УДК 517.928 DOI: 10.14529/mmph210207

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДВУХЗОННОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Д.А. Турсунов, Г.А. Омаралиева
Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Респу́блика
E-mail: dtursunov@oshsu.kg

Исследуется асимптотическое поведение решения двухточечной краевой задачи на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Существенные особенности задачи – присутствие малого параметра перед производной второго порядка от искомой функции, существование двухслойного пограничного слоя на левом конце отрезка при $x = 0$ и негладкость решения соответствующей невозмущенной краевой задачи. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения двухзонной двухточечной краевой задачи на единичном отрезке с любой степенью точности при стремлении малого параметра к нулю. Из-за второй и третьей особенности задачи так легко невозможно построить асимптотическое разложение решения по малому параметру известными асимптотическими методами. При решении поставленной задачи нами используются: методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, метод малого параметра, классический метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций и принцип максимума. Задача решается в два этапа: на первом этапе строится формальное разложение решения двухточечной краевой задачи, а на втором этапе приводится обоснование этого разложения, т. е. оценивается остаточный член разложения. На первом этапе формальное асимптотическое решение ищется в виде суммы трех решений: гладкое внешнее решение на всем отрезке; классическое погранслойное решений в окрестности $x = 0$, которое экспоненциально убывает вне погранслоя и промежуточное погранслойное решение при $x = 0$, которое степенным характером убывает вне погранслоя. Построенное асимптотическое разложение решения двухточечной краевой задачи является асимптотическим в смысле Эрдей.

Ключевые слова: асимптотическое решение; малый параметр; двухзонная задача; бисингулярная задача; двух точечная краевая задача; обыкновенное дифференциальное уравнение с малым параметром.

Введение. Как нам известно, математическими моделями многих задач науки и техники являются обыкновенные дифференциальные уравнения с малыми параметрами при старшей производной [1–3]. Например, тесно связанные между собой два процесса можно описать с помощью обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon y''_{\varepsilon}(x) + p(x)y'_{\varepsilon}(x) + q(x)y_{\varepsilon}(x) = f(x),\ x \in (0,1).$$

Первый процесс – распределение тепла в движущейся среде, зависящее только от x и не зависящее от времени. Здесь ε описывает малую теплопроводность, а функция $p(x)$ – скорость среды. Второй процесс – случайное блуждание частицы на рассматриваемом промежутке, здесь $p(x)$ – средняя скорость движения, малая дисперсия обозначена через ε [3].

Проведенные исследования и увеличение числа публикаций по теории возмущений доказывают, что дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной или сингулярно (бисингулярно) возмущенные дифференциальные уравнения составляют самостоятельную область математики, так как они представляют большой прикладной интерес, [1–12].

Постановка задачи. Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу

$$\varepsilon^4 y''_{\varepsilon}(x) + x^2 p(x)y'_{\varepsilon}(x) - \varepsilon q(x)y_{\varepsilon}(x) = f(x),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y_{\varepsilon}(0) = a,\ y_{\varepsilon}(1) = b, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon\ll 1,\ a,b$ – известные постоянные, $0<p(x), 0<q(x), f(x)$ – бесконечно дифференцируемые известные функции при $x\in[0,1]$, $0<p(0)=p_0, 0<q(0)=q_0$, а $y'_\varepsilon(x)$ – искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Нам известно, что при $\varepsilon>0$ существует единственное решение двухточечной краевой задачи [3, с. 116]. От нас требуется построить полное асимптотическое приближение решения двухточечной краевой задачи с любой степенью точности при малом ε, т. е. когда $\varepsilon\to 0$.

Особенности задачи. Уравнение (1) называется возмущенным, так как в нём присутствует малый параметр ε. Для начала определим особенности возмущенной задачи (1), (2).

Соответствующее невозмущенное уравнение (ε = 0):

$$x^2 p(x)\tilde{y}'(x)=f(x),\ x\in(0,1)$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, поэтому в общем случае решение этого уравнения не может удовлетворить двум краевым условиям (2), т.е. возмущение является сингулярным – первая особенность.

Попробуем построить внешнее асимптотическое решение двухточечной краевой задачи (1), (2), которое будем искать в виде степенного ряда по малому параметру, т. е. в следующем виде:

$$Z_\varepsilon(x)=z_0(x)+\varepsilon z_1(x)+\varepsilon^2 z_2(x)+\ldots+\varepsilon^n z_n(x)+\ldots \tag{3}$$

Подставляя (3) в двухточечную краевую задачу (1) и (2), имеем:

$$\varepsilon^4\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z''_k(x)+x^2p(x)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z'_k(x)-\varepsilon q(x)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(x)=f(x),\ x\in(0,1),$$

$$z_0(1)+\varepsilon z_1(1)+\varepsilon^2 z_2(1)+\ldots+\varepsilon^n z_n(1)+\ldots=b$$

или, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$z''_{k-4}(x)+x^2p(x)z'_k(x)-q(x)z_{k-1}(x)=f(x),\ x\in(0,1),\ k\in N_0=\{0,1,2,\ldots\},$$

$$z_0(1)=0,\ z_k(1)=0,\ k\in N,$$

где $z_s(x)\equiv 0,\ s<0.$

При k = 0 имеем: $x^2p(x)z'_0(x)=f(x),\ x\in(0,1),\ z_0(1)=b$,

интегрируя, получаем: $z_0(x)=\int\limits_1^x\frac{f(s)}{s^2p(s)}ds+b\Rightarrow z_0(x)=O\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to 0;$

при k = 1 имеем: $x^2p(x)z'_1(x)=q(x)z_0(x),\ x\in(0,1),\ z_1(1)=0$,

интегрируя, получаем: $z_1(x)=\int\limits_1^x\frac{q(s)z_0(s)}{s^2p(s)}ds\Rightarrow z_1(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to 0.$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$z_n(x)=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),\ x\to 0.$$

Поэтому ряд (3) представим в виде:

$$Z_\varepsilon(x)=\frac{1}{x}\tilde{z}_0(x)+\frac{1}{x}\frac{\varepsilon}{x}\tilde{z}_1(x)+\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2\tilde{z}_2(x)+\ldots+\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^n\tilde{z}_n(x)+\ldots, \tag{4}$$

где $\tilde{z}_0(1)=b, \tilde{z}_k(1)=0, k\in N,\ \tilde{z}_m\in C^\infty(0,1),\ m\in N_0.$

Заметим, что с ростом номера n растет и особенность в точке x = 0. Ряд (4) теряет свойство асимптотического ряда, когда $x\in(0,\varepsilon]$. Эта особенность является второй.

Таким образом, рассматриваемая задача является бисингулярной [3].

Еще одна дополнительная особенность заключается в том, что в окрестности особой точки x = 0 существуют две погранслойные функции: одна из них экспоненциально убывает вне пограничного слоя, а вторая степенным образом убывает вне пограничного слоя.

Основной результат. Асимптотическое приближенное решение двухточечной краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y_\varepsilon(x)=V_\varepsilon(x)+W_\varepsilon(t)+\Pi_\mu(\tau), \tag{5}$$

где $V_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x),\ W_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t),\ \Pi_\mu(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(\tau),\quad x=\varepsilon t,\ x=\mu^3\tau,\ \sqrt{\varepsilon}=\mu$.

Формально подставляя (5) в (1), имеем:

$$\varepsilon^4 V''_\varepsilon(x)+x^2p(x)V'_\varepsilon(x)-\varepsilon q(x)V_\varepsilon(x)=f(x)-H_\varepsilon(x),\ x\in(0,1), \tag{6}$$

$$\varepsilon W''_\varepsilon(t)+t^2p(\varepsilon t)W'_\varepsilon(t)-q(\varepsilon t)W_\varepsilon(t)=H_\varepsilon(x),\ t\in(0,\varepsilon^{-1}), \tag{7}$$

$$\Pi''_\mu(\tau)+\mu\tau^2p(\mu^3\tau)\Pi'_\mu(\tau)-q(\mu^3\tau)\Pi_\mu(\tau)=0,\ \tau\in(0,\mu^{-3}), \tag{8}$$

где $H_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(h_{k,0}+h_{k,1}x),\ \ h_{k,0},\ h_{k,1}$ – пока неизвестные постоянные.

Подставляя (5) в граничные условия (2), получаем:

$$a=V_\varepsilon(0)+W_\varepsilon(0)+\Pi_\mu(0),\qquad b=V_\varepsilon(1)+W_\varepsilon(\varepsilon^{-1})+\Pi_\mu(\mu^{-3}),$$

отсюда запишем

$$V_\varepsilon(1)=b, \tag{9}$$

$$W_\varepsilon(\varepsilon^{-1})=0, \tag{10}$$

$$\Pi_\mu(0)=a-V_{\mu^2}(0)-W_{\mu^2}(0),\qquad \Pi_\mu(\mu^{-3})\to 0,\ \mu\to 0. \tag{11}$$

Из (6) и (9) при $k=0$ имеем:

$$x^2p(x)v'_0(x)=f(x)-(h_{0,0}+h_{0,1}x),\ x\in(0,1),\ v_0(1)=b,$$

интегрируя, получаем: $v_0(x)=\int_1^x\frac{f(s)-(h_{0,0}+h_{0,1}s)}{s^2p(s)}ds+b$.

По условию задачи $f\in C^\infty[0,1]\Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Если $h_{0,0}=f(0),\ h_{0,1}=f'(0)$, то $v_0\in C^\infty[0,1]$.

Из (6) и (9) при $k=1$ имеем:

$$x^2p(x)v'_1(x)=q(x)v_0(x)-(h_{1,0}+h_{1,1}x),\ x\in(0,1),\ v_1(1)=0,$$

интегрируя, получаем: $v_1(x)=\int_1^x\frac{q(s)v_0(s)-(h_{1,0}+h_{1,1}s)}{s^2p(s)}ds$.

Пусть $h_{1,0}=q(0)v_0(0),\ h_{1,1}=\left(q'(x)v_0(x)+q(x)v'_0(x)\right)\big|_{x=0}$, тогда $v_1\in C^\infty[0,1]$.

Аналогично определяя $v_k(x),\ k=2,3,...$ из соотношения

$$v''_{k-4}(x)+x^2p(x)v'_k(x)-q(x)v_{k-1}(x)=-(h_{k,0}+h_{1,1}x),\ x\in(0,1),$$

получаем

$$v_k(x)=\int_1^x\frac{q(s)v_{k-1}(s)-v''_{k-4}(s)-(h_{k,0}+h_{k,1}s)}{s^2p(s)}ds\ ,$$

и здесь выбираем $h_{k,0},\ h_{k,1},\ k=2,3,...$ так чтобы $v_k\in C^\infty[0,1],\ k=2,3,...$, т.е.

$$h_{k,0}=q(0)v_{k-1}(0)-v''_{k-4}(0),\qquad h_{k,1}=q'(0)v_{k-1}(0)+q(0)v'_{k-1}(0)-v'''_{k-4}(0).$$

Уравнение (7) запишем в виде

$$t^2p(\varepsilon t)w'_k(t)-q(\varepsilon t)w_k(t)=h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon t-w''_{k-1}(t),\ t\in(0,\varepsilon^{-1}).$$

Учитывая условие (10), при $k=0$ имеем

$$w'_0(t)-\frac{q(\varepsilon t)}{t^2p(\varepsilon t)}w_0(t)=\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon t}{t^2p(\varepsilon t)},\ t\in(0,\varepsilon^{-1}),\ w_0(\varepsilon^{-1})=0,$$

интегрируя это уравнение, получаем:

$$w_0(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi.$$

Докажем, что $w_0(t)$ ограничена при $t\to 0$.

$$w_0(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi=-e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{q(\varepsilon\varphi)}d\left(e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\right)=$$

$$=-\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon t}{q(\varepsilon t)}+e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\frac{h_{0,0}+h_{0,1}}{q(1)}+e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\left(\frac{h_{0,0}+h_{0,1}\varepsilon\varphi}{q(\varepsilon\varphi)}\right)'e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi,$$

$$w_0(0)=-\frac{h_{0,0}}{q(0)}\ \text{ и }\ w_0(\varepsilon^{-1})=0,\ \text{ а также }\ w_0\in C^{\infty}[0,\varepsilon^{-1}].$$

При $k\in N$ имеем:

$$w'_k(t)-\frac{q(\varepsilon t)}{t^2p(\varepsilon t)}w_k(t)=\frac{h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon t-w''_{k-1}(t)}{t^2p(\varepsilon t)},\ \ t\in(0,\varepsilon^{-1}),\ \ w_k(\varepsilon^{-1})=0,$$

интегрируя дифференциальное уравнение первого порядка с краевым условием, получаем:

$$w_k(t)=e^{\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}\int_{\varepsilon^{-1}}^{t}\frac{h_{k,0}+h_{k,1}\varepsilon\varphi-w''_{k-1}(\varphi)}{\varphi^2p(\varepsilon\varphi)}e^{-\int_{\varepsilon^{-1}}^{\varphi}\frac{q(\varepsilon s)}{s^2p(\varepsilon s)}ds}d\varphi,\ \ k\in N.$$

Отсюда следует, что $w_k(0)=-\dfrac{h_{k,0}-w''_{k-1}(0)}{q(0)}$, $w_k(\varepsilon^{-1})=0$ и $w_k\in C^{\infty}[0,\varepsilon^{-1}]$.

Рассмотрим теперь задачу (8), (11). Задачу (8), (11) запишем в виде

$$\pi''_0(\tau)-q_0\pi_0(\tau)=0,\ \ \tau\in(0,\mu^{-3}), \tag{12}$$

$$\pi''_k(\tau)-q_0\pi_k(\tau)=\Phi_k(\tau,\mu^3\tau,\pi_{k-1},\pi'_{k-1},...,\pi_0,\pi'_0),\ \ \tau\in(0,\mu^{-3}),k\in N, \tag{13}$$

$$\pi_0(0)=a-v_0(0)-w_0(0),\qquad \pi_0(\mu^{-3})\to 0,\ \mu\to 0, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\pi_{2k}(0)=-v_k(0)-w_k(0), && \pi_{2k}(\mu^{-3})\to 0,\ \mu\to 0,\ k\in N,\\ &\pi_{2k-1}(0)=0, && \pi_{2k-1}(\mu^{-3})\to 0,\ \mu\to 0,\ k\in N,\end{aligned} \tag{15}$$

где функция $\Phi_k(\tau,\mu^3\tau,\pi_{k-1},\pi'_{k-1},...,\pi_0,\pi'_0)$ линейно зависит от переменных $\pi_{k-1},\pi'_{k-1},...,\pi_0,\pi'_0$ и полиномиально зависит от τ *и* $\mu^3\tau$.

Решение задачи (12), (14) представимо в виде

$$\pi_0(\tau)=(a-v_0(0)-w_0(0))\mathrm{e}^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

Решения задач (13), (15) тоже существуют, единственны и экспоненциально убывают при $\tau\to\infty$, ($\mu\to 0$):

$$\pi_{2k}(\tau)=-(v_k(0)+w_k(0))\mathrm{e}^{-\sqrt{q_0}\,\tau}+P_k(\tau,\mu\tau)\mathrm{e}^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

$$\pi_{2k-1}(\tau)=P_{2k-1}(\tau,\mu\tau)\mathrm{e}^{-\sqrt{q_0}\,\tau},$$

где $P_s(\tau,\mu\tau)$ – полиномы, при $\tau=0$: $P_s(0,0)\equiv 0$.

Таким образом, полностью определены функции $V_\varepsilon(x), W_\varepsilon(t), \Pi_\mu(\tau)$. Оценим остаточный член асимптотического приближения (5). Пусть

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k w_k(t)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(\tau)+R_{n,\varepsilon}(x), \tag{16}$$

тогда подставляя (16) в задачу (1)–(2), получаем

$$\varepsilon^4 R''_{n,\varepsilon}(x) + x^2 p(x) R'_{n,\varepsilon}(x) - \varepsilon q(x) R_{n,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{n+1/2}\Psi,\ x \in (0,1), \quad (1)$$

$$R_{n,\varepsilon}(0) = 0,\ R_{n,\varepsilon}(1) = O(e^{-\sqrt{q(0)}/\mu^3}),\ \mu \to 0 \quad (2)$$

где $R_{n,\varepsilon}(x)$ – остаточный член ряда,

$$\Psi = \mu q(x) v_n(x) + \mu v''_{n-3}(x) + \mu^3 v''_{n-2}(x) + \mu^5 v''_{n-1}(x) + \mu^7 v''_n(x) + \mu w''_n(t) +$$

$$+\Phi_{2n+1}(\tau, \mu^3\tau, \pi_{2n}, \pi'_{2n}, ..., \pi_0, \pi'_0).$$

Для задачи (1)–(2), применяя теорему 26.2 [3, с. 116], получаем оценку для остаточного члена:

$$|R_{n,\varepsilon}(x)| \le \varepsilon^{n-1/2} c,\ 0 < c - \text{const}.$$

Вывод. Нами построено полное асимптотическое приближение решения по малому параметру двухточечной краевой задачи на отрезке для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Исследованная задача отличается от ранее исследованных задач тем, что в окрестности левой граничной точки $x = 0$ существует двухслойный пограничный слой, также решение соответствующей невозмущенной задачи не является гладкой функцией. Поэтому одним классическим методом пограничных функций невозможно решить задачу. Сначала формальное асимптотическое приближение исследуемой задачи построили обобщенным и классическим методами пограничных функций, затем с помощью принципа максимума получили оценку для остаточной функции построенного ряда. Полученный ряд является асимптотическим в смысле Эрдей.

Литература

1. Chen, H. Discussion on the applicability of static asymptotic solutions in dynamic fracture / H. Chen, G. Zou // Journal of Harbin Engineering University. – 2020. – Vol. 41, no. 6. – P. 824–831.
2. Yang R., Yang X.-G. Asymptotic stability of 3D Navier–Stokes equations with damping / R. Yang, X.-G. Yang // Applied Mathematics Letters. – 2021. – Vol. 116. – P. 107012.
3. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – Москва: Физматлит, 2009. – 248 с.
4. Никишкин, В.А. Об асимптотике решения задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка в слое / В.А. Никишкин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 8. – С. 1249–1255.
5. Lian, W. A class of fourth order nonlinear boundary value problem with singular perturbation / W. Lian, Z. Bai // Applied Mathematics Letters. – 2021. – Vol. 115. – P. 106965
6. Benameur, J. Asymptotic behavior of critical dissipative quasi-geostrophic equation in Fourier space / J. Benameur, S.B. Abdallah // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2021. – Vol. 497, no 1. – P. 124873
7. Rehak P. Asymptotics of perturbed discrete Euler equations in the critical case / P. Rehak // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2021. – Vol. 496, no. 2. – P. 124825
8. Liu, L.-B. An efficient adaptive grid method for a system of singularly perturbed convection-diffusion problems with Robin boundary conditions / L.-B. Liu, Y. Liang, X. Bao, H. Fang // Advances in Difference Equations. – 2021. – Vol. 2021, no. 1. – Article number: 6 (2021).
9. Lian, W. A class of fourth order nonlinear boundary value problem with singular perturbation / W. Lian, Z. Bai // Applied Mathematics Letters. – 2021. – Vol. 115. – P. 106965.
10. Турсунов, Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем / Д.А. Турсунов // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 3. – С. 70–78.
11. Tursunov, D.A. The Asymptotic Solution of the Three-Band Bisingularly Problem / D.A. Tursunov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, no. 3. – P. 542–546.
12. Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques / A.H. Nayfeh. – A Wiley-Interscience Publication. New York etc.: John Wiley & Sons. – 519 p.

Поступила в редакцию 4 февраля 2021 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 2, pp. 46–52

DOI: 10.14529/mmph210207

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO A TWO-BAND TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM

D.A. Tursunov, G.A. Omaralieva
Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic
E-mail: dtursunov@oshsu.kg

The article investigates the asymptotic behavior of the solution of a two-point boundary value problem on an interval for a linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order with a small parameter at the highest derivative. The essential features of the problem are the presence of a small parameter in front of the second-order derivative of the desired function, the existence of a two-dimensional boundary layer at the left end of the segment at $x = 0$, and the non-smoothness of the solution to the corresponding unperturbed boundary value problem. It is required to construct a uniform asymptotic expansion of the solution to a two-zone two-point boundary value problem on a unit interval, with any degree of accuracy, as the small parameter tends to zero. Due to the second and third features of the problem, it is not easy to construct an asymptotic solution expansion with respect to the small parameter using the known asymptotic methods. When solving the problem, the following methods are used: methods of integration of ordinary differential equations; the method of a small parameter; the classical method of boundary functions; and the generalized method of boundary functions and the maximum principle. The problem is solved in two stages: in the first stage, a formal expansion of the solution to the two-point boundary value problem is constructed, and in the second stage, the justification of this expansion is given, i.e. the remainder term of the expansion is estimated. In the first stage, a formal asymptotic solution is sought in the form of the sum of three solutions: a smooth outer solution on the entire segment; classical boundary layer solution in the vicinity of $x = 0$, which exponentially decreases outside the boundary layer; and an intermediate boundary layer solution at $x = 0$, which decreases in power mode outside the boundary layer. The constructed asymptotic expansion of the solution to the two-point boundary value problem is asymptotic in the sense of Erdei.

Keywords: asymptotic solution; small parameter, two-band problem; bisingular problem; two-point boundary value problem; ordinary differential equation with a small parameter.

References

1. Chen H., Zou G. Discussion on the Applicability of Static Asymptotic Solutions in Dynamic Fracture. *Journal of Harbin Engineering University*, 2020, Vol. 41, no. 6, pp. 824–831. DOI: 10.11990/jheu.201903081

2. Yang R., Yang X.-G. Asymptotic Stability of 3D Navier–Stokes Equations with Damping. *Applied Mathematics Letters*, 2021, Vol. 116, p. 107012. DOI: 10.1016/j.aml.2020.107012

3. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic Methods in Analysis). Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. (in Russ.).

4. Nikishkin V.A. On the Asymptotics of the Solution of the Dirichlet Problem for a Fourth-Order Equation in a Layer. *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 2014, Vol. 54, no. 8, pp. 1214–1220. DOI: 10.1134/S0965542514080107

5. Lian W., Bai Z. A Class of Fourth Order Nonlinear Boundary Value Problem with Singular Perturbation. *Applied Mathematics Letters*, 2021, Vol. 115, p. 106965. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106965

6. Benameur J., Abdallah S.B. Asymptotic Behavior of Critical Dissipative Quasi-geostrophic Equation in Fourier Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 2021, Vol. 497, no. 1, p. 124873. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124873

7. Rehak P. Asymptotics of Perturbed Discrete Euler Equations in the Critical Case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2021, Vol. 496, no. 2, p. 124825. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124825

8. Liu L.-B., Liang Y., Bao X., Fang, H. An Efficient Adaptive Grid Method for a System of Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problems with Robin Boundary Conditions. *Advances in Difference Equations*, 2021, Vol. 2021, no. 1, Article number: 6 (2021). DOI: 10.1186/s13662-020-03166-y

9. Lian, W., Bai, Z. A Class of Fourth Order Nonlinear Boundary Value Problem with Singular Perturbation. *Applied Mathematics Letters*, 2021, Vol. 115, p. 106965. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106965

10. Tursunov D.A. Asymptotic Solution of Linear Bisingular Problems With Additional Boundary Layer. *Russian Mathematics,* 2018, Vol. 62, no. 3, pp. 60–67. DOI: 10.3103/S1066369X18030088

11. Tursunov D.A. The Asymptotic Solution of the Three-Band Bisingularly Problem. Lobachevskii *Journal of Mathematics*, 2017, Vol. 38, no. 3, pp. 542–546. DOI: 10.1134/S1995080217030258

12. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. A Wiley-Interscience Publication. New York etc.: John Wiley & Sons, 519 p.

Received February 4, 2021