УДК 519.217.4 DOI: 10.14529/mmph210303

ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ДИФФУЗИОННЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Г.Д. Кордюмов
Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: georgekord300@gmail.com

Статья посвящена диффузионным моделям. Рассматриваются теоретические и методологические основы диффузионных моделей финансовой математики. Как и экономическая система, современный мир стремительно развивается. Кажется невозможным предсказать, что произойдёт завтра, какое появление новых технологий окажет влияние на рынок и как изменение случайных факторов повлияет на продукт и рынок в целом. Диффузионные модели – один из основных методов исследования экономических объектов и процессов. Вот почему так важно разработать диффузионную модель.

Мы предлагаем расширение применимости моделей путем перехода от стохастических уравнений в форме Ито к уравнениям с так называемыми производными в среднем.

Для этого, следуя Э. Нельсону, вводим понятия производных в среднем справа и слева.

В уравнении с производным средним не участвует винеровский процесс, поэтому заранее не предполагается, что решение является диффузионным.

В статье дается описание некоторых известных диффузионных моделей, в которых переход от уравнений типа стохастического дифференциального уравнения в форме Ито к уравнениям, удовлетворяющим системе уравнений с производными в среднем, приводит к расширению множества возможных решений.

Также мы рассматриваем обобщение геометрического броуновского движения, которое удовлетворяет системе стохастических уравнений с производными в среднем и может покрывать более широкий класс задач.

Ключевые слова: диффузионные модели; модели в финансовой математике; уравнение Ито; производные в среднем; геометрическое броуновское движение; винеровский процесс.

Многие задачи диффузии решаются методами интегрального преобразования, например, методом операционного расчета. Существует несколько типов таких преобразований: преобразование Фурье, Лапласа, Ханкеля, Мейера, Конторовича-Лебедева, ряд других.

В ходе интегральных преобразований к каждому из членов дифференциального уравнения (а также к граничным условиям) применяется интегральное преобразование, в результате чего вместо уравнения и граничных условий по концентрациям создается уравнение и граничные условия получены относительно его образа.

Диффузионная модель развития процентных ставок в финансовой математике – это математическая модель, которая описывает динамику процентных ставок в форме стохастических дифференциальных уравнений диффузионного типа. Семейство моделей процентных ставок очень разнообразно, включая однофакторные модели (спотовые модели), многомерные модели и модели форвардных кривых [2].

Производные в среднем. Пусть $\xi(t)-$ стохастический процесс в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P), который является L_1-случайной величиной для всех $t \in [0,T] \subset R.$ Обозначим через N^{ξ}_t σ-подалгебру σ-алгебры F, порожденную прообразами борелевских множеств при отображении $\xi(t)$, а через E^{ξ}_t – условное математическое ожидание относительно N^{ξ}_t. Следуя Э. Нельсону, введем понятия производных в среднем справа и слева [5].

Определение 1. (i) Производная в среднем справа $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t это L_1-случайная величина вида

$$D\xi(t)=\lim_{\Delta t\to+0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right), \tag{1}$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ и $\Delta t \to +0$ означает, что $\Delta t \to 0$ и $\Delta t > 0$.

(ii) Производная в среднем слева $D\,\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t это L_1-случайная величина

$$D\,\xi(t) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^{\xi}\left(\frac{\xi(t)-\xi(t-\Delta t)}{\Delta t}\right), \tag{2}$$

где обозначения такие же, как в (i)[5] .

В уравнении с производным средним не участвует винеровский процесс, то есть мы можем покрыть более широкий класс решений.

Напомним, что процесс Ито – это процесс вида

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t \beta(s)ds+\int_0^t A(s)dw(s), \tag{3}$$

где первый интеграл в правой части – интеграл Лебега, а второй – интеграл Ито. Процесс Ито, называется диффузионным процессом, если $\beta(t)$ и $A(t)$ измеримы относительно N_t^{ξ} [4].

Теорема 1. Для диффузионного процесса $\xi(t)$ вида (3) $D\xi(t)$ существует и равно $\beta(t)$.

Утверждение Теоремы следует из того, что $\int_0^t A(s)dw(s)$ является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса.

Введем дифференциальный оператор D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = E_t^{\xi}\left(\frac{\left(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right)\left(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right)^*}{\Delta t}\right), \tag{4}$$

где $\left(\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right)$ – столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), строка (транспонированный или сопряженный вектор) и предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, F, P)$ [5].

Определение 2. D_2 называется квадратичной производной в среднем. D_2 принимает значения в полях симметрических неотрицательно определенных матриц [4].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито вида

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + A(t,\xi(t))dw(t). \tag{5}$$

Теорема 2. (i) Решение уравнения (5) удовлетворяет следующей системе уравнений с производными в среднем

$$D\xi(t) = a(t,\xi(t)),$$
$$D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)), \tag{6}$$

где $a(t,x)$ – векторное поле, а $\alpha(t,x)$ – поле симметрических матриц вида $A(t,x)A(t,x)^*$, где $A(t,x)^*$ – транспонированная матрица А [4].

(ii) если $\xi(t)$ – решение системы (6), в котором $a(t,x$ – векторное поле, а $\alpha(t,x)$ – поле неотрицательно определенных симметрических матриц, то могут существовать его решения, которые не являются решениями уравнение типа (5), т. е. $\xi(t)$ может принадлежать более широкому классу процессов, чем диффузионные.

Доказательство. Действительно, нетрудно видеть, что в уравнении (6), построенном по уравнению (5), снос $a(t,x)$ является правой частью в первом уравнении системы (6), а $\alpha(t,x) = A(t,x)A(t,x)^*$. Однако при переходе от (6) к уравнению типа (5) нахождение $A(t,x)$ по $\alpha(t,x)$ требует дополнительных предположений и, главное, в системе (6) не задействован винеровский процесс, т.е. $\xi(t)$ заведомо может не быть диффузионным и не удовлетворять никакому уравнению в форме Ито.

Перейдем к описанию некоторых известных диффузионных моделей, в которых переход от уравнений типа (5) к уравнениям типа (6) приводит к расширению множества возможных решений.

Однофакторная модель краткосрочных процентных ставок выглядит следующим образом:

$$dr = \mu\big(t,r(t)\big)dt + \sigma(t,r)dW_t \,,$$

где W_t – винеровский процес.

Простейшая модель, предложенная Мертоном в 1973 году, описывается уравнением:

$$dr = \mu dt + \sigma dW_t \,,$$

где μ и σ – константы [6]

Этот метод оценки стоимости свопа кредитного дефолта был разработан Робертом Мертоном в 1978 году. Метод Мертона основан на модели Блэка–Шоулза для расчета стоимости европейского опциона. Разница в том, что в методе Р. Мертона динамика стоимости капитализации компании следует геометрическому броуновскому движению:

$$dV = \mu V dt + \sigma_V V dW \qquad (7)$$

где V – суммарная стоимость активов фирмы; μ – ожидаемая доходность активов фирмы; σ_v – волатильность стоимости активов фирмы; W – винеровский процесс [2].

Модель Васичека, предложенная им в 1977 году, предполагает, что процентные ставки колеблются около определенного среднего уровня:

$$dr_t = \alpha\big(\beta - r_1\big)\Delta t + \sigma \in \sqrt{\Delta t}\,,$$

где $\sigma \in \sqrt{\Delta t}$ – винеровский процесс, β – средний уровень процентной ставки.

Эта модель была первой, которая учитывала тенденцию процентных ставок возвращаться к среднему значению (средняя инверсия): процентные ставки не могут расти бесконечно, потому что их высокий уровень ограничивает экономическую активность и после определенного предела ничего не достигает; с другой стороны, цены, конечно, снизу ограничены. Поэтому ставки должны быть в ограниченной зоне.

Недостатком модели Васичека является то, что она использует нормальное распределение для коэффициента дрейфа волатильности, которое теоретически допускает отрицательные ставки [3].

Следует отметить, что во всех перечисленных моделях, кроме (7), заранее не предполагается, что решение является диффузионным, и в этих случаях переход к системам типа (6) проводится достаточно просто и расширяет множество возможных решений. Для геометрического броуновского движения (7) это не так очевидно.

Рассмотрим следующее обобщение геометрического броуновского движения [1], которое также расширяет множество возможных решений, а именно, процесс $S(t)$, описываемый следующей системой стохастических дифференциальных уравнений

$$dS^a(t) = S^a\, a^\alpha\, \big(t;S^1(t),\ldots,S^n(t)\big)dt + S^a\, A^\alpha{}_\beta\big(t;S^1(t),\ldots,S^n(t)\big)dw^\beta \,, \qquad (8)$$

где w^β – независимые винеровские процессы в $\mathbb{R}^1$, образующие вместе винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, $a(t,x)$ – векторное поле на $\mathbb{R}^n$, $A(t,x)$ – отображение из $[0,T]$ x $\mathbb{R}^n$ в пространство линейных операторов $L\big(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\big)$, а $A^\alpha{}_\beta$ обозначает матрицу оператора A. Также отметим, что геометрическое броуновское движение (7) получается из (8) в случае, когда $a(t)$ и $A(t)$ зависят только от времени t (т. е. не зависят от точки $x \in \mathbb{R}^n$). В формуле (8) мы используем соглашение Эйнштейна о суммировании по одинаковым верхнему и нижнему индексам, т. е. в этом случае знак суммы не пишется.

Если координаты S^a решения (8) положительны при всех t, то по формуле Ито процесс

$$\xi(t) = \ln S(t) = \{\ln S^1(t), \ldots, \ln S^n(t)\}$$

удовлетворяет уравнению

$$d\xi(t) = \left(\alpha - \frac{1}{2} diag(AA^*)\right)(t, \xi(t))dt + A(t, \xi(t))dw(t), \tag{9}$$

где $diag(AA*)$ – вектор, составленный из диагональных элементов матрицы AA^* (A^* – транспонированная A). Также по формуле Ито, если процесс $\xi(t)$ удовлетворяет (9), то процесс

$$S(t) = \exp \xi(t) = \left(\exp \xi^1(t), \ldots, \exp \xi^n(t)\right)$$

удовлетворяет (8). Укажем, что в данной ситуации координаты S^a положительны [1].

Обозначим через B симметрическую положительно определенную матрицу AA (где A – транспонированная матрица A). Если процесс удовлетворяет уравнению (8), то он в свою очередь будет удовлетворять следующему уравнению с производными в среднем:

$$\begin{cases} D\xi(t) = \left(a - \frac{1}{2} \operatorname{diag} B\right)\left(t, \xi(t)\right), \\ D_2\xi(t) = B\left(t, \xi(t)\right) \end{cases} \tag{10}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} D\xi(t) + \frac{1}{2} \operatorname{diag} D_2\left(\xi(t)\right) = a\left(t, \xi(t)\right), \\ D_2\xi(t) = B\left(t, \xi(t)\right) \end{cases} \tag{11}$$

Пусть $\xi(t)$ – решение уравнения (10) (или (11). Мы называем его логарифмом процесса $S(t) = \exp \xi(t) = \left(e^{\xi^1(t)}, \ldots, e^{\xi^n(t)}\right)$ [1].

Отметим, что если уравнение (10) (или (11)) задано априори с некоторым B, то процесс $S(t) = \exp \xi(t)$ может не удовлетворять (8). Таким образом, модели, основанные на уравнениях (10) или (11), покрывают более широкий класс задач, чем те, которые основаны на (7) и (8).

Литература

1. Gliklikh, Y.E. Optimal Solutions For Inclusions Of Geometric Brownian Motion Type With Mean Derivatives / Y.E. Gliklikh, O.O. Zheltikova // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 38–50.

2. Shreve, S.E. Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models / S.E. Shreve. – Springer-Verlag New York, 2004. – 550 p. – P. 151

3. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика. – 2008. – 430 с.

4. Гликлих, Ю.Е. О полноте стохастических потоков, порожденных уравнениями с текущими скоростями / Ю.Е. Гликлих, Т.А. Щичко // Теория вероятностей и ее применения. – 2019. – Т. 64, № 1. – С. 3–16.

5. Гликлих, Ю.Е. Производные в среднем случайных процессов и их применения / Ю.Е. Гликлих. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. – 194 с.

6. Казанцев, С.Ю. Использование диффузионной модели в прогнозировании долей рынка / С.Ю. Казанцев. – 2012. – С. 248–260.

Поступила в редакцию 12 мая 2021 г.

Сведения об авторе

Кордюмов Георгий Дмитриевич – аспирант, кафедра алгебры и математических методов гидродинамики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: georgekord300@gmail.com

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 3, pp. 26–30

DOI: 10.14529/mmph210303

DERIVATIVES IN THE MEAN OF RANDOM PROCESSES AND DIFFUSION MODELS IN ECONOMICS

G.D. Kordyumov
Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: georgekord300@gmail.com

The article is devoted to diffusion models. The authors discuss the theoretical and methodological foundations of diffusion models in financial mathematics. Like the economic system, the modern world is developing rapidly. It seems impossible to predict what will happen tomorrow, how the emergence of new technologies will affect the market, and how changes in random factors will affect the product and the market as a whole. Diffusion models are one of the main methods for studying economic objects and processes. This is why it is so important to develop a diffusion model.

The authors propose extending the applicability of the models by passing from Itô type stochastic equations to equations with so-called derivatives in the mean. For this, following E. Nelson, the authors introduce the concept of derivatives in the mean on the right and on the left.

The equation with the derivative in the mean does not involve the Wiener process, therefore, it is not assumed in advance that the solution is diffusional.

The article describes some well-known diffusion models, in which the transition from equations like an Itô type stochastic differential equation to equations satisfying a system of equations with derivatives in the mean leads to an expansion of the set of possible solutions.

The authors also consider a generalization of geometric Brownian motion that satisfies a system of stochastic equations with derivatives in the mean and can cover a wider class of problems.

Keywords: diffusion models; models in financial mathematics; Itô equation; derivatives in the mean; geometric Brownian motion; Wiener process.

References

1. Gliklikh Y.E., Zheltikova O.O. Optimal Solutions For Inclusions Of Geometric Brownian Motion Type With Mean Derivatives. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2013, Vol. 6, no. 3, pp. 38–50.

2. Shreve S.E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. – Springer-Verlag New York, 2004, 550 p.

3. Berezhnaya E.V., Berezhnoy V.I. *Matematicheskie Metody Modelirovaniya Ekonomicheskikh sistem* (Mathematical Methods of Modeling Economic Systems). Moscow, Finansy i statistika Publ., 2008, 430 p. (in Russ.).

4. Gliklikh Yu.E., Shchichko T.A. On the Completeness of Stochastic Flows Generated by Equations with Current Velocities. *Theory of Probability and its Applications*, 2019, Vol. 64, Iss. 1, pp. 1–11. DOI: 10.1137/S0040585X97T989350

5. Gliklikh, Yu.E. *Proizvodnye v Srednem Sluchaynykh Protsessov i ikh Primeneniya* (Average Derivatives of Random Processes and their Applications). Vladikavkaz, YuMI VNTs RAN Publ., 2016, 194 p. (in Russ.).

6. Kazantsev S.Yu. *Ispol'zovanie Diffuzionnoy Modeli v Prognozirovanii Doley Rynka* (Using the Diffusion Model in Forecasting Market Shares), 2012, pp. 248–260. (in Russ.).

Received May 12, 2021

Information about the author

Kordyumov Georgiy Dmitrievich, Post-graduate Student, Algebra and Mathematical Methods of Hydrodynamics Department, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: georgekord300@gmail.com