УДК 517.977 DOI: 10.14529/mmph210103

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТЕЛЕЖКОЙ С НАХОДЯЩИМСЯ НА НЕЙ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

В.И. Ухоботов[1,2], *Н.Д. Ливанов*[2]
[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия*
[2] *Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия*
Email: ukh@csu.ru, nikita.livanov.mail@gmail.com

Рассматривается задача управления процессом продольных колебаний упругого однородного стержня постоянного сечения. Под стержнем понимается тело, длина которого значительно превышает его поперечные размеры. Стержень лежит на движущейся тележке, правый конец которого жестко закреплен, а левый конец свободен. Трение между стержнем и поверхностью тележки в рассматриваемой задаче отсутствует. При движении тележки стержень совершает вынужденные продольные колебания в неинерциальной системе отсчета связанной с тележкой. Управлением является ускорение тележки, величина которого ограничена. Границы ее допустимых значений заданы. Величина совокупности внешних сил, действующих на стержень, точно не известна, а заданы только её границы изменения. Цель процесса управления заключается в том, чтобы в заданный момент времени среднее значение величины растяжения стержня находилось в заданном промежутке. Это среднее значение вычисляется с помощью заданной функции.

Для решения поставленной задачи был применен метод оптимизации гарантированного результата. Был осуществлен переход к новой одномерной переменной, с помощью которой рассматриваемая задача управления продольными колебаниями стержня была сведена к однотипной задаче управления при наличии помехи. Это позволило найти необходимые и достаточные условия, при которых можно осуществить выполнение поставленной цели при любой допустимой совокупности внешних сил, суммарная величина которых удовлетворяет заданным ограничениям. Предложен соответствующий алгоритм построения закона изменения ускорения тележки. Разобран пример, наглядно показывающий, как строится управление тележкой, гарантирующее достижение поставленной цели.

Ключевые слова: управление; упругий стержень; гарантированный результат.

Введение

При изучении управляемых процессов колебания упругих систем возникают математические задачи управления гиперболическими уравнениями [1–5]. Так на практике встречаются задачи управления процессом транспортировки упругих балок, когда точное значение внешних сил не известно. При исследовании таких задач можно применить метод оптимизации гарантированного результата [6]. В основе этого метода лежит теория дифференциальных игр [7].

В данной работе рассматривается задача, когда управлением является ограниченное по величине ускорение тележки, на которой лежит упругий стержень. Точное значение величины силы, действующей на стержень, не известно. Известны границы её изменения. Цель процесса управления заключается в том, чтобы в заданный момент времени среднее значение величины растяжения стержня находилось в заданном промежутке. Среднее значение вычисляется с помощью заданной функции. С помощью замены переменной задача сводится к однотипной задаче управления при наличии помехи. Для таких задач, рассматриваемых в рамках теории дифференциальных игр, построены оптимальные управления игроков [8].

Постановка задачи

Рассмотрим тележку, на которой лежит упругий стержень, правый конец которого жестко закреплен, а левый свободен. Трение между стержнем и поверхностью тележки отсутствует. Ускорение w тележки является управлением, и оно ограничено.

При движении тележки стержень совершает продольные колебания. Свяжем с тележкой систему координат, ось X которой направлена по стержню. Считаем, что стержень единичной длины. Плотность совокупности внешних сил, действующих на стержень, задается непрерывной функцией $f(x,t)$, где x – абсцисса некоторого сечения стержня, когда последний находится в покое. Обозначим через $U(x,t)$ смещение этого сечения в момент времени t. Поскольку введенная система отсчета является неинерциальной, то уравнение вынужденных продольных колебаний стержня примет вид [9].

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - w + f(x,t), x \in [0,1], t \in [0,p]. \tag{1}$$

Это уравнение рассматривается при заданных начальных условиях

$$U(x,0) = g(x), \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = G(x), \tag{2}$$

где функции g и G непрерывны на отрезке [0, 1]. Кроме того, из условия, что правый конец стержня жестко закреплен, а левый свободен, получим граничные условия [9]

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0, U(1,t) = 0, t \in [0,p]. \tag{3}$$

По условию ускорение тележки ограничено, поэтому его можно записать в виде

$$w = a_1(t) - a_2(t)\xi,\ |\xi| \le 1,\ a_2(t) > 0. \tag{4}$$

Параметр ξ является управлением.

Считаем, что плотность $f(x,t)$ внешних сил точно не известна. Известна её оценка

$$f_2(x,t) \le f(x,t) \le f_1(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,p]. \tag{5}$$

Здесь $f_i : [0,1] \times [0,p] \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ – непрерывные функции.

Заданы числа $l \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \ge 0$. Цель выбора управления ξ (4) заключается в том, чтобы осуществить неравенство

$$\left| \int_0^1 U(x,p)\sigma(x)dx - l \right| \le \varepsilon \tag{6}$$

для любой реализации внешней силы, плотность которой удовлетворяет условию (5). Здесь функция $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ является непрерывной и удовлетворяет условиям

$$\sigma(0) = \sigma(1) = 0. \tag{7}$$

Формализация задачи

Опишем допустимое правило формирования управления ξ (4). Оно означает, что каждому моменту времени $0 \le \vartheta < p$ и каждой возможной функции растяжения стержня $U(x,\vartheta)$ ставится в соответствие функция $\xi : [\vartheta, p] \to [0,1]$. Такое правило будем обозначать

$$\xi(t) = \mathcal{N}(t, U(\cdot,\vartheta)),\ t \in [\vartheta, p]. \tag{8}$$

Зафиксируем разбиение

$$\omega : 0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_{m+1} = p$$

отрезка $[0,p]$ с диаметром $d(\omega) = \max\limits_{0 \le i \le p}(t_{i+1} - t_i)$. Зафиксируем управление (8), плотность $f(x,t)$ внешних сил при $x \in [0,1], 0 \le t \le p.$ Построим решение $U_\omega(x,t), 0 \le x \le 1, 0 \le t \le p$ задачи (1)–(3) следующим образом.

Положим $g_0(x) = g(x), G_0(x) = G(x)$ при $0 \le x \le 1.$ При $t_0 \le t \le t_1, 0 \le x \le 1$ функция $U_\omega(x,t)$ определяется, как решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 U_\omega(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_\omega(x,t)}{\partial x^2} + a_1(t) - a_2(t)\xi_i + f(x,t), \tag{9}$$

$$U_\omega(x,t_i)=g_i(x),\frac{\partial U_\omega(x,t_i)}{\partial t}=G_i(x),\tag{10}$$

$$\frac{\partial U_\omega(0,t)}{\partial x}=0,U_\omega(1,t)=0,\tag{11}$$

$$\xi_i=\mathcal{N}\left(t_i,U_\omega(\cdot,t_i)\right).\tag{12}$$

Здесь $i=0,x\in[0,1],t\in[t_0,t_1]$.

Пусть функция $U_\omega(x,t)$ определена при $t_0\le t\le t_{i-1},0\le x\le 1$. Положим $g_i(x)=U_\omega(x,t_{i-1}),G_i(x)=\partial U_\omega(x,t_{i-1})/\partial t$. С помощью формул (9)–(12) строим функцию $U_\omega(x,t)$ при $t_{i-1}\le t\le t_i$.

Будем говорить, что управление (8) гарантирует выполнение поставленной цели (6), если для любого числа $\gamma>\varepsilon$ найдется число $\delta>0$ такое, что для любого разбиения ω с диаметром $d(\omega)<\delta$ и для любой непрерывной функции $f(x,t)$, удовлетворяющей условию (5), выполнено неравенство

$$\left|\int_0^1 U_\omega(x,p)\sigma(x)dx-l\right|\le\gamma.\tag{13}$$

Переход к одномерной задаче

Пусть функция $\psi(x,\tau)$ при $0\le x\le 1,0\le\tau\le p$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2\psi(x,\tau)}{\partial\tau^2}=a^2\frac{\partial^2\psi(x,\tau)}{\partial\tau^2},\tag{14}$$

$$\frac{\partial\psi(0,\tau)}{\partial x}=0,\psi(1,\tau)=0,0\le\tau\le p,\tag{15}$$

$$\frac{\partial\psi(x,0)}{\partial\tau}=\sigma(x),\psi(x,0)=0,0\le x\le 1.\tag{16}$$

Из равенства (7) следует, что условия согласования на концах отрезка выполнены. Из равенств (5) получим, что

$$\int_0^1 f(x,t)\psi(x,p-t)dx=b_1(t)+b_2(t)\nu,\ |\nu|\le 1.\tag{17}$$

Здесь

$$b_1(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(f_1(x,t)+f_2(x,t)\right)\psi(x,p-t)dx,\ \ b_2(t)=\frac{1}{2}\left|\int_0^1\left(f_1(x,t)-f_2(x,t)\right)\psi(x,p-t)dx\right|\ge 0.\tag{18}$$

Положим

$$\theta_\omega(t)=\int_0^1\left(\frac{\partial\psi(x,p-t)}{\partial\tau}U_\omega(x,t)+\psi(x,p-t)\frac{\partial U_\omega(x,t)}{\partial t}\right)dx.\tag{19}$$

Тогда

$$\dot\theta_\omega(t)=\int_0^1\left(-\frac{\partial^2\psi(x,p-t)}{\partial\tau^2}U_\omega(x,t)+\psi(x,p-t)\frac{\partial^2 U_\omega(x,t)}{\partial t^2}\right)dx.$$

Учтем уравнения (9), (14) и равенства (17), (18). Получим

$$\dot\theta_\omega(t)=\int_0^1\left(-a^2\frac{\partial^2\psi(x,p-t)}{\partial x^2}U_\omega(x,t)\right)dx+\int_0^1\left(a^2\psi(x,p-t)\frac{\partial^2 U_\omega(x,t)}{\partial x^2}\right)dx+$$

$$+\left(a_1(t)-a_2(t)\xi_i\right)\int_0^1\psi(x,p-t)dx+b_1(t)+b_2(t)\nu_i\tag{20}$$

при $t_i \le t \le t_{i+1}$. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (11) и (15), получим

$$\int_0^1 \psi(x,p-t)\frac{\partial^2 U_\omega(x,t)}{\partial x^2}dx = \int_0^1 \frac{\partial \psi(x,p-t)}{\partial x}\frac{\partial U_\omega(x,t)}{\partial x}dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 \psi(x,p-t)}{\partial x^2}U_\omega(x,t)dx.$$

Отсюда и из (20) следует, что при $t_i \le t \le t_{i+1}$

$$\dot{\theta}_\omega(t) = -\left| a_2(t)\int_0^1 \psi(x,p-t)dx \right| u_i + b_2(t)v_i + a_1(t)\int_0^1 \psi(x,p-t) + b_1(t).$$

Здесь

$$\xi = \operatorname{sign}\left(a_2(t)\int_0^1 \psi(x,p-t)dx \right)u. \tag{21}$$

Полагаем, что $\operatorname{sign} 0 = 1$.

Обозначим

$$z_\omega(t) = \theta_\omega(t) + \int_t^p \left(a_1(r)\int_0^1 \psi(x,p-r)dx + b_1(r) \right)dr - l. \tag{22}$$

Тогда

$$\dot{z}_\omega(t) = -a(t)u_i + b(t)v_i, |u_i| \le 1, |v_i| \le 1, t_i \le t \le t_{i+1}. \tag{23}$$

Здесь обозначено

$$a(t) = \left| a_2(t)\int_0^1 \psi(x,p-t)dx \right| \ge 0,\ b(t) = b_2(t) \ge 0. \tag{24}$$

Далее, учитывая условие (11) и формулы (19), (22), перепишем неравенство (13) в следующем виде:

$$|z_\omega(p)| \le \gamma. \tag{25}$$

Условия возможности окончания в одномерной задаче

Рассмотрим одномерную задачу (23), (25). Отметим, что функции (24) являются непрерывными. Построим ломаные

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int_{t_i}^t a(r)dru_i + \int_{t_i}^t b(r)drv_i,\ t_i \le t \le t_{i+1}, \tag{26}$$

с начальным условием $z_\omega(0) = z(0)$. Семейство этих ломаных, определенных на отрезке $[0,p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным [8, с. 46]. По теореме Арцела [10, с. 104] из любой последовательности ломаных (26) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[0,p]$.

Пусть в (26)

$$u_i = \operatorname{sign} z_\omega(t_i), i = \overline{0,m}, \tag{27}$$

а функция $z(t)$ при $0 \le t \le p$ является равномерным пределом последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$ (26), у которых диаметр разбиения $d(\omega_k) \to 0$. Тогда [8, теорема 8.1] выполнено неравенство

$$|z(p)| \le F(z(0)).$$

Здесь обозначено

$$F(z) = \max\left(|z| + \int_0^p (b(r) - a(r))dr; \max_{0\le\tau\le p}\int_\tau^p (b(r)-a(r))dr \right).$$

Пусть число $\varepsilon \ge F\left(z(0)\right)$. Тогда можно показать, что для любого числа $\gamma > \varepsilon$ существует число $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство (25) для любой ломаной (26) с диаметром разбиения $d(\omega) < \delta$ и с управлением (27).

Пусть в (26)

$$v_i = \operatorname{sign} z_\omega(t_i), i = \overline{0,m}, \tag{28}$$

а функция $z(t)$ при $0 \le t \le p$ является равномерным пределом последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$ (26), у которых $d(\omega_k) \to 0$. Тогда [8, теорема 8.2] выполнено неравенство

$$\left|z(p)\right| \le F\left(z(0)\right).$$

Отсюда можно получить, что если числа $\varepsilon < \gamma < F\left(z(0)\right)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\left|z_\omega(p)\right| > \gamma,$$

для любой ломаной $z_\omega(t)$ (26) с диаметром разбиения $d(\omega) < \delta$ и с v_i (28).

Таким образом, можно построить управление (8), которое гарантирует выполнение поставленной цели (13) тогда и только тогда, когда $F\left(z(0)\right) \le \varepsilon$.

Из формул (21), (27) получим, что

$$\xi = \operatorname{sign}\left(z a_2(t) \int_0^1 \psi(x, p-t) dx \right) u.$$

Здесь z определяется формулами (19) и (22) с заданной в (22) $U_\omega(x,t)$ на $U(x,t)$.

Пример

Пусть функция

$$\sigma(x) = 3\pi a \sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right),$$

тогда условие (7) выполнено. Рассмотрим функцию

$$\psi(x,\tau) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}a\tau\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}a\tau\right),$$

которая удовлетворяет уравнению (14) и условиям (15), (16). Подставим функцию $\psi(x,\tau)$ в формулу (19) при $U_\omega(x,t) = U(x,t)$. Тогда из (22) следует, что

$$z(t) = \frac{3\pi a}{2}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}a(p-t)\right)U(x,t)dx +$$

$$+\int_0^1 \left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}a(p-t)\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}a(p-t)\right)\right)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}dx +$$

$$+\int_t^p \left[a_1(r)\frac{6}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}a(p-r)\right) + \frac{1}{9}\sin\left(\frac{3\pi}{2}a(p-r)\right)\right) + b_1(r)\right]dr - l.$$

Алгоритм сведения задачи управления колебанием упругого стержня к одномерной дифференциальной игре разработан В.И. Ухоботовым при поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00105).

Литература

1. Осипов, Ю.С. К теории позиционного управления в гиперболических системах / Ю.С. Осипов, С.П. Охезин // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233, № 4. – С. 551–554.

2. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

3. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

4. Егоров, А.И. Управление упругими колебаниями / А.И. Егоров. – ДАН УССР. Сер. Физ-мат. и техн. наук. – 1986. – № 5. – С. 60–63.

5. Осипов, Ю.С. Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах / Ю.С. Осипов, А.И. Короткий // Изв. АН. СССР. Техн. кибернетика. – 1991. – № 2. – С. 154–164.

6. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1985. – 518 с.

7. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

8. Ухоботов, В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие / В.И. Ухоботов. – Челябинск: Челябинский гос. ун-т. – 2005. – 123 с.

9. Кошляков, Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Физматгиз, 1962. – 767 с.

10. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

Поступила в редакцию 19 ноября 2020 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2021, vol. 13, no. 1, pp. 22–28

DOI: 10.14529/mmph210103

ON A PROBLEM OF CONTROLLING A MOVING CART WITH ELASTIC ROD

V.I. Ukhobotov[1,2]***, N.D. Livanov***[2]
[1] *Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Science, Yekaterinburg, Russian Federation*
[2] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
E-mail: ukh@csu.ru, nikita.livanov.mail@gmail.com

This article discusses the problem of controlling the process of longitudinal oscillations of an elastic homogeneous rod of uniform cross section. A rod is understood as a body, the length of which significantly exceeds its cross dimensions. The rod is on a moving cart, the right end of which is rigidly fixed, and the left end is not fixed. There is no friction between the rod and the cart surface in the problem under consideration. When the cart moves, the rod performs constrained longitudinal oscillations in a non-inertial frame of reference associated with the cart. The control is the acceleration of the cart, the magnitude of which is limited. The boundaries of its accepted values are set. The value of the combined external forces acting on the rod is not known exactly, but only its limits of variation are given. The purpose of the control process is to ensure that at a given moment in time, the average value of the stretch of the rod is within a given interval. This average is calculated using the specified function.

In order to solve the problem, the method of optimizing a guaranteed result is applied. A transition to a new one-dimensional variable is made, with the help of which the considered problem of control of the longitudinal oscillations of a rod is reduced to a similar control problem in the presence of noise. The necessary and sufficient conditions are found, under which it is possible to accomplish the set goal for any admissible external forces, the total value of which satisfies the given constraints. A corresponding algorithm for constructing the law of variation of the cart acceleration is proposed. An example that clearly shows how to build the cart control, which will guarantee the achievement of the set goal, has been analyzed.

Keywords: control; elastic rod; guaranteed result.

References

1. Osipov Yu.S., Okhezin S.P. K teorii pozitsionnogo upravleniya v giperbolicheskikh sistemakh (On the Theory of Positional Control in Hyperbolic Systems). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1977, Vol. 233, no. 4, pp. 551–554. (in Russ.).

2. Lions Zh.-L. *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi* (The Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations). Moscow, Mir Publ., 1972, 414 p. (in Russ.).

3. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* (Methods for Solving Extreme Problems). Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p. (in Russ.).

4. Egorov A.I. *Upravlenie uprugimi kolebaniyami* (Elastic Vibration Control). DAN USSR. Ser. Phys.-mat. and tech. sciences, 1986, no. 5, pp. 60–63. (in Russ.).

5. Osipov Yu.S., Korotkiy A.I. Dinamicheskoe modelirovanie parametrov v giperbolicheskikh sistemakh (Dynamic Modeling of Parameters in Hyperbolic Systems). *Izv. AN. SSSR. Tekhn. kibernetika*, 1991, no. 2, pp. 154–164. (in Russ.).

6. Krasovskiy N.N. *Upravlenie dinamicheskoy sistemoy* (Dynamic system control). Moscow, Nauka, Publ., 1985, 518 p. (in Russ.).

7. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games). Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (in Russ.).

8. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: ucheb. posobie* (One-Dimensional Design Method in Linear Differential Games with Integral Constraints: a Textbook). Chelyabinsk, Chelyabinskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2005, 123 p. (in Russ.).

9. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Osnovnye differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki* (Basic Differential Equations of Mathematical Physics). Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, 767 p. (in Russ.).

10. Kolmogorov A.N, Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis). Moscow, Nauka Publ., 1972, 496 p. (in Russ.).

Received November 19, 2020