УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph210204

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ НА ПРЯМОЙ

А.О. Мамытов
Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Респу́блика
E-mail: mamytov1968@list.ru

Определения либо ядра, либо правых частей интегро-дифференциальных уравнений, или значения либо начальных, либо краевых условий для интегро-дифференциальных уравнений, либо определения правой части для интегро-дифференциального уравнения с переопределением во внутренней точке по дополнительной информации о решении исходной задачи называют обратными задачами. Математические модели современных проблем геофизики, океанологии, атмосферы, физики, техники и других наук описываются с помощью интегро-дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. Предлагаемая статья посвящена разрешимости обратной задачи, т. е. восстановлению ядра в начально-краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с известным значением искомого решения на прямой $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, то есть с переопределением во внутренней прямой. Нами впервые доказана существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи. Для достижения поставленной цели нами использованы известные методы: метод сведения обратной задачи к линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, метод функций Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с однородными краевыми условиями. При решении поставленной обратной задачи найдены достаточные условия существования и единственность решения обратной задачи по восстановлению ядра в интегро-дифференциальном уравнении в частных производных четвертого порядка. Сначала с помощью преобразований и функции Грина исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее с помощью методов теории обратных задач составляются три интегральных уравнения Вольтерра второго рода и доказывается существование и единственность решения систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Ключевые слова: обратная задача; интегро-дифференциальные уравнения с частными производными; ядра; функция Грина.

Введение. Обычно определения либо ядра, либо правых частей интегро-дифференциальных уравнений, или значения либо начальных, либо краевых условий для интегро-дифференциальных уравнений, либо определения правой части для интегро-дифференциального уравнения с переопределением во внутренней точке по дополнительной информации о решении исходной задачи называют обратными задачами.

Почти во всех сферах науки и техники, при решении практических задач, обратные задачи занимают особое место. Математические модели современных проблем геофизики, океанологии, атмосферы, физики техники и других наук описываются с помощью дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. Различные обратные задачи рассмотрены в работах [1–5].

Наша статья посвящена разрешимости обратной задачи, т. е. восстановления ядра в начально-краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с известным значением искомого решения на прямой $x = x_0$, $x_0 \in (0,1)$.

Нами доказано существование и единственность решения поставленной обратной задачи.

Для достижения поставленной цели нами использованы: метод сведения обратной задачи к линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода, метод функций Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с однородными краевыми условиями.

При решении поставленной обратной задачи найдены достаточные условия существования и единственность решения обратной задачи по восстановлению ядра в интегро-дифференциальном уравнении в частных производных четвертого порядка.

Постановка задачи. Исследуем линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных:

$$u_{tt}(t,x)=\alpha u_{xxtt}(t,x)+\beta u_{xx}(t,x)+\int_0^t K(t-s)u_{ss}(s,x)ds+f(t,x),\ (t,x)\in\Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$u(0,x)=\varphi(x),\ u_t'(0,x)=\psi(x),\ 0\le x\le 1, \tag{2}$$

однородными краевыми условиями:

$$u(t,0)=u(t,1)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

а также с известным значением искомого решения $u(t,x)$ на прямой $x=x_0,\ x_0\in(0,1)$:

$$u(t,x_0)=g(t),\quad t\in[0,T], \tag{4}$$

где постоянные $\beta<0, 0<\alpha, 0<T$ известны, $f(t,x)$ – известная функция, $K(t)$ и $u(t,x)$ – неизвестные функции, $\Omega=\{(x,t)\,|\,0<x<1,\ 0<t\le T\}$.

Ставится вопрос: при каких условиях в области Ω существует единственное решение $\{K(t),u(t,x)\}$ обратной задачи (1)–(4)?

Пусть выполняются следующие условия:

U₁. Известная функция $f(t,x)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}=\{(x,t)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$.

U₂. $\varphi(x),\psi(x)\in C^2[0,1],\ \varphi(0)=\varphi(1)=0,\ \psi(0)=\psi(1)=0$.

U₃. $g\in C^3[0,T],\ \varphi(x_0)=g(0)$.

Лемма 1. Пусть $\gamma=-\dfrac{\beta}{\alpha}>0,\ \alpha,\beta\in R,$ тогда резольвента $R(t,s)$ ядра $K(t,s)=\gamma(t-s)$, $(t,s)\in G=\{(t,s):0\le s\le t\le T\}$ определяется однозначно и в явном виде:

$$R(t,s)=\sqrt{\gamma}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\gamma}(t-s)\right),\ (t,s)\in G. \tag{5}$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно доказать следующее равенство

$$R(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau+K(t,s),(t,s)\in G.$$

Для проверки этого равенства мы вставляем выражения для ядра $K(t,s)=\gamma(t-s)$ и резольвенты $R(t,s)=\sqrt{\gamma}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\gamma}(t-s)\right)$:

$$\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau+K(t,s)=\int_s^t \gamma(t-\tau)\sqrt{\gamma}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\gamma}(\tau-s)\right)d\tau+\gamma(t-s)=$$

$$=-\gamma(t-s)\,\mathrm{ch}(0)+\sqrt{\gamma}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\gamma}(\tau-s)\right)\Big|_{\tau=s}^{\tau=t}+\gamma(t-s)=\sqrt{\gamma}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\gamma}(t-s)\right)=R(t,s).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $f(x)\in C[0,1]$ и $\alpha>0$, тогда решение двухточечной краевой задачи

$$z''(x)-\frac{1}{\alpha}z(x)=f(x),\quad x\in(0,1),\quad z(0)=z(1)=0$$

можно записать с помощью функции Грина [6]:

$$z(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

где

$$G(x,\xi)=\begin{cases} -\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left[\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}}\operatorname{sh}\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}}-1}-\frac{1}{2}e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}\right]e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}}-1}-\frac{1}{2}e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}\right]e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}},\ 0\le x\le\xi\le 1,\\ -\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left[\frac{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}}\operatorname{sh}\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}}-1}+\frac{1}{2}e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}\right]e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}{e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}}-1}+\frac{1}{2}e^{\frac{-\xi}{\sqrt{\alpha}}}\right]e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}},\ 0\le\xi\le x\le 1. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$v(t,x)=u_{tt}(t,x). \tag{6}$$

Интегрируя (10) по переменной t, имеем:

$$u_t(t,x)=\int_0^t v(s,x)ds+C(x),$$

где $C(x)$ – произвольная функция.

Учитывая начальное условие $u_t'(0,x)=\psi(x)$, выберем $C(x)$ так, чтобы выполнялось это начальное условие:

$$u_t(0,x)=\int_0^0 v(s,x)ds+C(x)\ \Rightarrow\ C(x)=\psi(x).$$

Отсюда получаем:

$$u_t(t,x)=\int_0^t v(s,x)ds+\psi(x). \tag{7}$$

Далее, интегрируя (7) по переменной t, имеем:

$$u(t,x)=\int_0^t\int_0^\tau v(s,x)dsd\tau+\int_0^t\psi(x)dt+C_1(x),$$

где $C_1(x)$ – произвольная функция.

Учитывая начальное условие $u(0,x)=\varphi(x)$, выберем $C_1(x)$:

$$u(0,x)=\int_0^0\int_0^\tau v(s,x)dsd\tau+\int_0^0\psi(x)dt+C_1(x)\Rightarrow C_1(x)=\varphi(x).$$

Для двойного интеграла $\int_0^t\int_0^\tau v(s,x)dsd\tau$, используя формулу Дирихле, получаем:

$$\int_0^t\int_0^\tau v(s,x)dsd\tau=\int_0^t\int_s^t v(s,x)d\tau ds=\int_0^t v(s,x)ds\int_s^t d\tau=\int_0^t(t-s)v(s,x)ds.$$

Отсюда получаем:

$$u(t,x)=\int_0^t(t-s)v(s,x)ds+\psi(x)t+\varphi(x) \tag{8}$$

Учитывая обозначение (6) интегро-дифференциальное уравнение (1) запишем в виде:

$$v(t,x)=\alpha v_{xx}(t,x)+\beta u_{xx}(t,x)+\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds+f(t,x), \tag{9}$$

а интеграл $\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds$ можно записать в виде

$$\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds = \int_0^t K(s)v(t-s,x)ds\,. \tag{10}$$

Дифференцируя соотношение (8) дважды по переменной x, получаем

$$u_{xx}(t,x) = \int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds + \psi''(x)t + \varphi''(x)\,. \tag{11}$$

Подставляя выражения (10) и (11) в уравнение (9), получим:

$$v(t,x) = \alpha v_{xx}(t,x) + \beta\int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds + \beta\psi''(x)t + \beta\varphi''(x) + \int_0^t K(s)v(t-s,x)ds + f(t,x)\,,$$

или

$$v_{xx}(t,x) - \frac{1}{\alpha}v(t,x) = -\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds - \frac{\beta}{\alpha}\psi''(x)t - \frac{\beta}{\alpha}\varphi''(x) - \frac{1}{\alpha}\int_0^t K(s)v(t-s,x)ds - \frac{1}{\alpha}f(t,x)\,. \tag{12}$$

Учитывая лемму 1, получим

$$\begin{gathered} v_{xx}(t,x) - \frac{1}{\alpha}v(t,x) = \gamma\psi''(x)t + \gamma\varphi''(x) - \frac{1}{\alpha}\int_0^t K(s)v(t-s,x)ds - \frac{1}{\alpha}f(t,x) + \\ + \int_0^t \sqrt{\gamma}\, sh\left(\sqrt{\gamma}(t-s)\right)\left(\frac{1}{\alpha}v(s,x) + \gamma\psi''(x)s + \gamma\varphi''(x) - \frac{1}{\alpha}\int_0^s K(\tau)v(s-\tau,x)d\tau - \frac{1}{\alpha}f(s,x)\right)ds. \end{gathered} \tag{13}$$

На основании обозначения (6) из однородных краевых условий (3) имеем:

$$v(t,0) = v(t,1) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{14}$$

Применяя лемму 2 к задаче (13), (14), получаем интегральное уравнение Вольтерра вторго рода:

$$\begin{gathered} v(t,x) = \int_0^1 G(x,\xi)\Bigg(\gamma\psi''(\xi)t + \gamma\varphi''(\xi) - \frac{1}{\alpha}\int_0^t K(s)v(t-s,\xi)ds - \frac{1}{\alpha}f(t,\xi) + \\ + \int_0^t \mathrm{sh}\left(\sqrt{\gamma}(t-s)\right)\left[\frac{1}{\alpha}v(s,\xi) + \gamma\psi''(\xi)s + \gamma\varphi''(\xi) - \frac{1}{\alpha}\int_0^s K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau - \frac{1}{\alpha}f(s,\xi)\right]ds\Bigg)d\xi. \end{gathered} \tag{15}$$

Пусть

$$F(t,x) = \int_0^1 G(x,\xi)\left(\gamma\psi''(\xi)t + \gamma\varphi''(\xi) - \frac{f(t,\xi)}{\alpha} + \int_0^t \left(\gamma\psi''(\xi)s + \gamma\varphi''(\xi) - \frac{f(t,\xi)}{\alpha}\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\gamma}(t-s)\right)ds\right)d\xi \tag{16}$$

Тогда интегральное уравнение (15) примет вид:

$$\begin{gathered} v(t,x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds - \\ -\frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)K(s)v(t-s,\xi)d\xi ds - \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1\int_0^s R(t,s)G(x,\xi)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds + F(t,x). \end{gathered} \tag{17}$$

Нетрудно заметить, что в равенстве (17) при $t=0$:

$$v(0,x) = F(0,x),\ x \in [0,1]. \tag{18}$$

Дифференцируя равенство (17) по переменной t и учитывая соотношение (18), имеем

$$\begin{gathered} v_t(t,x) + \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^1 G(x,\xi)F(0,\xi)d\xi\right]K(t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)R_t(t,s)v(s,\xi)d\xi ds - \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)K(s)v_t(t-s,\xi)d\xi ds - \\ -\frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 G(x,\xi)R_t(t,s)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\xi d\tau ds + F_t(t,x). \end{gathered} \tag{19}$$

Теперь в полученном соотношении (19) полагаем, что $x = x_0$. Учитывая условие (4) и соотношение (8), мы получаем следующее равенство:

$$\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^1 G(x_0,\xi)F(0,\xi)d\xi\right]K(t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1 G(x_0,\xi)R_t(t,s)v(s,\xi)d\xi ds - \frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1 G(x_0,\xi)K(s)v_t(t-s)d\xi ds -$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 G(x_0,\xi)R_t(t,s)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\xi d\tau ds + F_t(t,x_0) - g'''(t). \qquad (20)$$

Таким образом, для определения неизвестных $K(t), v(t,x), v_t(t,x)$ мы получили систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода (17), (19) и (20).

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$ и неравенство $\frac{1}{\alpha}\int_0^1 G(x_0,\xi)F(0,\xi)d\xi \neq 0$. Тогда при достаточно малом значении $T > 0$ обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение $\{u(t,x),\, K(t)\}$ в классе $C^{2,2}([0,T]\times[0,1])\times C[0,T]$.

Причем $u(t,x)\in C^{2,2}([0,T]\times[0,1]) \Leftrightarrow u_{xxtt}(t,x)\in C([0,T]\times[0,1])$.

Литература

1. Asanov, A. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations / A. Asanov, E.R. Atamanov. – Netherlands: VSP, Utrecht, 1997. – 152 p.

2. Асанов, А. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения / А. Асанов, Э.Р. Атаманов // Сиб. матем. журнал. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 752–762.

3. Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.

4. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

5. Лаврентьев, М.М. О некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 92 с.

6. Мамытов, А.О. Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка / А.О. Мамытов // Молодой учёный. – 2016. – № 11(115). – С. 49–52.

Поступила в редакцию 4 февраля 2021 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2021, vol. 13, no. 2, pp. 24–29

DOI: 10.14529/mmph210204

SOLVABILITY OF THE INVERSE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A KNOWN VALUE ON THE LINE

A.O. Mamytov
Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic
E-mail: mamytov1968@list.ru

The definitions of either the kernel or the right-hand sides of integro-differential equations, or the values of either the initial or boundary conditions for integro-differential equations or the definition of the right-hand side for an integro-differential equation with over determination at an interior point based on additional information about the solution of the original problem is called inverse problems. Mathematical models of modern problems of geophysics, oceanology, atmosphere, physics, technology and other sciences are described using integro-differential equations with partial derivatives of the fourth order. The present article is devoted to the solvability of the inverse problem, that is, the recovery of the kernel in the initial-boundary value problem for a fourth-order integro-differential equation with partial derivatives with a known value of the desired solution on the straight line $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, that is, with a new definition in the inner line. The authors have proved for the first time the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem under consideration. Well-known methods are used to achieve this goal: the method of reducing the inverse problem to a linear integral Volterra equation of the second kind, the method of Green's functions for ordinary differential equations of the second order with homogeneous boundary conditions. When solving the formulated inverse problem, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem of recovering the kernel in a fourth order partial integro-differential equation are found. First, using transformations and the Green's function, the original problem is reduced to an equivalent problem, for which a theorem on the existence and uniqueness of a solution is proved. Further, using the methods of the theory of inverse problems, three Volterra integral equations of the second kind are compiled and the existence and uniqueness of the solution of systems of Volterra integral equations of the second kind are proved.

Keywords: inverse problem; integro-differential equation with partial derivatives; kernels; Green's function.

References

1. Asanov A., Atamanov E.R. *Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations*. Netherlands: VSP, Utrecht, 1997, 152 p.

2. Asanov A., R. Atamanov È. An Inverse Problem for a Pseudoparabolic Integro-Differential Operator Equation. *Siberian Mathematical Journal*, 1995, Vol. 36, no. 4, pp. 645–655. DOI: 10.1007/BF02107322

3. Bukhgeym A.L. *Uravneniya Vol'terra i obratnye zadachi* (Volterra Equations and Inverse Problems). Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 207 p. (in Russ.).

4. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and Ill-Posed Problems). Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo Publ., 2009, 457 p. (in Russ.).

5. Lavrent'ev M.M. *O nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* (On Ill-Posed Problems in Mathematical Physics). Novosibirsk, SO AN SSSR Publ., 1962, 92 p. (in Russ.).

6. Mamytov A.O. *Young Scientist*, 2016, no. 11(115), pp. 49–52. (in Russ.). https://moluch.ru/archive/115/30705/

Received February 4, 2021