wiener–Hopf method in electromagnetics*. ISMB Series. New York: SciTech Publishing, Edison, 2014, 384 p. DOI: 10.1049/SBEW503E

4. Lawrie J.B., Abrahams I.D. A Brief Historical Perspective of the Wiener–Hopf Technique. *J. Eng. Math.*, 2007, Vol. 59, pp. 351–358. DOI: 10.1007/s10665-007-9195-x

5. Takhtadzhyan L.A., Fadeev L.D. *Gamil'tonov podkhod v teorii solitonov* (Hamiltonian Approach to Soliton Theory). Moscow, Nauka Publ., 1986, 527 p. (in Russ.).

6. Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Systems of Integral Equations on the Half-Line with Kernels Depending on the Difference of the Arguments. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1958, Vol. 13, Iss. 2(80), pp. 3–72. (in Russ.).

7. Vekua N.P. *Sistemy singulyarnykh integral'nykh uravneniy i nekotorye granichnye zadachi* (Systems of Singular Integral Equations and some Boundary Value Problems) Moscow, Nauka Publ., 1970, 379 p. (in Russ.).

8. Adukova N.V., Adukov V.M. On Effective Criterion of Stability of Partial Indices for Matrix Polynomials. *Proc. R. Soc. A.*, 2020, Vol. 476, Iss. 2238, 20200012. DOI: 10.1098/rspa.2020.0012

9. Šubin M.A. Factorization of Parameter-Dependent Matrix-Functions in Normed Rings and Certain Related Questions in the Theory of Noetherian Operators. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1967, Vol. 2, no. 4, pp. 543–560. DOI: 10.1070/SM1967v002n04ABEH002354

10. Adukov V.M. Algorithm of Polynomial Factorization and its Implementation in Maple. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, Vol. 11, no. 4, pp. 110–122. DOI: 10.14529/mmp180408

***Received January 19, 2021***