УДК 517.956.223 DOI: 10.14529/mmph210206

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

***Б.Х. Турметов*[1], *В.В. Карачик*[2]**
[1] *Международный казахско-турецкий университет имени А. Ясави, г. Туркестан, Республика Казахстан*
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
[2] *Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
E-mail: karachik@susu.ru

Исследуются условия разрешимости одного класса краевых задач для нелокального полигармонического уравнения в единичном шаре с условиями Дирихле на границе, порожденного некоторой ортогональной матрицей. Исследованы существование и единственность решения поставленной задачи Дирихле и построена функция Грина.

Сначала устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения: исследуется обратимость матрицы Вандермонда из корней *m*-й степени из единицы, затем находятся собственные векторы и собственные числа вспомогательной матрицы, порожденной коэффициентами нелокального оператора задачи и, далее, находится обратная матрица к ней. Для доказательства единственности решения поставленной задачи устанавливается коммутативность граничных операторов и нелокального оператора задачи и показывается, что если решение задачи существует, то это решение – полигармоническая функция. Затем находятся условия единственности решения рассматриваемой задачи. Далее, на основании полученных выше вспомогательных утверждений находятся условия существования решения нелокальной задачи. Решение этой задачи выписывается через решения вспомогательных задач Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре. Наконец, по известной функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре строится функция Грина исходной нелокальной задачи.

Ключевые слова: нелокальный оператор; задача Дирихле; полигармоническое уравнение; условия разрешимости; функция Грина.

Введение. Понятие нелокального оператора и связанные с ним понятия нелокального дифференциального уравнения и нелокальной краевой задачи появились в математике относительно недавно. Например, в [1] рассматриваются уравнения, содержащие дробные производные искомой функции, уравнения с отклоняющимися аргументами, другими словами, уравнения, в которые входят неизвестная функция и ее производные, вообще говоря, для разных значений аргументов называются нелокальными дифференциальными уравнениями.

Краевые и начально-краевые задачи для нелокальных аналогов классических уравнений исследовались в работах [2–6]. Многочисленные приложения нелокальных уравнений и нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений к задачам физики, техники и других отраслей науки подробно описаны в [7, 8]. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго и четвертого порядка с инволюцией, как частные случаи нелокальных задач, рассматриваются в [9–13].

Пусть $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, а $\partial\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$ – единичная сфера и S – действительная ортогональная матрица $SS^T=E$, для которой существует натуральное число $m\in\mathbb{N}$ такое, что $S^m=E$. Отметим, что если $x\in\Omega$, или $s\in\partial\Omega$, тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ справедливы следующие включения: $S^k x\in\Omega$, или $S^k s\in\partial\Omega$. Это так, поскольку преобразование $\mathbb{R}^n$ матрицей S сохраняет норму $|x|^2=(S^T Sx,x)=(Sx,Sx)=|Sx|^2$.

Рассмотрим нелокальный дифференциальный оператор

$$Lu(x)\equiv\sum_{k=0}^{m-1}a_k(-\Delta)^l u\left(S^k x\right),$$

где $a_0,a_1,...,a_{m-1}$ – некоторые действительные числа и $l\in\mathbb{N}$. Исследуем в Ω следующую задачу.

Задача Дирихле. Найти функцию $u(x)\in C^{2m}(\Omega)\cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$Lu(x)=f(x),\ x\in\Omega\ , \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k}\right|_{\partial\Omega}=g_k(x),\ k=0,1,\ldots,m-1, \tag{2}$$

где ν – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

Вспомогательные утверждения. Для исследования поставленной выше задачи нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы, тогда справедливо равенство

$$M^{-1}\equiv\begin{pmatrix}\mu_0^0 & \mu_0^1 & \cdots & \mu_0^{m-1}\\ \mu_1^0 & \mu_1^1 & \cdots & \mu_1^{m-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{m-1}^0 & \mu_{m-1}^1 & \cdots & \mu_{m-1}^{m-1}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{m}\bar{M}^T.$$

Доказательство. Найдем $e_{i,j}$ – элемент i-й строки и j-го столбца в произведении матрицы из левой части равенства и матрицы из правой части. Он равен

$$e_{i,j}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\mu_i^k\bar{\mu}_j^k=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\mu_i\bar{\mu}_j)^k=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}=\delta_{i,j},$$

поскольку $\mu_i\bar{\mu}_j$ – тоже корень степени m из единицы, не равный 1 при $i\neq j$ и $\mu_i\bar{\mu}_i=|\mu_i|^2=1$. Поэтому произведение этих матриц равно E. Это доказывает лемму.

Рассмотрим следующую матрицу, сформированную коэффициентами $a_0,a_1,\ldots,a_{m-1}$

$$A=\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1}\\ a_{m-1} & a_0 & \cdots & a_{m-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0\end{pmatrix}, \tag{3}$$

Лемма 2. Пусть μ – корень степени m из единицы и

$$\sigma_\mu(A)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\bar{\mu}^k, \tag{4}$$

тогда для матрицы A справедливо равенство

$$\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1}\\ a_{m-1} & a_0 & \cdots & a_{m-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu^0\\ \mu^1\\ \vdots\\ \mu^{m-1}\end{pmatrix}=\sigma_{\bar{\mu}}(A)\begin{pmatrix}\mu^0\\ \mu^1\\ \vdots\\ \mu^{m-1}\end{pmatrix},$$

т. е. вектор $\mathrm{m}_\mu=(\mu^0,\mu^1,\ldots,\mu^{m-1})^T$ – собственный вектор матрицы A, а $\sigma_{\bar{\mu}}(A)$ – собственное значение, ему отвечающее. Если $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы, то собственные вектора $\mathrm{m}_{\mu_0},\ldots,\mathrm{m}_{\mu_{m-1}}$ линейно независимы и

$$\det A=\prod_{k=0}^{m-1}(\mathrm{a}\cdot\mathrm{m}_{\mu_k})=\sigma_{\mu_0}(A)\cdots\sigma_{\mu_{m-1}}(A),$$

где $\mathrm{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{m-1})^T$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что элемент i-й строки в произведении матрицы A и вектора m_μ равен

$$A_i^{row}\cdot \mathrm{m}_\mu=\sum_{k=0}^{i-1}a_{m+k-i}\mu^k+\sum_{k=i}^{m-1}a_{k-i}\mu^k=\mu^i\sum_{k=0}^{i-1}a_{m+k-i}\mu^{k-i}+\mu^i\sum_{k=i}^{m-1}a_{k-i}\mu^{k-i}=$$
$$=\mu^i\left(\sum_{k'=m-i}^{m-1}a_{k'}\mu^{k'}+\sum_{k'=0}^{m-1-i}a_{k'}\mu^{k'}\right)=\mu^i\sum_{k'=0}^{m-1}a_{k'}\mu^{k'}=\sigma_{\bar\mu}(A)\mu^i.$$

Здесь в первой сумме из второй строчки была сделана замена индекса $m+k-i=k'$ и учтено, что $\mu^{k'-m}=\mu^{k'}$, а во второй сумме замена индекса $k-i=k'$. Следовательно, $A\mathrm{m}_\mu=\sigma_{\bar\mu}(A)\mathrm{m}_\mu$. Первое утверждение леммы доказано.

В силу леммы 1 матрица $M=(\mathrm{m}_{\mu_0},\dots,\mathrm{m}_{\mu_{m-1}})^T$ обратима и, значит, неособенная, а поэтому ее ранк по строкам равен m, т. е. они линейно независимы. Далее, поскольку определитель матрицы равен произведению ее собственных чисел, то имеем $\det A=\sigma_{\bar\mu_0}(A)\cdots\sigma_{\bar\mu_{m-1}}(A)$ и поскольку

$$\sigma_{\bar\mu}(A)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\mu^k=\mathrm{a}\cdot\mathrm{m}_\mu,$$

то

$$\det A=\sigma_{\bar\mu_0}(A)\cdots\sigma_{\bar\mu_{m-1}}(A)=\prod_{k=0}^{m-1}(\mathrm{a}\cdot\mathrm{m}_{\mu_k}).$$

Поскольку $\bar\mu_0,\bar\mu_1,\dots,\bar\mu_{m-1}$ тоже различные корни степени m из единицы, то $\det A=\sigma_{\mu_0}(A)\cdots\sigma_{\mu_{m-1}}(A)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть матрица A построена на числах $a_0,a_1,\dots,a_{m-1}$, а матрица B на числах $b_0,b_1,\dots,b_{m-1}$, тогда матрицы A и B коммутируют $AB=BA$ и матрица AB имеет структуру матриц A и B. Если $\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы и $\sigma_{\mu_k}(A)\ne 0$, $k=0,1,\dots,m-1$, то

$$A^{-1}=\frac{1}{m}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\mu_k^{j-i}\sigma_{\bar\mu_k}(A)}\right)_{i,j=\overline{0,m-1}}\equiv\begin{pmatrix}c_0 & c_1 & \cdots & c_{m-1}\\ c_{m-1} & c_0 & \cdots & c_{m-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0\end{pmatrix},$$

где

$$c_j=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\bar\mu_k^j}{\sigma_{\bar\mu_k}(A)},\ j=0,1,\dots,m-1 \tag{5}$$

и, значит, матрица C имеет структуру матрицы A.

Доказательство леммы опустим.

Замечание 1. Поскольку

$$\sigma_{\bar\mu_k}(A^{-1})=\frac{1}{\sigma_{\bar\mu_k}(A)},$$

то при $\mu=1$ верны равенства $\sigma_1(A)=\sum_{j=0}^{m-1}a_j$ и $\sigma_1(A^{-1})=\sum_{i=0}^{m-1}c_i$, а значит $\sum_{j=0}^{m-1}a_j\sum_{i=0}^{m-1}c_i=1$.

Единственность решения задачи

Лемма 4. [5, лемма 3.1] Оператор $I_Su(x)=u(Sx)$ и оператор Лапласа Δ коммутируют $\Delta I_Su(x)=I_S\Delta u(x)$ на функциях $u\in C^2(\Omega)$. Оператор $\Lambda=\sum_{i=1}^{n}x_iu_{x_i}(x)$ и оператор I_S также коммутируют $\Lambda I_Su(x)=I_S\Lambda u(x)$ на функциях $u\in C^1(\bar\Omega)$ и верно равенство $\nabla I_S=I_SS^T\nabla$.

Следствие 1. Если функция $u(x)$ – l-гармоническая в Ω, то функция $u(Sx)=I_Su(x)$ тоже l-гармоническая в Ω.

Действительно, в силу леммы 4 $\Delta^l u(x)=0 \Rightarrow \Delta^l I_S u(x)=I_S\Delta^l u(x)=0$.

Отсюда следует, что если функция $u(x)$ – полигармоническая в Ω, то она удовлетворяет однородному уравнению (1) в Ω.

Верно и обратное утверждение.

Лемма 5. Пусть функция $u\in C^{2l}(\Omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и $\sigma_{\mu_k}(A)\neq 0$ при $k=0,1,\dots,m-1$, где $\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы, тогда функция $u(x)$ является l-гармонической в области Ω.

Доказательство. Пусть функция $u\in C^{2l}(\Omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (1). Обозначим

$$v(x)=\sum_{k=0}^{m-1}a_k u(S^k x). \tag{6}$$

Очевидно, что $v(x)\in C^{2l}(\Omega)$ и $(-\Delta)^l v(x)=0, x\in\Omega$, т. е. функция $v(x)$ является l-гармонической в области Ω. В силу следствия 1 функции $v(S^k x)$ тоже l-гармонические в области Ω. С другой стороны из (6), в силу условия $S^m=E$, имеют место равенства

$$\begin{aligned}
&v(Sx)=a_{m-1}u(x)+a_0u(Sx)+\ldots+a_{m-2}u(S^{m-1}x)\\
&v(S^2x)=a_{m-2}u(x)+a_{m-1}u(Sx)+\ldots+a_{m-3}u(S^{m-1}x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v(S^{m-1}x)=a_1u(x)+a_2u(Sx)+\ldots+a_0u(S^{m-1}x)
\end{aligned}. \tag{7}$$

Таким образом, для функций $u(x),u(Sx),\dots,u(S^{m-1}x)$ получаем систему алгебраических уравнений (6), (7) с матрицей A из (3)

$$\begin{pmatrix} v(x)\\ v(Sx)\\ \vdots\\ v(S^{m-1}x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-1}\\ a_{m-1} & a_0 & \ldots & a_{m-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(x)\\ u(Sx)\\ \vdots\\ u(S^{m-1}x)\end{pmatrix}.$$

По условию леммы, в силу леммы 2, определитель этой системы не обращается в нуль. Воспользуемся леммой 3. Первая строка матрицы A^{-1} имеет вид $\mathrm{c}=\left(c_0,c_1,\ldots,c_{m-1}\right)^T$, где c_j при $j=0,1,\dots,m-1$ находятся из (5) и значит

$$u(x)=\sum_{j=0}^{m-1}c_j v(S^j x)=c_0v(x)+c_1v(Sx)+\ldots+c_{m-1}v(S^{m-1}x). \tag{8}$$

Как отмечалось выше, функции $v(S^j x)$ при $j=0,1,\dots,m-1$ – l-гармонические функции в Ω, а значит, функция $u(x)$ из (8) также является l-гармонической в области Ω. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы, выполнены условия $\sigma_{\mu_k}(A)\neq 0$, $k=0,\dots,m-1$ и решение задачи Дирихле (1), (2) существует, тогда оно единственно.

Доказательство. Докажем, что однородная задача (1), (2) имеет только нулевое решение, а значит, решение неоднородной задачи (1), (2) единственно. Пусть $u(x)$ – решение однородной задачи (1), (2). Если $\sigma_{\mu_k}(A)\neq 0$ (4), при $k=0,\dots,m-1$, то по лемме 5 функция $u(x)$ является l-гармонической в области Ω и удовлетворяет однородным условиям (2). Следовательно, функция $u(x)$ – решение следующей задачи Дирихле

$$\Delta^m u(x)=0,\ x\in\Omega;\ \left.\frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k}\right|_{\partial\Omega}=0,\ k=0,1,\ldots m-1.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле имеем $u(x)\equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

Существование решения задачи Дирихле. В этом разделе исследуем существование решения задачи Дирихле (1), (2).

Теорема 2. Пусть $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы и $\sigma_{\bar{\mu}_k}(A) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \mu_k^i \neq 0$, $f(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}), g_j(x) \in C^{m+\lambda-j}(\partial\Omega), j = 0,1,...,m-1$. Тогда решение задачи Дирихле (1), (2) существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q v(S^q x), \tag{9}$$

где коэффициенты c_q определяются из (5), а $v(x)$ – решение следующей задачи Дирихле

$$(-\Delta)^l v(x) = f(x), x \in \Omega; \ \left.\frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k g_j(S^k x) \equiv h_j(x), \ j = 0,1,\ldots,m-1, x \in \partial\Omega. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи Дирихле (1), (2). Обозначим

$$v(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k u(S^k x).$$

Тогда для функции $v(x)$, в силу леммы 4, получаем задачу (10): $(-\Delta)^l v(x) = f(x)$ и

$$\left.\frac{\partial^j v(x)}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}(S^k x)|_{\partial\Omega} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k g_j(S^k x) = h_j(x).$$

Если $g_j(x) \in C^{l+\lambda-j}(\partial\Omega), j = 0,1,\ldots,m-1$, то $h_j(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k g_j(S^k x) \in C^{l+\lambda-j}(\partial\Omega)$. Известно (см., например, [14]), что для заданных функций $f(x)$ и $h_j(x) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k g_j(S^k x)$ решение задачи (10) существует и единственно. Как и в случае теоремы 1 между функциями $v(x)$ и $u(x)$ получаем алгебраическое соотношение вида $AU = V$, где

$$U = \left(u(x), u(Sx), \ldots, u(S^{m-1}x)\right)^T, \ V = \left(v(x), v(Sx), \ldots, v(S^{m-1}x)\right)^T.$$

Если $\sigma_{\bar{\mu}_k}(A) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \mu_k^i \neq 0$, то в силу утверждения теоремы 1 неизвестная функция $u(x)$ однозначно определяется через функцию $v(x)$ по формуле (9).

Пусть наоборот – функция $v(x)$ является решением задачи (10). Покажем, что функция $u(x)$, определяемая по формуле (9), удовлетворяет всем условиям задачи (1), (2).

Действительно, если $f(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}), g_j(x) \in C^{l+\lambda-j}(\partial\Omega), j = 0,1,\ldots,m-1$, то будем иметь $v(x) \in C^{2l}(\Omega) \cap C^{l+\lambda}(\bar{\Omega})$. Отсюда получим $u(x) \in C^{2l}(\Omega) \cap C^{l+\lambda}(\bar{\Omega})$. Поэтому, согласно лемме 2, имеем в Ω равенство

$$(-\Delta)^l u(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q (-\Delta)^l v(S^q x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q I_{S^q} (-\Delta)^l v(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q I_{S^q} f(x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q f(S^q x).$$

Будем считать индексы коэффициентов c_q по модулю m. Тогда, если считать $c_{-1} = c_{m-1}$, то, поскольку $S^m = E$, получаем

$$I_S(-\Delta)^m u(x) = (-\Delta)^m u(Sx) = \sum_{q=0}^{m-1} c_q f(S^{q+1}x) = \sum_{q=0}^{m-2} c_q f(S^{q+1}x) + c_{m-1} f(x) =$$

$$= c_{-1} f(x) + \sum_{q=1}^{m-1} c_{q-1} f(S^q x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-1} f(S^q x).$$

Аналогично если считать $c_{-2} = c_{m-2}$, то найдем

$$(-\Delta)^m u(S^2 x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-1} f(S^{q+1}x) = \sum_{q=0}^{m-2} c_{q-1} f(S^{q+1}x) + c_{m-2} f(x) =$$

$$= c_{-2} f(x) + \sum_{q=1}^{m-1} c_{q-2} f(S^q x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-2} f(S^q x).$$

Продолжая этот процесс, считая $c_{-p} = c_{m-p}$, получим

$$(-\Delta)^m u(S^p x) = \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-p} f(S^q x),$$

где $p = 0,\ldots,m-1$. Учитывая полученные равенства, запишем

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p (-\Delta)^l u(S^p x) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \sum_{q=0}^{m-1} c_{q-p} f(S^q x) = \sum_{q=0}^{m-1} f(S^q x) \sum_{p=0}^{m-1} a_p c_{q-p}\ .$$

Вспоминая значения c_p из (5) и $\sigma_{\mu_k}(A)$ из (4) вычислим

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p c_{q-p} = \frac{1}{m} \sum_{p=0}^{m-1} a_p \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{\mu}_k^{q-p}}{\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{\mu}_k^{q}}{\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)} \sum_{p=0}^{m-1} a_p \mu_k^p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{\mu}_k^{q} \sigma_{\bar{\mu}_k}(A)}{\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\mu}_k^q\ .$$

Учитывая, что $\forall k\ \exists s \in \{0,\ldots,m-1\}\ \ \bar{\mu}_k^q = e^{-(2\pi i \frac{q}{m})s}$, будем иметь

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p c_{q-p} = \begin{cases} 1, & q = 0 \bmod(m) \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{11}$$

и значит уравнение (1) удовлетворяется

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p (-\Delta)^m u(S^p x) = f(x)\,.$$

Проверим граничные условия задачи (2). При $x \in \partial\Omega$ имеем

$$h_k(x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j g_k(S^j x),\ k = 0,1,\ldots,m-1,$$

откуда, считая индексы коэффициентов a_j по модулю m ($a_{-1} = a_{m-1}$), запишем

$$h_k(Sx) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j g_k(S^{j+1}x) = \sum_{j=0}^{m-2} a_j g_k(S^{j+1}x) + a_{m-1} g_k(x) =$$

$$= a_{-1} g_k(x) + \sum_{j=1}^{m-1} a_{j-1} g_k(S^j x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j-1} g_k(S^j x)$$

и аналогично по индукции будем иметь

$$h_k(S^p x) = I_S h_k(S^{p-1}x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j-p+1} g_k(S^{j+1}x) = \sum_{j=0}^{m-2} a_{j-p+1} g_k(S^{j+1}x) + a_{m-p} g_k(x) = a_{-p} g_k(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-1} a_{j-p} g_k(S^j x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j-p} g_k(S^j x)\,.$$

Поэтому в силу леммы 4

$$\left.\frac{\partial^k u(x)}{\partial \nu^k}\right|_{\partial\Omega} = \sum_{p=0}^{m-1} c_p \left.\frac{\partial^k v(S^p x)}{\partial \nu^k}\right|_{\partial\Omega} = \sum_{p=0}^{m-1} c_p h_k(S^p x) = \sum_{p=0}^{m-1} c_p \sum_{j=0}^{m-1} a_{j-p} g_k(S^j x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} g_k(S^j x) \sum_{p=0}^{m-1} a_{j-p} c_p\ .$$

Учитывая равенство (11) и соглашение $a_{q+m}=a_q, c_{q-m}=c_q$, найдем

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_{j-p}c_p=\sum_{p=0}^{j} a_{j-p}c_p+\sum_{p=j+1}^{m-1} a_{j-p+m}c_{p-m}=\sum_{q=0}^{j} a_q c_{j-q}+\sum_{q=j+1}^{m-1} a_q c_{j-q}=\sum_{q=0}^{m-1} a_q c_{j-q}=\begin{cases}1, & j=0\\ 0, & j\neq q\end{cases}.$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial^k u(x)}{\partial\nu^k}\right|_{\partial\Omega}=\sum_{j=0}^{m-1} g_k(S^j x)\sum_{p=0}^{m-1} a_{j-p}c_p=g_k(x),\, k=0,1,\ldots,m-1,$$

и значит, граничные условия (2) для функции $u(x)$ выполнены. Теорема доказана.

Далее, обозначим через $G(x,y)$ функцию Грина задачи Дирихле (10). Отметим, что явный вид функции Грина $G(x,y)$ для шара построен различными способами в работах [14–16]. Например, в работе [14] показано, что функция $G(x,y)$ имеет вид

$$G(x,y)=K_{m,n}\,|x-y|^{2m-n}\int_1^{g(x,y)}(t^2-1)^{m-1}t^{1-n}dt,$$

где

$$g(x,y)=\frac{1}{|x-y|}\left|y|x|-\frac{x}{|x|}\right|,\ K_{m,n}=\frac{1}{\omega_n\left((2m-2)!\right)^2}.$$

Теорема 3. Пусть $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{m-1}$ – различные корни степени m из единицы и $\sigma_{\bar{\mu}_k}(A)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i\mu_k^i\neq 0$, $f(x)\in C^\lambda(\bar{\Omega})$ и $g_j(x)=0, j=0,1,\ldots,m-1$. Тогда решение задачи (1), (2) представляется в виде $u(x)=\int_\Omega G_S(x,y)f(y)dy$, где $G_S(x,y)=\sum_{q=0}^{m-1} c_q G(S^q x,y)$, а коэффициенты c_q при $q=1,\ldots,l$ находятся из (5).

Доказательство. Как известно, решение задачи Дирихле (10) в случае $g_j(x)=0, j=0,1,\ldots,m-1$ представляется в виде $v(x)=\int_\Omega G(x,y)f(y)dy$. Поэтому

$$v(S^q x)=\int_\Omega G(S^q x,y)\,f(y)\,dy,\, q=0,1,\ldots,m-1.$$

Далее, на основании теоремы 2, подставляя это значение $v(S^q x)$ в равенство (9) для решения $u(x)$ задачи (1), (2) получим искомое представление. Теорема доказана.

Исследование выполнено при поддержке грантового финансирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан в рамках научного проекта № AP08855810 и финансовой поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Литература

1. Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1995. –301 с.

2. Андреев, А.А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом / А.А. Андреев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1126–1128.

3. Ashyralyev, A. Well-posedness of a parabolic equation with involution / A. Ashyralyev, A.M. Sarsenbi // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – Vol. 38, no. 10, pp. 1295–1304.

4. Ashyralyev, A. Well-posedness of an elliptic equation with involution / A. Ashyralyev, A.M. Sarsenbi // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – № 284. – С. 1–8.

5. Karachik, V.V. On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation / V.V. Karachik, A.M. Sarsenbi, B.Kh. Turmetov // Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43, no. 3. – P. 1604–1625.

6. Kirane, M. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation / M. Kirane, N. Al-Salti // Journal of Nonlinear Sciences and Applications. – 2016. – Vol. 9, Iss. 3. – P. 1243–1251.

7. Skubachevskii, A.L. Nonclassical boundary value problems. I / A.L. Skubachevskii // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – Vol. 155, Iss. 2. – P. 199–334.

8. Skubachevskii, A.L. Nonclassical boundary-value problems. II / A.L. Skubachevskii // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 166, Iss. 4. – P. 377–561.

9. Przeworska-Rolewicz, D. Some boundary value problems with transformed argument / D. Przeworska-Rolewicz // Commentationes Mathematicae. – 1974. – Vol. 17, no. 2. – P. 451–457.

10. Karachik, V.V. On solvability of some Neumann-type boundary value problems for biharmonic equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // Electronic Journal of Differential Equations. – 2017. – № 218. – P. 1–17.

11. Sadybekov, M.A. On boundary value problems of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball / M.A. Sadybekov, A.A. Dukenbayeva // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2020. – P. 1–15.

12. Karachik, V.V. On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // Mathematica Slovaca. – 2020. – Vol. 70, Iss. 2. – P. 329–342.

13. Karachik, V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 50, no. 1. – P. 67–88.

14. Gazzola, F. Polyharmonic Boundary Value Problems / F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, S. Guido. – Berlin: Springer Verlag, 2010. – 423 p.

15. Kalmenov, T.Sh. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere / T.Sh. Kalmenov, B.D. Koshanov, M.Y. Nemchenko // Complex variables and Elliptic equations. – 2008. – Vol. 53, Iss. 2. – P. 177–183.

16. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.

Поступила в редакцию 23 февраля 2021 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 37–45

DOI: 10.14529/mmph210206

ON A DIRICHLET PROBLEM FOR A NONLOCAL POLYHARMONIC EQUATION

B.Kh. Turmetov[1], V.V. Karachik[2]
[1] Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan;
E-mail: batirkhan.turmetov@iktu.kz
[2] South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: karachik@susu.ru

The paper studies the solvability conditions for one class of boundary value problems for a nonlocal polyharmonic equation in the unit ball with Dirichlet conditions on the boundary generated by a certain orthogonal matrix. The existence and uniqueness of the solution to the posed Dirichlet problem are investigated and the Green's function is constructed.

First, some auxiliary statements are established: the inversability of the Vandermonde matrix of the m^{th} roots of unity is investigated, then the eigenvectors and eigenvalues of the auxiliary matrix generated by the coefficients of the nonlocal operator of the problem are found, and then the inverse matrix to it is obtained. To prove the uniqueness of the solution to the problem, the commutativity of the boundary operators and the nonlocal operator of the problem is established, and it is shown that if a solution to the problem exists, then this solution is a polyharmonic function. Then the conditions for the uniqueness of the solution to the problem under consideration are obtained. Further, on the basis of the auxiliary statements obtained above, conditions for the existence of a solution to the nonlocal problem are found. The solution to this problem is written out through the solution of auxiliary Dirichlet problems for the polyharmonic equation in the unit ball. Finally, using the well-known Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in the unit ball, the Green's function of the original nonlocal problem is constructed.

Keywords: nonlocal operator; Dirichlet problem; polyharmonic equation; solvability conditions; Green's function.

References

1. Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* (Equations of Mathematical Biology). Moscow, Vyssh. Shk. Publ., 1995, 301 p. (in Russ.).

2. Andreev A.A. Analogs of Classical Boundary Value Problems for a Second-Order Differential Equation with Deviating Argument. *Differential Equations*, 2004, Vol. 40, no. 8, pp. 1192–1194. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f

3. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2017, Vol. 38, no. 10, pp. 1295–1304. DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997

4. Ashyralyev A., Sarsenbi A. Well-Posedness of an elliptic Equation with Involution. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, no. 284, pp. 1–8.

5. Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.Kh. On the Solvability of the Main Boundary Value Problems for a Nonlocal Poisson Equation. *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, Vol. 43, no. 3, pp. 1604–1625. DOI: 10.3906/mat-1901-71

6. Kirane M, Al-Salti N. Inverse Problems for a Nonlocal Wave Equation with an Involution Perturbation. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2016; Vol. 9, Iss. 3, pp. 1243–1251. DOI: 10.22436/jnsa.009.03.49

7. Skubachevskii A.L. Nonclassical Boundary Value Problems. I. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, Vol. 155, Iss. 2, pp. 199–334. DOI: 10.1007/s10958-008-9218-9

8. Skubachevskii A.L. Nonclassical Boundary-Value Problems. II. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, Vol. 166, Iss. 4, pp. 377–561. DOI: 10.1007/s10958-010-9873-5

9. Przeworska-Rolewicz D. Some Boundary Value Problems with Transformed Argument. *Commentationes Mathematicae*, 1974, Vol. 17, no. 2, pp. 451–457. DOI: 10.14708/cm.v17i2.5790

10. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Solvability of some Neumann-Type Boundary Value Problems for Biharmonic Equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2017, no. 218, pp. 1–17.

11. Sadybekov M.A., Dukenbayeva A.A. On Boundary Value Problems of the Samarskii-Ionkin Type for the Laplace Operator in a Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2020, pp. 1–15. DOI: 10.1080/17476933.2020.1828377

12. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Solvability of Some Nonlocal Boundary Value Problems for Biharmonic Equation. *Mathematica Slovaca*, 2020, Vol. 70, Iss. 2, pp. 329–342. DOI: 10.1515/ms-2017-0355

13. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one Nonlocal Dirichlet Problem for the Poisson Equation. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 2020, Vol. 50, no. 1, pp. 67–88. DOI: 10.30755/NSJOM.08942

14. Gazzola F., Grunau H.-Ch., Guido S. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Berlin, Springer Verlag, 2010, 423 p. DOI: 10.1007/978-3-642-12245-3

15. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green Function Representation for the Dirichlet Problem of the Polyharmonic Equation in a Sphere. *Complex variables and Elliptic equations*, 2008, Vol. 53, Iss. 2, pp. 177–183. DOI: 10.1080/17476930701671726

16. Karachik V.V. Polynomial Solutions to Dirihlet Boundary Value Problem for the 3-Harmonic Equation in a Ball. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2012, Vol. 5, no. 4, pp. 527–546. (in Russ.).

Received February 23, 2021