УДК 519.63 DOI: 10.14529/mmph210104

АНАЛИЗ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А.Л. Ушаков
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: ushakoval@susu.ru

Смешанная краевая задача для уравнения Пуассона рассматривается в ограниченной плоской области. Проводится продолжение этой задачи в вариационном виде через границу с условием Дирихле до прямоугольной области. Для решения продолженной задачи формулируется модифицированный метод фиктивных компонент в вариационном виде. Продолженная задача в вариационном виде рассматривается на конечномерном пространстве. Для решения предыдущей задачи формулируется модифицированный метод фиктивных компонент на конечномерном пространстве. Для решения продолженной задачи в матричном виде рассматривается известный метод фиктивных компонент. Показывается, что в методе фиктивных компонент абсолютная ошибка в энергетической норме сходится со скоростью геометрической прогрессии. В качестве обобщения метода фиктивных компонент предлагается новый вариант метода итерационных расширений. Продолженная задача в матричном виде решается методом итерационных расширений. Показывается, что в предложенном варианте метода итерационных расширений относительная ошибка сходится в норме более сильной, чем энергетическая норма задачи со скоростью геометрической прогрессии. Итерационные параметры в указанном методе выбираются с помощью метода минимальных невязок. Указываются условия достаточные для сходимости применяемого итерационного процесса. Выписан алгоритм, реализующий предложенный вариант метода итерационных расширений. В данном алгоритме производится автоматический выбор итерационных параметров и указывается критерий остановки при достижении оценки требуемой точности. Приводится пример применения метода итерационных расширений для решения частной задачи. В расчетах ставится условие достижения оценки относительной ошибки в норме более сильной, чем энергетическая норма задачи. Но приводятся относительные ошибки полученного численного решения примера исходной задачи и другими способами. Например, вычисляется поточено относительная ошибка в узлах сетки. Для достижения относительной ошибки не более нескольких процентов требуются всего несколько итераций. Вычислительные эксперименты подтверждают асимптотическую оптимальность метода, полученную в теории.

Ключевые слова: уравнение Пуассона; метод фиктивных компонент; метод итерационных расширений.

Введение

Рассмотрим смешанную краевую задачу с однородными краевыми условиями Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения Пуассона в ограниченной области. Основные проблемы при решении эллиптических задач обычно связаны со сложностью геометрии области, высотой порядка дифференциального уравнения и наличием краевого условия Дирихле [1–5]. Будем исходить из желаемых положений, что предлагаемые численные методы должны являться устойчивыми к вычислительным ошибкам округления, быть асимптотически оптимальными по вычислительным затратам в арифметических операциях, являться достаточно универсальными и при этом иметь не сложную реализацию при автоматизации вычислительного процесса. Для возможного преодоления указанных трудностей и реализации указанных положений при решении рассматриваемой задачи используем в разных вариантах методы типа фиктивных компонент с применением модернизации и обобщения указанных методов, что приведет к их усложнению, но не кардинального характера [4–7]. Отметим, что для решения задачи в прямоугольной области, к решению которой будет сводиться решение рассматриваемой задачи, можно использовать, например, известные маршевые методы оптимальные по вычислительным затратам [8–11].

1. Области

Пусть задана первая ограниченная плоская область и выбирается вторая ограниченная плоская область.

$$\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \{1, \mathrm{II}\}.$$

Требуется, что бы пересечение этих областей было пусто, а объединение их замыканий было замыканием прямоугольной области.

$$\Omega_1 \cap \Omega_{\mathrm{II}} = \varnothing,\ \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} = \bar{\Pi}.$$

У каждой из этих трех областей граница состоит из замыкания объединения двух открытых непересекающихся частей.

$$\partial\Pi = \bar{s},\ s = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing.$$

$$\partial\Omega_\alpha = \bar{s}_\alpha,\ s_\alpha = \Gamma_{\alpha,1} \cup \Gamma_{\alpha,2},\ \Gamma_{\alpha,1} \cap \Gamma_{\alpha,2} = \varnothing.$$

Полагаем, что пересечение границ первой и второй области является замыканием непустого пересечения первой части границы первой области со второй частью границы второй области.

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_{\mathrm{II}} = \bar{S},\ S = \Gamma_{1,1} \cap \Gamma_{\mathrm{II},2} \neq \varnothing.$$

Все рассматриваемые части границ у всех областей являются объединением конечного числа непересекающихся открытых дуг достаточно гладких кривых. Рассматриваются области границы, которых не имеют самопересечений и самокасаний.

2. Краевые задачи в операторном и вариационном видах

В первой области рассматриваем смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона. Во второй области вводим смешанную краевую задачу для однородного экранированного уравнения Пуассона. На первых частях границ областей задаем однородное условие Дирихле. На вторых частях границ областей рассматриваем однородное условие Неймана. Задача на первой области является решаемой задачей. Задачу на второй области рассматриваем в качестве нулевого фиктивного продолжения решаемой задачи. Приведем решаемую и фиктивную задачу в операторном виде:

$$\Delta\breve{u}_\alpha + \kappa_\alpha \breve{u}_\alpha = \breve{f}_\alpha,\ \kappa_1 = 0,\ \kappa_{\mathrm{II}} \geq 0,\ \breve{f}_{\mathrm{II}} = 0,$$

$$\breve{u}_\alpha\Big|_{\Gamma_{\alpha,1}} = 0,\ \frac{\partial \breve{u}_\alpha}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{\alpha,2}} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим решаемую и фиктивную задачи в вариационном виде как задачи представления линейных функционалов в виде скалярных произведений в функциональных пространствах.

$$\breve{u}_\alpha \in \breve{H}_\alpha :\ \mathrm{A}_\alpha(\breve{u}_\alpha, \breve{v}_\alpha) = F_\alpha(\breve{v}_\alpha)\ \forall \breve{v}_\alpha \in \breve{H}_\alpha. \tag{2}$$

Пространства решений для таких задач будут следующие пространства функций Соболева

$$\breve{H}_\alpha = \breve{H}_\alpha(\Omega_\alpha) = \left\{\breve{v}_\alpha \in W_2^1(\Omega_\alpha) : \breve{v}\big|_{\Gamma_{\alpha,1}} = 0\right\}.$$

Правые части этих задач являются линейными функционалами

$$F_\alpha(\breve{v}_\alpha) = (\breve{f}_\alpha, \breve{v}_\alpha),\ (\breve{f}_\alpha, \breve{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \breve{f}_\alpha \breve{v}_\alpha d\Omega_\alpha.$$

В левых частях этих задач стоят билинейные формы

$$\mathrm{A}_\alpha(\breve{u}_\alpha, \breve{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} (\breve{u}_{\alpha x}\breve{v}_{\alpha y} + \breve{u}_{\alpha y}\breve{v}_{\alpha y} + \kappa_\alpha \breve{u}_\alpha \breve{v}_\alpha) d\Omega_\alpha.$$

Полагаем, что билинейные формы задают в пространствах решений рассматриваемых задач нормировки эквивалентные нормировкам соответствующих пространств Соболева

$$\exists c_1, c_2 > 0 : c_1 \|\breve{v}_\alpha\|^2_{W_2^1(\Omega_\alpha)} \leq \mathrm{A}_\alpha(\breve{v}_\alpha, \breve{v}_\alpha) \leq c_2 \|\breve{v}_\alpha\|^2_{W_2^1(\Omega_\alpha)}\ \forall \breve{v}_\alpha \in \breve{H}_\alpha.$$

Эти предположения обеспечивают существование и единственность решения у каждой из рассматриваемых задач, физических систем [1]. Заметим, что решение фиктивной задачи нулевое.

3. Продолженная задача в вариационном виде

Возможно совместное рассмотрение решаемой и фиктивной задач в вариационном виде. Такую задачу будем называть продолженной задачей

$$\breve{u}\in\breve{V}:\ \mathrm{A}_1(\breve{u},I_1\breve{v})+\mathrm{A}_{\text{II}}(\breve{u},\breve{v})=F_1(I_1\breve{v})\ \forall\breve{v}\in\breve{V}. \quad (3)$$

Расширенное пространство решений для такой задачи будет следующее пространство функций Соболева.

$$\breve{V}=\breve{V}(\Pi)=\left\{\breve{v}\in W_2^1(\Pi):\breve{v}\big|_{\Gamma_1}=0\right\}.$$

В расширенном пространстве решений находится подпространство являющееся пространством решений продолженной задачи. Это пространство решений исходной задачи в первой области, проложенное нулем на остальную часть прямоугольной области

$$\breve{V}_1=\breve{V}_1(\Pi)=\left\{\breve{v}_1\in\breve{V}:\breve{v}_1\big|_{\Pi\setminus\Omega_1}=0\right\}.$$

В формулировке продолженной задачи используем оператор проектирования из расширенного пространства решений продолженной задачи на пространство ее решений

$$I_1:\breve{V}\mapsto\breve{V}_1,\ \breve{V}_1=imI_1,\ I_1=I_1^2.$$

Дополнительно введем подпространства в расширенном пространстве решений

$$\breve{V}_3=\breve{V}_3(\Pi)=\left\{\breve{v}_3\in\breve{V}:\breve{v}_3\big|_{\Pi\setminus\Omega_{\text{II}}}=0\right\},$$

$$\breve{V}_2=\breve{V}_2(\Pi)=\left\{\breve{v}_2\in\breve{V}:\mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_1)=0\ \forall\breve{v}_1\in\breve{V}_1,\ \mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_3)=0\ \forall\breve{v}_3\in\breve{V}_3\right\},\ \breve{V}=\breve{V}_1\oplus\breve{V}_2\oplus\breve{V}_3.$$

Мы использовали билинейную форму являющуюся суммой билинейных форм

$$\mathrm{A}(\breve{u},\breve{v})=\mathrm{A}_1(\breve{u},\breve{v})+\mathrm{A}_{\text{II}}(\breve{u},\breve{v})\ \forall\breve{u},\breve{v}\in\breve{V}.$$

Полагаем, что билинейная форма задает в расширенном пространстве решений нормировку эквивалентную нормировке соответствующего пространства Соболева.

$$\exists c_1,c_2>0:c_1\left\|\breve{v}\right\|^2_{W_2^1(\Pi)}\le\mathrm{A}(\breve{v},\breve{v})\le c_2\left\|\breve{v}\right\|^2_{W_2^1(\Pi)}\ \forall\breve{v}\in\breve{V}.$$

Предполагаем, что используемые пространства Соболева таковы, что в них возможно продолжение функций с сохранением нормы. Обычное в таких случаях это положение будем использовать в указываемом виде

$$\exists\breve{\beta}_1\in(0;1],\ \breve{\beta}_2\in[\breve{\beta}_1;1]:\breve{\beta}_1\mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\mathrm{A}_{\text{II}}(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\le\breve{\beta}_2\mathrm{A}(\breve{v}_2,\breve{v}_2)\ \forall\breve{v}_2\in\breve{V}_2.$$

В таком случае у продолженной задачи существует и единственное решение. Решение продолженной задачи – это решение исходной задачи в первой области, продолженное нулем на остальную часть прямоугольной области.

4. Модифицированный метод фиктивных компонент в вариационном виде

Рассмотрим итерационный процесс, на каждом шаге которого решаем расширенную задачу с билинейной формой из продолженной задачи, но без оператора проектирования. Решение этой задачи ищем в расширенном пространстве решений продолженной задачи, в пространстве решений расширенной задачи

$$\breve{u}^k\in\breve{V}:\ \mathrm{A}(\breve{u}^k-\breve{u}^{k-1},\breve{v})=-\tau_{k-1}(\mathrm{A}_1(\breve{u}^{k-1},I_1\breve{v})+\mathrm{A}_{\text{II}}(\breve{u}^{k-1},\breve{v})-F_1(I_1\breve{v})),\ k\in\mathbb{N}\ \forall\breve{v}\in\breve{V},$$

$$\forall\breve{u}^0\in\breve{V},\ \tau_0=1.\ \tau_{k-1}=2\big/(\breve{\beta}_1+\breve{\beta}_2),\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}. \quad (4)$$

Этот итерационный процесс имеет оценки сходимости

$$\left\|\breve{u}^k-\breve{u}\right\|_{\breve{V}}\le\varepsilon\left\|\breve{u}^0-\breve{u}\right\|_{\breve{V}},\ \varepsilon=cq^{k-1},\ k\in\mathbb{N},\ c=\sqrt{\left\|I_1\right\|^2_{\breve{V}}-1},\ 0\le q=(\breve{\beta}_2-\breve{\beta}_1)\big/(\breve{\beta}_1+\breve{\beta}_2)<1.$$

Мы использовали энергетическую норму, порождаемую билинейной формой расширенной задачи

$$\left\|\breve{v}\right\|_{\breve{V}}=\sqrt{\mathrm{A}(\breve{v},\breve{v})}\ \forall\breve{v}\in\breve{V}.$$

5. Конечномерное подпространство

Зададим введенную ранее прямоугольную область и части ее границы в прямоугольной системе координат

$$\Pi=(0;b_1)\times(0;b_2),\ \Gamma_1=\{b_1\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{b_2\},\ \Gamma_2=\{0\}\times(0;b_2)\cup(0;b_1)\times\{0\},\ b_1,b_2\in(0;+\infty).$$

В этой прямоугольной области, на второй части ее границы и в начале координат введем сетку

$$(x_i;y_j)=\big((i-1)h_1;(j-1)h_2\big),\ h_1=b_1/m,\ h_2=b_2/n,\ i=1,2...,m,\ j=1,2...,n,\ m,n\in\mathbb{N}.$$

Рассмотрим сеточные функции со значениями в узлах введенной сетки

$$v_{i,j}=v(x_i;y_j)\in\mathbb{R},\ i=1,2...,m,\ j=1,2...,n,\ m,n\in\mathbb{N}.$$

Для восполнения сеточных функций используем билинейные базисные функции

$$\Phi^{i,j}(x;y)=\Psi^{1,i}(x)\Psi^{2,j}(y),\ i=1,2...,m,\ j=1,2...,n,\ m,n\in\mathbb{N},$$

$$\Psi^{1,i}(x)=\Psi(x/h_1-i+1),\ \Psi^{2,i}(y)=\Psi(y/h_2-j+1),$$

$$\Psi(z)=\begin{cases} z, & z\in[0;1],\\ 2-z, & z\in[1;2],\\ 0, & z\notin[0;2].\end{cases}$$

Дополнительно полагаем, что значения базисных функций вне заданной прямоугольной области равны нулю

$$\Phi^{i,j}(x;y)=0,\ (x;y)\notin\Pi,\ i=1,2...,m,\ j=1,2...,n,\ m,n\in\mathbb{N}.$$

Линейные комбинации базисных функций образуют конечномерное подпространство в пространстве решений расширенной задачи

$$\tilde V=\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y)\right\}\subset\breve V.$$

6. Продолженная задача в вариационном виде на конечномерном подпространстве

Рассмотрим продолженную задачу в вариационном виде при замене пространства ее решений на введенное ранее его конечномерное пространство

$$\tilde u\in\tilde V:\ \mathrm{A}_1(\tilde u,I_1\tilde v)+\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde u,\tilde v)=F_1(I_1\tilde v)\ \forall\tilde v\in\tilde V. \tag{5}$$

В используемом теперь конечномерном пространстве находится конечномерное подпространство решений для продолженной задачи. Это конечномерное пространство решений исходной задачи в первой области, проложенное нулем на остальную часть прямоугольной области

$$\tilde V_1=\tilde V_1(\Pi)=\left\{\tilde v_1\in\tilde V:\tilde v_1\big|_{\Pi\setminus\Omega_1}=0\right\}.$$

Полагаем, что оператор проектирования действует аналогично на соответствующих конечномерных подпространствах

$$I_1:\tilde V\mapsto\tilde V_1,\ \tilde V_1=imI_1,\ I_1=I_1^2.$$

Дополнительно введем соответствующие конечномерные подпространства

$$\tilde V_3=\tilde V_3(\Pi)=\left\{\tilde v_3\in\tilde V:\tilde v_3\big|_{\Pi\setminus\Omega_{\mathrm{II}}}=0\right\},$$

$$\tilde V_2=\tilde V_2(\Pi)=\left\{\tilde v_2\in\tilde V:\mathrm{A}(\tilde v_2,\tilde v_1)=0\ \forall\tilde v_1\in\tilde V_1,\ \mathrm{A}(\tilde v_2,\tilde v_3)=0\ \forall\tilde v_3\in\tilde V_3\right\},\ \tilde V=\tilde V_1\oplus\tilde V_2\oplus\tilde V_3.$$

Будем предполагать, что для конечномерных подпространств, аппроксимирующих соответствующие пространства, выполняются предположения о продолжении функций в прежнем виде.

$$\exists\tilde\beta_1\in(0;1],\ \tilde\beta_2\in[\tilde\beta_1;1]:\ \tilde\beta_1\mathrm{A}(\tilde v_2,\tilde v_2)\le\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde v_2,\tilde v_2)\le\tilde\beta_2\mathrm{A}(\tilde v_2,\tilde v_2)\ \forall\tilde v_2\in\tilde V_2.$$

Также вместо билинейных базисных функций, например, можно использовать кусочно-линейные базисные функции.

7. Модифицированный метод фиктивных компонент в вариационном виде на конечномерном подпространстве

Рассмотрим модифицированный метод фиктивных компонент в вариационном виде на конечномерном подпространстве

$$\tilde u^k\in\tilde V:\ \mathrm{A}(\tilde u^k-\tilde u^{k-1},\tilde v)=-\tau_{k-1}(\mathrm{A}_1(\tilde u^{k-1},I_1\tilde v)+\mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde u^{k-1},\tilde v)-F_1(I_1\tilde v)),\ k\in\mathbb{N}\ \forall\tilde v\in\tilde V,$$

$$\forall \tilde{u}^0 \in \tilde{V}_1,\ \tau_0 = 1.\ \tau_{k-1} = 2\big/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{6}$$

Этот итерационный процесс имеет оценки сходимости следующего вида

$$\left\|\tilde{u}^k - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}} \le \varepsilon \left\|\tilde{u}^0 - \tilde{u}\right\|_{\tilde{V}},\ \varepsilon = cq^{k-1},\ k \in \mathbb{N},\ c = \sqrt{\|I_1\|_{\tilde{V}}^2 - 1},\ 0 \le q = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)\big/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) < 1.$$

Здесь мы использовали энергетическую норму, порождаемую билинейной формой расширенной задачи на конечномерном подпространстве

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{V}} = \sqrt{\mathrm{A}(\tilde{v},\tilde{v})}\ \ \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

8. Продолженная задача в матричном виде

Аппроксимируя продолженную задачу с помощью конечномерного подпространства, получим линейную систему алгебраических уравнений

$$\overline{u} \in \mathbb{R}^N:\ B\overline{u} = \overline{f},\ \overline{f} \in \mathbb{R}^N. \tag{7}$$

При этом считаем, что оператор проектирования на пространство решений продолженной задачи обнуляет все коэффициенты при базисных функциях, носители которых не лежат полностью в первой области. Получаем продолженную задачу в матричном виде, определив продолженную матрицу и продолженную правую часть системы

$$\left\langle B\overline{u},\overline{v}\right\rangle = \mathrm{A}_1(\tilde{u}, I_1\tilde{v}) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V},\ \left\langle \overline{f},\overline{v}\right\rangle = F_1(I_1\tilde{v})\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V},$$

$$\left\langle \overline{f},\overline{v}\right\rangle = (\overline{f},\overline{v})h_1h_2 = \overline{f}\overline{v}h_1h_2,\ \overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)' \in \mathbb{R}^N,\ N = mn.$$

В качестве примера рассмотрим нумерацию узлов сетки, коэффициентов при базисных функциях и соответствующих базисных функций.

$$v_{n(i-1)+j} = v_{i,j},\ \Phi_{n(i-1)+j} = \Phi^{i,j}(x_i; y_j),\ i = 1,2\ldots,m,\ j = 1,2\ldots,n,$$

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\Phi^{i,j}(x;y) = \sum_{l=1}^{N} v_l \Phi_l.$$

Но нумеруем сначала базисные функции, носители которых полностью содержатся в первой области. Далее продолжаем нумеровать базисные функции, носители которых пересекают границу первой области и второй области одновременно. Завершаем нумерацию на базисных функциях носители, которых полностью содержатся во второй области. При такой нумерации возникающие векторы имеют следующий вид

$$\overline{v} = (\overline{v}_1', \overline{v}_2', \overline{v}_3')',\ \overline{u} = (\overline{u}_1', \overline{0}'\ \overline{0}')',\ \ \overline{f} = (\overline{f}_1', \overline{0}'\ \overline{0}')'.$$

Вычисляем элементы матрицы, компоненты вектора правой части, приведенной системы

$$b_{ij} = h_1^{-1}h_2^{-1}(\mathrm{A}_1(\Phi_i, I_1\Phi_j) + \mathrm{A}_{\mathrm{II}}(\Phi_i,\Phi_j)),\ f_i = h_1^{-1}h_2^{-1}F_1(I_1\Phi_i),\ i,j = 1,2,\ldots,N.$$

9. Метод фиктивных компонент в матричном виде

Аппроксимируя модифицированный метод фиктивных компонент в вариационном виде с помощью конечномерного подпространства при указанном ранее операторе проектирования, получим известный метод фиктивных компонент в матричном виде

$$\overline{u}^k \in \mathbb{R}^N:\ \mathrm{A}(\overline{u}^k - \overline{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\overline{u}^{k-1} - \overline{f}),\ k \in \mathbb{N},$$

$$\forall \overline{u}^0 \in \overline{V}_1,\ \tau_0 = 1.\ \tau_{k-1} = 2\big/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2),\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{8}$$

На каждом шаге этого итерационного процесса получаем расширенную задачу в матричном виде с расширенной матрицей

$$\left\langle \mathrm{A}\overline{u},\overline{v}\right\rangle = \mathrm{A}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Вычисляем элементы этой матрицы

$$a_{ij} = h_1^{-1}h_2^{-1}\mathrm{A}(\Phi_i,\Phi_j),\ i,j = 1,2,\ldots,N.$$

Возникающие матрицы имеют известную структуру

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Используем подпространство векторов

$$\bar V_1=\left\{\bar v=(\bar v_1',\bar v_2',\bar v_3')'\in\mathbb{R}^N:\bar v_2=\bar 0,\ \bar v_3=\bar 0\right\}.$$

Дополнительно введем подпространства векторов, как и предыдущие соответствующие конечномерным подпространствам введенным ранее

$$\bar V_3=\left\{\bar v=(\bar v_1',\bar v_2',\bar v_3')'\in\mathbb{R}^N:\bar v_1=\bar 0,\ \bar v_2=\bar 0\right\},$$

$$\bar V_2=\left\{\bar v=(\bar v_1',\bar v_2',\bar v_3')'\in\mathbb{R}^N:\mathrm{A}_{11}\bar v_1+\mathrm{A}_{12}\bar v_2=\bar 0,\ \mathrm{A}_{23}\bar v_2+\mathrm{A}_{33}\bar v_3=\bar 0\right\},\ \mathbb{R}^N=\bar V_1\oplus\bar V_2\oplus\bar V_3.$$

Отметим, что в методе фиктивных компонент решается продолженная задача в матричном виде

$$B\bar u=\bar f,\ \begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}&\mathrm{A}_{12}&0\\0&\mathrm{A}_{02}&\mathrm{A}_{23}\\0&\mathrm{A}_{32}&\mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar u_1\\\bar 0\\\bar 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar f_1\\\bar 0\\\bar 0\end{bmatrix},$$

По решению продолженной задачи в матричном виде получаются решения соответственно исходной задачи в матричном виде и нулевое решение фиктивной задачи в матричном виде

$$\mathrm{A}_{11}\bar u_1=\bar f_1,\ \begin{bmatrix}\mathrm{A}_{02}&\mathrm{A}_{23}\\\mathrm{A}_{32}&\mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar u_2\\\bar u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar 0\\\bar 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\bar u_2\\\bar u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar 0\\\bar 0\end{bmatrix}.$$

Введем нормы, порождаемые единичной матрицей, расширенной матрицей и ее квадратом

$$\|\bar v\|=\sqrt{(\bar v,\bar v)}\ ,\ \|\bar v\|_{\mathrm{A}}=\sqrt{\langle\mathrm{A}\bar v,\bar v\rangle}\ ,\ \|\bar v\|_{\mathrm{A}^2}=\sqrt{\langle\mathrm{A}^2\bar v,\bar v\rangle}\ \ \forall\bar v\in\mathbb{R}^N.$$

Лемма 1. *В итерационном процессе метода фиктивных компонент (8) выполняется оценка*

$$\left\|\bar u^1-\bar u\right\|_{\mathrm{A}^2}\le 2\left\|\bar u^0-\bar u\right\|_{\mathrm{A}^2}.$$

Доказательство. Введем обозначение ошибки в итерационном процессе (8)

$$\bar\psi^k=\bar u^k-\bar u,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Из итерационного процесса получаем равенства

$$\left(\mathrm{A}(\bar\psi^1-\bar\psi^0)\right)^2=\left(-\mathrm{A}_{11}\bar\psi_1^0\right)^2,\ \mathrm{A}\bar\psi^1\mathrm{A}\bar\psi^1-2\mathrm{A}\bar\psi^1\mathrm{A}\bar\psi^0+\mathrm{A}\bar\psi^0\mathrm{A}\bar\psi^0=\mathrm{A}_{11}\bar\psi_1^0\mathrm{A}_{11}\bar\psi_1^0.$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$\mathrm{A}\bar\psi^0\mathrm{A}\bar\psi^0\ge\mathrm{A}_{11}\bar\psi_1^0\mathrm{A}_{11}\bar\psi_1^0.$$

Получаем неравенства

$$\mathrm{A}\bar\psi^1\mathrm{A}\bar\psi^1-2\mathrm{A}\bar\psi^1\mathrm{A}\bar\psi^0\le 0,\ (\mathrm{A}\bar\psi^1\mathrm{A}\bar\psi^1)^2\le(2\mathrm{A}\bar\psi^1\mathrm{A}\bar\psi^0)^2\le 4(\mathrm{A}\bar\psi^1\mathrm{A}\bar\psi^1)(\mathrm{A}\bar\psi^0\mathrm{A}\bar\psi^0).$$

После сокращения получаем следующие неравенства

$$\mathrm{A}\bar\psi^1\mathrm{A}\bar\psi^1\le 4\mathrm{A}\bar\psi^0\mathrm{A}\bar\psi^0,\ \left\|\bar\psi^1\right\|_{\mathrm{A}^2}\le 2\left\|\bar\psi^0\right\|_{\mathrm{A}^2},\ \left\|\bar u^1-\bar u\right\|_{\mathrm{A}^2}\le 2\left\|\bar u^0-\bar u\right\|_{\mathrm{A}^2}.$$

Лемма 2. *В итерационном процессе метода фиктивных компонент (8) выполняется оценка.*

$$\left\|\bar u^1-\bar u\right\|_{\mathrm{A}}\le d\left\|\bar u^1-\bar u\right\|_{\mathrm{A}^2},\ d\approx 2\pi^{-1}(b_1^{-2}+b_2^{-2})^{-1/2},\ h_1,h_2\to 0,\ \kappa_{\mathrm{II}}=0.$$

Доказательство. Заметим, что выполняется неравенство

$$\exists d>0:(\mathrm{A}\bar\psi^1,\bar\psi^1)\le d^2(\mathrm{A}\bar\psi^1,\mathrm{A}\bar\psi^1),$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}c_{i,j}^2=(-\Delta\breve\psi^1,\breve\psi^1)\le d^2(\Delta\breve\psi^1,\Delta\breve\psi^1)=d^2\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_{i,j}^2c_{i,j}^2.$$

Получаем асимптотическое равенство

$$d\approx\lambda_{1,1}^{-1/2}=2\pi^{-1}(b_1^{-2}+b_2^{-2})^{-1/2},\ h_1,h_2\to 0.$$

Здесь использовали свойства решений спектральной задачи.

$$\breve\psi^1=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}c_{i,j}\breve\varphi_{i,j},\ (\breve\varphi_{i,j},\breve\varphi_{i,j})=1,\ (\breve\varphi_{i,j},\breve\varphi_{p,l})=0,\ (i;j)\ne(p;l),\ i,j,p,l\in\mathbb{N},$$

где

$$\breve{\varphi}_{i,j} \in V\big((0;b_1)\times(0;b_2)\big): -\Delta\breve{\varphi}_{i,j} = \lambda_{i,j}\breve{\varphi}_{i,j},\ \breve{\varphi}_{i,j} \neq 0,\ \lambda_{i,j} = 0,25\pi^2\Big((2i-1)b_1^{-2} + (2j-1)b_2^{-2}\Big),\ i, j \in \mathbb{N}.$$

Мы рассматривали случай, когда константа экранирования в фиктивной задаче равна нулю, полагая, что иначе рассматриваемая в лемме 2 оценка все равно не должна зависеть от параметров дискретизации.

Теорема 1. *В итерационном процессе метода фиктивных компонент (8) выполняются оценки сходимости*

$$\left\|\bar{u}^k - \bar{u}\right\|_{\mathrm{A}} \le \varepsilon\left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{\mathrm{A}^2} = \varepsilon\left\|\bar{f}^0 - \bar{f}\right\|,$$

$$\varepsilon = cq^{k-1},\ c \in (0+\infty),\ k \in \mathbb{N},\ \bar{f}^0 = \mathrm{A}\bar{u}^0,\ 0 \le q = (\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_1)/(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) < 1,$$

$$c \approx 4\pi^{-1}(b_1^{-2} + b_2^{-2})^{-1/2},\ h_1, h_2 \to 0,\ \kappa_{\mathrm{II}} = 0.$$

В методе фиктивных компонент абсолютная ошибка в энергетической норме сходится со скоростью геометрической прогрессии.

10. Метод итерационных расширений

Для решения прежней задачи (7) применим новый метод. Определим матрицы, которые будем использовать в дальнейшем

$$\left\langle \mathrm{A_I}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A_1}(\tilde{u},\tilde{v}),\ \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{u},\bar{v}\right\rangle = \mathrm{A_{II}}(\tilde{u},\tilde{v})\ \forall \tilde{u},\tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Введенные две матрицы имеют определенную структуру

$$\mathrm{A_I} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathrm{A_{II}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix}.$$

Определим теперь по-другому расширенную матрицу как сумму первой матрицы со второй матрицей, умноженной на дополнительный положительный параметр

$$C = \mathrm{A_I} + \gamma\mathrm{A_{II}},\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{02} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & \mathrm{A}_{32} & \mathrm{A}_{33} \end{bmatrix},\ \gamma \in (0;+\infty).$$

Будем предполагать, что для конечномерных пространств, аппроксимирующих соответствующие пространства, выполняются предположения о продолжении функций, которые запишем в матричном виде.

$$\exists\beta_1 \in (0;+\infty),\ \beta_2 \in [\beta_1;+\infty): \beta_1^2\left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2\right\rangle \le \left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle \le \bar{\beta}_2^2\left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2\right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2,$$

$$\exists\alpha \in (0;+\infty): \left\langle \mathrm{A_I}\bar{v}_2, \mathrm{A_I}\bar{v}_2\right\rangle \le \alpha^2\left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle\ \forall \bar{v}_2 \in \bar{V}_2.$$

Далее используем только последнее неравенство

$$\left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2\right\rangle = \left\langle \mathrm{A_I}\bar{v}_2, \mathrm{A_I}\bar{v}_2\right\rangle + 2\gamma\left\langle \mathrm{A_I}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle + \gamma^2\left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle \le 2\left\langle \mathrm{A_I}\bar{v}_2, \mathrm{A_I}\bar{v}_2\right\rangle + 2\gamma^2\left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle \le$$

$$\le 2(\alpha^2 + \gamma^2)\left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle.$$

Получаем оценку снизу для константы первого неравенства

$$0,5(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} \le \beta_1^2.$$

Предполагаем, что есть асимптотическое равенство

$$\left\langle C\bar{v}_2, C\bar{v}_2\right\rangle \approx \left\langle \mathrm{A_I}\bar{v}_2, \mathrm{A_I}\bar{v}_2\right\rangle + \gamma^2\left\langle \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2, \mathrm{A_{II}}\bar{v}_2\right\rangle,\ h_1,\ h_2 \to 0,$$

Получаем асимптотические оценки констант первого и второго неравенств

$$\beta_1^2 \approx (\alpha^2 + \gamma^2)^{-1},\ \beta_2^2 \approx \gamma^{-2},\ h_1,\ h_2 \to 0.$$

Рассматриваем метод итерационных расширений, как обобщение метода фиктивных компонент, используя введение дополнительного параметра в расширенной матрице. Отметим, что метод фиктивных компонент при единичном значении этого дополнительного параметра получается из метода итерационных расширений только без учета выбора итерационных параметров

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N: C(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(B\bar{u}^{k-1} - \bar{f}),\ k \in \mathbb{N},$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1,\ \gamma > \alpha,\ \tau_0 = 1,\ \tau_{k-1} = \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle \Big/ \left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \qquad (9)$$

Для вычисления итерационных параметров необходимо вычислять невязки, поправки и эквивалентные невязки соответственно

$$\bar{r}^{k-1} = B\bar{u}^{k-1} - \bar{f},\ \bar{w}^{k-1} = C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ \eta^{k-1} = B\bar{w}^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3. *В методе итерационных расширений (9) выполняется оценка*

$$\left\|\bar{u}^1 - \bar{u}\right\|_{C^2} \le 2\left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{C^2}.$$

Доказательство. Введем обозначение ошибки в итерационном процессе (9)

$$\bar{\psi}^k = \bar{u}^k - \bar{u},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Из итерационного процесса получаем равенства

$$\left\langle C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0), C(\bar{\psi}^1 - \bar{\psi}^0) \right\rangle = \left\langle -\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0, -\mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0 \right\rangle,$$

$$\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \right\rangle - 2\left\langle C\bar{\psi}^1, \mathrm{A}\bar{\psi}^0 \right\rangle + \left\langle C\bar{\psi}^0, \mathrm{A}\bar{\psi}^0 \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0, \mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0 \right\rangle.$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$\left\langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \right\rangle \ge \left\langle \mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0, \mathrm{A}_{11}\bar{\psi}_1^0 \right\rangle.$$

Получаем неравенства

$$\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \right\rangle - 2\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^0 \right\rangle \le 0, \left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \right\rangle^2 \le 4\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^0 \right\rangle^2 \le 4\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \right\rangle \left\langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \right\rangle.$$

После сокращения получаем следующие неравенства

$$\left\langle C\bar{\psi}^1, C\bar{\psi}^1 \right\rangle \le 4\left\langle C\bar{\psi}^0, C\bar{\psi}^0 \right\rangle,\ \left\|\bar{\psi}^1\right\|_{C^2} \le 2\left\|\bar{\psi}^0\right\|_{C^2},\ \left\|\bar{u}^1 - \bar{u}\right\|_{C^2} \le 2\left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{C^2}.$$

Теорема 2. *В методе итерационных расширений (9) выполняются оценки сходимости.*

$$\left\|\bar{u}^k - \bar{u}\right\|_{C^2} \le \varepsilon\left\|\bar{u}^0 - \bar{u}\right\|_{C^2},\ \varepsilon = 2(\beta_2/\beta_1)(\alpha/\gamma)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

В методе итерационных расширений относительная ошибка в норме более сильной, чем энергетическая норма, сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство. Из итерационного процесса получаем равенства для ошибок и невязок

$$\bar{\psi}^k = \bar{\psi}^{k-1} - \tau_k C^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{\psi}^{k-1},\ \bar{r}^k = \bar{r}^{k-1} - \tau_k \mathrm{A}_{\mathrm{II}} C^{-1}\bar{r}^{k-1},\ k \in \mathbb{N} \setminus 1.$$

Будем минимизировать невязки

$$0 \le \left\langle \bar{r}^k, \bar{r}^k \right\rangle = \tau_k^2 \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1} \right\rangle - 2\tau_k \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle + \left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle.$$

Выбираем итерационные параметры из условия минимизации невязок

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} \right\rangle}.$$

Отметим наличие равенства

$$\tau_{k-1} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{r}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\bar{r}^{k-1} \right\rangle} = \frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{w}^{k-1}, C\bar{w}^{k-1} \right\rangle}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{w}^{k-1}, \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{w}^{k-1} \right\rangle}.$$

Введем обозначения

$$\mathrm{A}_{\mathrm{I}}\bar{w}^{k-1} = \bar{a},\ \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\bar{w}^{k-1} = \bar{b}.$$

Устанавливаем положительность выбираемых итерационных параметров

$$\tau_k = \frac{\left\langle \bar{b}, \bar{a} + \gamma\bar{b} \right\rangle}{\left\langle \bar{b}, \bar{b} \right\rangle} = \gamma - \frac{\left\langle \bar{a}, \bar{b} \right\rangle}{\left\langle \bar{b}, \bar{b} \right\rangle} \ge \gamma - \frac{\left\langle \bar{a}, \bar{a} \right\rangle^{1/2}\left\langle \bar{b}, \bar{b} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \bar{b}, \bar{b} \right\rangle} \ge \gamma - \frac{\left\langle \bar{a}, \bar{a} \right\rangle^{1/2}}{\left\langle \bar{b}, \bar{b} \right\rangle^{1/2}} \ge \gamma - \alpha > 0.$$

Приводим скалярные произведения невязок при выбранных итерационных параметрах

$$\left\langle \overline{r}^{k},\overline{r}^{k}\right\rangle =\left\langle \overline{r}^{k-1},\overline{r}^{k-1}\right\rangle -\frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1},\overline{r}^{k-1}\right\rangle ^{2}}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}\right\rangle }.$$

Выписываем отношение квадратов норм невязок на соседних итерациях

$$q_k^2=\frac{\left\langle \overline{r}^{k},\overline{r}^{k}\right\rangle }{\left\langle \overline{r}^{k-1},\overline{r}^{k-1}\right\rangle }=1-\frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1},\overline{r}^{k-1}\right\rangle ^{2}}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}C^{-1}\overline{r}^{k-1}\right\rangle \left\langle \overline{r}^{k-1},\overline{r}^{k-1}\right\rangle }=$$

$$=\frac{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1}\right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1},C\overline{w}^{k-1}\right\rangle -\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1},C\overline{w}^{k-1}\right\rangle ^{2}}{\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{w}^{k-1}\right\rangle \left\langle C\overline{w}^{k-1},C\overline{w}^{k-1}\right\rangle }=\frac{\left\langle \overline{b},\overline{b}\right\rangle \left\langle \overline{a}+\gamma\overline{b},\overline{a}+\gamma\overline{b}\right\rangle -\left\langle \overline{b},\overline{a}+\gamma\overline{b}\right\rangle ^{2}}{\left\langle \overline{b},\overline{b}\right\rangle \left\langle \overline{a}+\gamma\overline{b},\overline{a}+\gamma\overline{b}\right\rangle }.$$

Вводим обозначения

$$\left\langle \overline{a},\overline{a}\right\rangle =a,\ \left\langle \overline{b},\overline{b}\right\rangle =b,\ \left\langle \overline{a},\overline{b}\right\rangle =z,$$

тогда

$$q_k^2=\frac{ab-z^2}{b(a+\gamma^2 b+2\gamma z)}\le \max_{|z|\le\sqrt{ab}} q_k^2(z)=q_k^2\left(\frac{-a}{\gamma}\right)=\frac{a}{\gamma^2 b}\le\frac{\alpha^2}{\gamma^2}=q^2,$$

учитывая, что

$$q_k^2\ge 0,\left(q_k^2(z)\right)_z'=\frac{-2\gamma(z+a/\gamma)(z+\gamma b)}{b(a+\gamma^2 b+2\gamma z)^2},\ -\gamma b<\frac{a+\gamma^2 b}{2\gamma}<-\sqrt{ab}<-\frac{a}{\gamma}<\sqrt{ab}.$$

Так устанавливаем неравенства

$$\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k}\right\rangle \le q^2\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k-1},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k-1}\right\rangle ,\ \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k}\right\rangle \le q^{2(k-1)}\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{1},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{1}\right\rangle ,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Учитывая, что

$$\left\langle C\overline{\psi}^{k},\ C\overline{\psi}^{k}\right\rangle \le \beta_1^{-2}\left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{k}\right\rangle ,\ \left\langle \mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{1},\mathrm{A}_{\mathrm{II}}\overline{\psi}^{1}\right\rangle \le \beta_2^2\left\langle C\overline{\psi}^{1},\ C\overline{\psi}^{1}\right\rangle \le 4\beta_2^2\left\langle C\overline{\psi}^{0},\ C\overline{\psi}^{0}\right\rangle ,$$

получаем неравенство, из которого следует оценка сходимости в методе итерационных расширений

$$\left\langle C\overline{\psi}^{k},\ C\overline{\psi}^{k}\right\rangle \le 4\beta_1^{-2}\beta_2^2 q^{2(k-1)}\left\langle C\overline{\psi}^{0},\ C\overline{\psi}^{0}\right\rangle .$$

11. Алгоритм, реализующий метод итерационных расширений

Используем для выбора итерационных параметров метод минимальных невязок.

1. Задаем нулевое приближение и итерационный параметр

$$\forall\overline{u}^0\in\overline{V}_1,\ \tau_0=1.$$

2. Вычисляем невязку

$$\overline{r}^{k-1}=B\overline{u}^{k-1}-\overline{f},\ k\in\mathbb{N}.$$

3. Определим квадратом нормы абсолютной ошибки

$$\mathrm{E}_{k-1}=\left\langle \overline{r}^{k-1},\overline{r}^{k-1}\right\rangle ,\ k\in\mathbb{N}.$$

4. Ищем поправку

$$\overline{w}^{k-1}=C^{-1}\overline{r}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

5. Вычисляем эквивалентную невязку

$$\eta^{k-1}=B\overline{w}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

6. Вычисляем итерационный параметр

$$\tau_{k-1}=\left\langle \overline{r}^{k-1},\overline{\eta}^{k-1}\right\rangle \Big/\left\langle \overline{\eta}^{k-1},\overline{\eta}^{k-1}\right\rangle ,\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

7. Вычисляем очередное приближение.

$$\overline{u}^{k}=\overline{u}^{k-1}-\tau_{k-1}\overline{w}^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

8. Проверяем условие остановки итераций по заранее задаваемой оценке относительной ошибки в более сильной норме, чем энергетическая норма в решаемой задаче

$$\mathrm{E}_{k-1} < \mathrm{E}_0\mathrm{E},\ k \in \mathbb{N}\setminus\{1\},\ \mathrm{E} \in (0;1).$$

12. Пример применения метода итерационных расширений

Рассмотрим задачу, используя следующие области

$$\Pi = (0;6)\times(0;6),\ \Omega_1 = (0;6)\times(1;4), \Omega_{\mathrm{II}} = (0;6)\times(0;1)\bigcup(0;6)\times(4;6).$$

Полагаем, что области имеют границы

$$\Gamma_1 = (0;6)\times\{6\}\bigcup(0;b_1)\times\{b_2\},\ \Gamma_2 = \{0,\ 6\}\times(0;6)\bigcup(0;6)\times\{0\},\ \Gamma_{1,1} = (0;6)\times\{1,\ 4\},\ \Gamma_{1,2} = \{0,\ 6\}\times(1;4),$$

$$\Gamma_{\mathrm{II},1} = (0;6)\times\{6\},\ \Gamma_{\mathrm{II},2} = (0;6)\times\{0,\ 1,\ 4\}\bigcup\{0,\ 6\}\times(0;1)\bigcup\{0,\ 6\}\times(4;6).$$

Выбираем правую часть и коэффициент в уравнении

$$\breve{f}_1(x;y) = 2,\ (x;y)\in(0;6)\times(1;4),\ \kappa_{\mathrm{II}}(x;y) = 2,\ (x;y)\in(0;6)\times(0;1),\ \kappa_{\mathrm{II}}(x;y) = 0,\ (x;y)\in(0;6)\times(4;6).$$

Приведем решение задачи

$$\breve{u}_1(x;y) = (y-1)(4-y),\ (x;y)\in(0;6)\times(1;4).$$

При дискретизации выбираем шаги сетки.

$$h_1 = h_2 = 6/n,\ n = 6,12,...,102.$$

В вычислениях по методу итерационных расширений при нулевом начальном приближении устанавливается постоянное количество итераций при заранее задаваемой оценке относительной ошибки

$$k = k(\mathrm{E};n) = 6,\ \mathrm{E} = 0{,}001.$$

Отметим, что на последней шестой итерации, на самой мелкой из используемых сеток, выполняются неравенства характеризующие точность численного решения в рассматриваемом примере

$$\max_{(x_i;y_j)\in\Omega_1}\frac{\left|u_{i,j}^6 - u_{i,j}\right|}{\left|u_{i,j}\right|} < 0{,}0024,\quad \frac{\max\limits_{(x_i;y_j)\in\Omega_1}\left|u_{i,j}^6 - u_{i,j}\right|}{\max\limits_{(x_i;y_j)\in\Omega_1}\left|u_{i,j}\right|} < 0{,}0002.$$

Литература

1. Aubin, J.-P. Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems / J.-P. Aubin // New York: Wiley-Interscience, 1972. – 360 p.

2. Sorokin, S.B. An economical Algorithm for Numerical Solution of the Problem of Identifying the Right-Hand Side of the Poisson Equation / S.B. Sorokin // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2018. – Vol. 12, no. 2. – P. 362–368.

3. Sorokin, S.B. An Efficient Direct Method for the Numerical Solution to the Cauchy Problem for the Laplace Equation / S.B. Sorokin // Numerical Analysis and Applications. – 2019. – Vol. 12, no. 12. – P. 87–103.

4. Ushakov, A.L. Investigation of a Mixed Boundary Value Problem for the Poisson Equation / A.L. Ushakov // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia. – 2020. – P. 273–278.

5. Ушаков, А.Л. О моделировании деформаций пластин / А.Л. Ушаков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 138–142.

6. Мацокин, А.М. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения / А.М. Мацокин, С.В. Непомнящих // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1993. – Т. 33, № 1. – С. 52–68.

7. Marchuk, G.I. Fictitious Domain and Domain Decomposion Methods / G.I. Marchuk, Yu.A. Kuznetsov, A.M. Matsokin // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 1986. – Vol. 1, Iss. 1. – P. 3–35.

8. Bank, R.E. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems / R.E. Bank, D.J. Rose // SIAM J. on Numer. Anal. – 1977. – Vol. 14, no. 5. – P. 792–829.

9. Manteuffel, T. An Incomlete Factorization Technigue for Positive Definite Linear Systems / T. Manteuffel // Math. Comput. – 1980. – Vol. 38, no. 1. – P. 114–123.

10. Swarztrauber, P.N. A Direct Method for Discrete Solution of Separable Elliptic Equations / P.N. Swarztrauber // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1974. – Vol. 11, Iss. 6. – P. 1136–1150.

11. Swarztrauber, P.N. The Method of Cyclic Reduction, Fourier analysis and FACR Algorithms for the Discrete Solution of Poisson's Equations on a Rectangle / P.N. Swarztrauber // SIAM Review. – 1977. – Vol. 19, no. 3. – P. 490–501.

Поступила в редакцию 12 декабря 2020 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 1, pp. 29–40

DOI: 10.14529/mmph210104

ANALYSIS OF THE MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON'S EQUATION

A.L. Ushakov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: ushakoval@susu.ru

The mixed boundary value problem for the Poisson's equation is examined in a bounded flat domain. The problem is continued in a variational form through the boundary with the Dirichlet condition to a rectangular domain. To solve the continued problem, a modified method of fictitious components in a variational form is formulated. The continued problem in a variational form is considered on a finite-dimensional space. To solve the previous problem, a modified method of fictitious components on a finite-dimensional space is formulated. To solve the continued problem in matrix form, the known method of fictitious components is considered. It is shown that in the method of fictitious components the absolute error in the energy norm converges with the speed of a geometric progression. To generalize the method of fictitious components, a new version of the method of iterative extensions is proposed. The continued problem in matrix form is solved using the method of iterative extensions. It is shown that in the proposed version of the method of iterative extensions, the relative error converges in a norm that is stronger than the energy norm of the problem with a geometric progression rate. The iterative parameters in the specified method are selected using the minimum residual method. The conditions which are sufficient for the convergence of the applied iterative process are indicated. An algorithm which implements the proposed version of the method of iterative extensions is written. In this algorithm, an automated selection of iterative parameters is conducted, and the stopping criterion is established when achieving an estimate of the required accuracy. An example of the application of the method of iterative extensions for solving a particular problem is given. In the calculations, the condition for achieving an estimate of the relative error in the norm that is stronger than the energy norm of the problem is set. However, the relative errors of the obtained numerical solution of the example of the original problem are shown in other ways. For example, the relative error in grid nodes is calculated pointwise. To achieve a relative error of no more than a few percent, just a few iterations are required. Computational experiments confirm the asymptotic optimality of the method obtained in theory.

Keywords: Poisson's equation; method of fictitious components; method of iterative extensions.

References

1. Aubin J.-P. *Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems*. New York: Wiley-Interscience, 1972, 360 p.

2. Sorokin S.B. An economical Algorithm for Numerical Solution of the Problem of Identifying the Right-Hand Side of the Poisson Equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics,* 2018, Vol. 12, no. 2, pp. 362–368. DOI: 10.1134/S1990478918020163

3. Sorokin S.B. An Efficient Direct Method for the Numerical Solution to the Cauchy Problem for the Laplace Equation. *Numerical Analysis and Applications*, 2019, Vol. 12, no. 12, pp. 87–103. DOI: 10.1134/S1995423919010075

4. Ushakov A.L. Investigation of a Mixed Boundary Value Problem for the Poisson Equation. *2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia*, 2020, pp. 273–278. DOI: 10.1109/RusAutoCon49822.2020.9208198

5. Ushakov A.L. About Modelling of Deformations Plates. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2015, Vol. 8, no. 2, pp. 138–142. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150213

6. Matsokin A.M., Nepomnyaschikh S.V. The Fictitious-Domain Method and Explicit Continuation operators. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1993, Vol. 33, no. 1, pp. 52–68. (in Russ.).

7. Marchuk G.I., Kuznetsov Yu.A., A.M. Matsokin A.M. Fictitious Domain and Domain Decomposion Methods. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 1986, Vol. 1, Iss. 1, pp. 3–35. DOI:10.1515/rnam.1986.1.1.3

8. Bank R.E., Rose D.J. Marching Algorithms for Elliptic Boundary Value Problems. *SIAM J. on Numer. Anal.*, 1977, Vol. 14, no. 5, pp. 792–829. DOI: 10.1137/0714055

9. Manteuffel T. An Incomlete Factorization Technigue for Positive Definite Linear Systems. *Math. Comput.*, 1980, Vol. 38, no. 1, pp. 114–123.

10. Swarztrauber P.N. A direct Method for Discrete Solution of Separable Elliptic Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1974, Vol. 11, no. 6, pp. 1136–1150. DOI: 10.1137/0711086

11. Swarztrauber P.N. The Method of Cyclic Reduction, Fourier Analysis and FACR Algorithms for the Discrete Solution of Poisson’s Equations on a Rectangle. *SIAM Review*, 1977, Vol. 19, no. 3, pp. 490–501. DOI: 10.1137/1019071

Received December 12, 2021