УДК 517.956 DOI: 10.14529/mmph210304

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.О. Мамытов
Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Респýблика
E-mail: mamytov1968@list.ru

Как нам известно, в обратной задаче кроме искомого «основного» решения задачи (т. е. решения прямой задачи) нам неизвестны какие-либо входящие в прямую задачу. Требуется найти и этих неизвестных, поэтому их тоже мы будем называть решениями обратной задачи. Для определения этих неизвестных в обратной задаче к заданным уравнениям добавляется какая-либо дополнительная информация о решении прямой задачи. Дополнительную информацию называют данными обратной задачи. В предлагаемой статье рассматривается конкретное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка с известными начальными и краевыми условиями. Для простоты исследовали однородные краевые условия, так как с помощью линейного преобразования всегда неоднородные краевые условия можно привести к однородным. В правой части уравнения присутствуют n неизвестных функций: $\varphi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Для определения этих неизвестных функций: $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2,\ldots, n$ в обратной задаче имеется дополнительная информация о решении прямой задачи, т.е. нам известны значения искомого «основного» решения задачи в внутренних отрезках исследуемой области, т. е. $u(t,x_i) = g_i(t)$, $t\in[0,T]$, $x_i\in(0,1)$, $i = 1, 2,\ldots, n$. Задача исследуется в прямоугольнике, расположенном в первой четверти декартовой системы координат. Для решения обратной задачи разработан алгоритм, в результате найдены достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи по восстановлению правой части в интегро-дифференциальном уравнении в частных производных четвертого порядка. При решении обратной задачи использованы методы: преобразования, функций Грина, решения систем линейных интегральных уравнений Вольтерра. В итоге обратную задачу мы приводим к системе $(n + 1)$ линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, решение которого при малом $0 < T$ существует и единственно. Рассматриваемую обратную задачу можно называть обратной задачей об источнике.

Ключевые слова: обратная задача об источнике, интегро-дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка, система интегральных уравнений Вольтерра, функция Грина, резольвента.

Введение. Обратные задачи впервые появились в практике, например, задача об определении скорости распространения сейсмических волн внутри нашей планеты по движению фронтов сейсмических волн по поверхности Земли. Нетрудно понять, насколько интересна и важна такая информация для физиков, геофизиков, врачей и вообще исследователей таких объектов и областей, проникновение внутрь которых либо слишком трудоемко, либо опасно, либо вообще невозможно [1–3]. Различные обратные задачи исследованы в [4–15], а также в цитируемых работах в них. Исследование теории и методы обратных задач интенсивно продолжается.

В статье предлагается конкретный алгоритм решения одной обратной задачи об источнике. Найдены достаточные условия, при выполнении которых гарантируется существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи.

Постановка задачи

Исследуем разрешимость обратной задачи об источнике

$$u_{tt}(t,x)=\alpha u_{xxtt}(t,x)-\beta u_{xx}(t,x)+\int_0^t K(t-s)u_{ss}(s,x)ds+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)h_i(t,x)+F(t,x),\ (t,x)\in G, \qquad (1)$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\ u_t(0,x)=\psi(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (2)$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0, \quad 0\le t\le T\ , \qquad (3)$$

где $K(t),\ F(t,x),\ \varphi(x),\ \psi(x),\ h_i(t,x),\ i=1,2,...,n$ – известные функций, $T,\ \alpha,\ \beta$ – заданные положительные постоянные, а функций $u(t,x),\ \varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$ неизвестные, $G=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T,\ 0\le x\le 1\}$.

Кроме этого, нам известны значения неизвестной функций $u(t,x)$ в внутренних отрезках области G, т. е.

$$u(t,x_i)=g_i(t),\ t\in[0,T],\ x_i\in(0,1),\ i=1,2,...,n\,. \qquad (4)$$

Требуется найти неизвестные функций $u(t,x),\ \varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$. Подобную обратную задачу называют обратной задачей об источнике [1].

Решение задачи

Пусть выполняются следующие условия:

$$U_1:\ \ F\in C(G),\quad \varphi,\psi\in C^2[0,1],\ g_i\in C^2[0,T],$$

$$U_2:\ \varphi(0)=0,\ \varphi(1)=0,\ \ g_i(0)=\varphi(x_i),\ \ g'_i(0)=\psi(x_i),\ i=1,2,...,n.$$

Введем обозначение, пусть

$$v(t,x)=u_{tt}(t,x), \qquad (5)$$

интегрируя равенство (5) по переменной *t* и учитывая условие $u_t(0,x)=\psi(x)$, получим

$$u_t(t,x)=\int_0^t v(s,x)ds+\psi(x), \qquad (6)$$

еще раз интегрируя последнее равенство по переменной *t* и учитывая начальное условие $u(0,x)=\varphi(x)$, имеем:

$$u(t,x)=\int_0^t (t-s)v(s,x)ds+\psi(x)t+\varphi(x). \qquad (7)$$

Подставляя (5), (6) и (7) в уравнение (1) имеем:

$$v(t,x)=\alpha v_{xx}(t,x)-\beta\left(\int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds+\psi''(x)t+\varphi''(x)\right)+\int_0^t K(t-s)v(s,x)ds+\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)h_i(t,x)+F(t,x),$$

или

$$v_{xx}=\gamma\int_0^t (t-s)v_{xx}(s,x)ds+\tfrac{1}{\alpha}v(t,x)+\gamma\psi''(x)t+\gamma\varphi''(x)-\tfrac{1}{\alpha}\int_0^t K(s)v(t-s,x)ds-$$
$$-\tfrac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)h_i(t,x)-\tfrac{1}{\alpha}F(t,x). \qquad (8)$$

В нашей работе [18] доказана

Лемма 1. Резольвенту $R(t,s)$ ядра $K(t,s)=\gamma(t-s)$ можно представить в следующем виде

$$R(t,s)=\sqrt{\gamma}sh\left\{\sqrt{\gamma}(t-s)\right\},\ (t,s)\in G\ ,$$

где $\gamma=\dfrac{\beta}{\alpha},\ \ (t,s)\in G=\{(t,s)\,|\,0\le s\le t\le T\}$.

На основании этой леммы 1 равенство (8) запишем в виде:

$$v_{xx}(t,x)-\frac{1}{\alpha}v(t,x)=P_1(t,x)-\frac{1}{\alpha}\int_0^t K(s)v(t-s,x)ds-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)h_i(t,x)+$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^t \sqrt{\gamma}sh\left(\sqrt{\gamma}(t-s)\right)\left(v(s,x)-\int_0^s K(\tau)v(s-\tau,x)d\tau-\sum_{i=1}^n \varphi_i(s)h_i(s,x)\right)ds, \qquad (9)$$

где $P_1(t,x)=\gamma\psi''(x)t+\gamma\varphi''(x)-\dfrac{1}{\alpha}F(t,x)-\sqrt{\gamma}\int\limits_0^t sh(\sqrt{\gamma}(t-s))[\gamma\psi''(x)s+\gamma\varphi''(x)+\dfrac{1}{\alpha}F(s,x)]\mathrm{ds}$.

Из равенства (5), для функции $v(t,x)$ получаем граничные условия вида:

$$v(t,0)=v(t,1)=0. \tag{10}$$

Задачу (9)–(10) исследуем при фиксированном t, здесь $v(t,x)$ – искомая функция. Однородное уравнение $y''(x)–k^2y(x) = 0$ (в нашем случае $k^2=1/\alpha$) имеет два линейно независимых решения: $y_1(x) = \mathrm{sh}(kx)$ и $y_2(x) = \mathrm{sh}(kx–k)$, Вронскиан которых равен $W(y_1, y_2) = k\mathrm{sh}(k)$.

Заметим, что $y_1(0) = 0$ и $y_2(1) = 0$ учитывая эти соотношения, легко можно построить решение следующей однородной краевой задачи с помощью функции Грина:

$$y''(x) – k^2y(x) = f(x),\ 0 < x < 1,\ \ y_1(0) = 0 \text{ и } y_2(1) = 0.$$

т. е. решение записывается в виде [16–18]:

$$y(x)=\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,f(\xi)d\xi,$$

где функция Грина $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sh}(kx-k)\mathrm{sh}(ks)}{k\,\mathrm{sh}(k)}, & 0\le s\le x,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{sh}(kx)\mathrm{sh}(ks-k)}{k\,\mathrm{sh}(k)}, & x\le s\le 1.\end{cases}$

Применяя этот результат к интегро-дифференциальной задаче (9)–(10), получим «чисто» интегральное уравнение Вольтерра:

$$v(t,x)=\int\limits_0^1 G(x,\xi)\left(P_1(t,\xi)-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t K(s)v(t-s,\xi)ds-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)h_i(t,\xi)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\sqrt{\gamma}sh\left(\sqrt{\gamma}(t-s)\right)\left(v(s,\xi)-\int\limits_0^s K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau-\sum_{i=1}^n\varphi_i(s)h_i(s,\xi)\right)ds\right)d\xi. \tag{11}$$

Уравнение (11) перепишем в виде

$$v(t,x)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\left[\int\limits_0^1 G(x,\xi)h_i(t,\xi)d\xi\right]\varphi_i(t)-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_0^t\left[G(x,\xi)R(t,s)h_i(s,\xi)\right]d\xi\varphi_i(s)ds- \tag{12}$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x,\xi)K(s)v(t-s,\xi)d\xi ds-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^s R(t,s)G(x,\xi)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds+P(t,x),$$

где $P(t,x)=\int\limits_0^1 G(x,\xi)P_1(t,\xi)\,d\xi.$

Полагая $x=x_j,\quad j=1,2,...,n$ и учитывая данные (4), а также равенство (5), из соотношения (12) имеем

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\left[\int\limits_0^1 G(x_j,\xi)h_i(t,\xi)d\xi\right]\varphi_i(t)=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x_j,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left[G(x_j,\xi)R(t,s)h_i(s,\xi)\right]d\xi\varphi_i(s)ds-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G(x_j,\xi)K(s)v\left(t-s,\xi\right)d\xi ds- \tag{13}$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^s R(t,s)G(x_j,\xi)K(\tau)v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds+P(t,x_j)-g_j^{//}(t),\ \ j=1,2,...,n.$$

Введем обозначение

$$a_{ji}(t)=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 G(x_j,\xi)h_i(t,\xi)d\xi,\ i,j=1,2,...,n. \tag{14}$$

Пусть

$$\det A(t)\neq 0\ \ \forall t\in[0,T], \tag{15}$$

где $A(t)=\{a_{ij}(t)\},\ i,j=1,2,...,n$.

Учитывая обозначение (14), систему (13) можно представить

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ji}(t)\varphi_i(t)=\frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1 G(x_j,\xi)\big(R(t,s)-K(t-s)\big)v(s,\xi)d\xi ds-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^1\Big[G(x_j,\xi)R(t,s)h_i(s,\xi)\Big]d\xi\varphi_i(s)ds- \tag{16}$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^1\int_0^s R(t,s)G(x_j,\xi)K(s-\tau)v(\tau,\xi)d\tau d\xi ds+P(t,x_j)-g_j^{//}(t),\ \ j=1,2,...,n.$$

В итоге мы пришли к системе из (n+1) уравнений (12), (16). Из общей теории интегральных уравнений нам известно, что решение системы (12), (16) существует и единственно.

Следовательно справедлива

Теорема. Если выполняются U_1 U_2 и неравенство (15), то в пространстве $C^{2,2}(G)\times C_n\left[0,T\right]$, решение задачи (1)–(4) существует и единственно, $C_n\left[0,T\right]=\underbrace{C[0,T]\times C[0,T]\times...\times C[0,T]}_{n\ раз}$.

Пример. Пусть в задаче (1)–(4): $\alpha=\beta=1$, n = 1, $K(t)$ = t, $h_1(t,x)=1$, $x_1=\frac{1}{2}$, $F(t,x)\equiv 0$, $g_1(t)=t^2$, $\varphi(x)=0,\ \psi(x)=0$ для всех $x\in[0,1]$, т. е. рассмотрим задачу

$$u_{tt}(t,x)=u_{xxtt}(t,x)-u_{xx}(t,x)+\int_0^t(t-s)u_{ss}(s,x)ds+\varphi_1(t),(t,x)\in G$$

$$u(0,x)=0,\ u_t(0,x)=0, 0\le x\le 1,\ u(t,0)=u(t,1)=0,\ u(t,1/2)=t^2,\ t\in[0,T].$$

Ищем $u\left(t,x\right)$ и $\varphi_1(t)$.

Пусть $v(t,x)=u_{tt}(t,x),$ тогда $u(t,x)=\int_0^t(t-s)v(s,x)ds$ и имеем:

$$v(t,x)=v_{xx}(t,x)-\int_0^t(t-s)v_{xx}(s,x)ds+\int_0^t(t-s)v(s,x)ds+\varphi_1(t),$$

или

$$v_{xx}=\int_0^t(t-s)v_{xx}(s,x)ds+v(t,x)-\int_0^t sv(t-s,x)ds-\varphi_1(t).$$

Резольвента примет вид: $R(t,s)=\mathrm{sh}(t-s),\ (t,s)\in G$.

Отсюда получаем следующую задачу:

$$v_{xx}(t,x)-v(t,x)=-\int_0^t sv(t-s,x)ds-\varphi(t)+\int_0^t\mathrm{sh}\left(t-s\right)\left(v(s,x)-\int_0^s\tau v(s-\tau,x)d\tau-\varphi(s)\right)ds\ ,$$

$$v(t,0)=v(t,1)=0.$$

Одронодную краевую задачу заменяем интегральным уравнением:

$$v(t,x)=\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-\varphi(t)\int_0^1 G(x,\xi)d\xi-\int_0^t\int_0^1\left[G(x,\xi)R(t,s)\right]d\xi\varphi(s)ds-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)sv(t-s,\xi)d\xi ds-\int_0^t\int_0^1\int_0^s R(t,s)G(x,\xi)\tau v(s-\tau,\xi)d\tau d\xi ds,$$

где $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}(x-1)\operatorname{sh}(s)}{\operatorname{sh}(1)}, & 0\le s\le x,\\ \dfrac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(s-1)}{\operatorname{sh}(1)}, & x\le s\le 1.\end{cases}$

Полагая $x=1/2$ и учитывая, что $u(t,1/2)=t^2$ и $v(t,x)=u_{tt}(t,x)=2$, имеем

$$2+\varphi(t)a=\int_0^t\int_0^1 G(1/2,\xi)R(t,s)v(s,\xi)d\xi ds-a\int_0^t R(t,s)\varphi(s)ds-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G(1/2,\xi)(t-s)v(s,\xi)d\xi ds-\int_0^t\int_0^1\int_0^s R(t,s)G(1/2,\xi)(s-\tau)v(\tau,\xi)d\tau d\xi ds,$$

здесь $a=\int_0^1 G(1/2,\xi)d\xi=0{,}11.$

Мы получили систему из двух уравнений, решение которой существует и единственно.

Литература

1. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018. – 511 с.

2. Бухгейм, А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.

3. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

4. Фалалеев, М.В. О разрешимости в классе распределений вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2020. – Т. 34. – С. 77–92.

5. Исломов, Б.И. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области / Б.И. Исломов, У.Ш. Убайдуллаев // Изв. вузов. Матем. – 2021. – № 3. – С. 29–46.

6. Убайдуллаев, У. Ш. Обратная задача для смешанного нагруженного уравнения с оператором Римана–Лиувилля в прямоугольной области / У. Ш. Убайдуллаев // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 31, № 2. – С. 18–31.

7. Гласко, Ю. В. Обратная задача интерпретации гравитационной и магнитной аномалий месторождения углеводородов / Ю.В. Гласко // Сиб. журн. индустр. матем. – 2020. – Т. 23, № 1. – С. 46–57.

8. Мегралиев, Я.Т. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни–Люка с нелокальными условиями / Я.Т. Мегралиев, Б.К. Велиева // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29, № 2. – С. 166–182.

9. Дурдиев, У.Д. Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах / У. Д. Дурдиев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2019. – Т. 22, № 4. – С. 26–32.

10. Суляндзига, П.Б. Внутренняя обратная задача комплексного магнитного потенциала / П. Б. Суляндзига, А. Н. Иванов, Е. П. Суляндзига // Дальневост. матем. журн. – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 75–83.

11. Zamyshlyaeva, A.A. Inverse problem for Sobolev type mathematical models / A.A. Zamyshlyaeva, A.V. Lut // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 25–36.

12. Камынин, В.Л. Обратная задача одновременного определения двух зависящих от пространственной переменной младших коэффициентов в параболическом уравнении / В.Л. Камынин // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 2. – С. 248–261.

13. Князьков, Д.Ю. Обратная задача дифракции электромагнитной волны на плоском слое / Д.Ю. Князьков // Программные системы: теория и приложения. – 2018. – Т. 9, № 1. – С. 21–36.

14. Бутерин, С.А. Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля с условиями разрыва, / С.А. Бутерин // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума, СМФН, Т. 64, № 3, Российский университет дружбы народов. – М., 2018. – С. 427–458.

15. Корнилов, В.С. История развития теории обратных задач для дифференциальных уравнений - составляющая гуманитарного потенциала обучения прикладной математике / В.С. Корнилов // Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования. – 2009. – № 17. – С. 108–113.

16. Мамытов, А.О. Обратная задача для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка с переопределением во внутренних точках / А.О. Мамытов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2015. – № 7. – С. 10–15.

17. Мамытов, А.О. Определение правой части для одного класса линейного дифференциального уравнения четвертого порядка / А.О. Мамытов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2014. – № 7. – С. 37–42.

18. Мамытов, А.О. Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка / А.О. Мамытов // Молодой учёный. – 2016. – № 11(115). – С. 49–53.

Поступила в редакцию 25 мая 2021 г.

Сведения об авторе

Мамытов Айтбай Омонович – преподаватель, Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Респу́блика, e-mail: mamytov1968@list.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2021, vol. 13, no. 2, pp. 31–38

DOI: 10.14529/mmph210304

ON A PROBLEM OF DETERMINING THE RIGHT-HAND SIDE OF THE PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

A.O. Mamytov
Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic
E-mail: mamytov1968@list.ru

As it is known, in the inverse problem, apart from the sought-for “basic” solution of the problem (i. e., the solution of the direct problem), the components of the direct problem are unknown. It is required to find these unknown components, so they will be also included in the solution of the inverse problem. To determine these components in the inverse problem, some additional information on the solution of the direct problem is added to the given equations. The additional information is called the inverse problem data. In the proposed article, the specific fourth-order partial integro-differential equation with the known initial and boundary conditions is considered. For simplicity, the homogeneous boundary conditions have been examined, since with the help of a linear transformation, the always inhomogeneous boundary conditions can be reduced to the homogeneous ones. The right-hand side of the equation contains n unknown functions: $\varphi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$.. To determine these unknown functions: $\varphi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$ in the inverse problem there is additional information on the solution of the direct problem, i.e., the values of the sought-for “basic” solution to the problem in the inner segments of the investigated

region are known, i. e., $u(t,x_i) = g_i(t)$, $t\in[0,T]$, $x_i\in (0,1)$, $i = 1,2,\ldots,n$. The problem is investigated in a rectangle located in the first quarter of the Cartesian coordinate system. To solve the inverse problem, an algorithm has been elaborated and sufficient conditions for the existence and the uniqueness of the solution of the inverse problem for the restoration of the right-hand side in a fourth-order partial integro-differential equation have been found. When solving the inverse problem, the methods of transformations, Green's function, solutions of systems of linear Volterra integral equations have been used. As a result, the inverse problem has been reduced to a system of $(n + 1)$ linear Volterra integral equations of the second kind, the solution of which for small $0 < T$ exists and is unique. The considered inverse problem can be called the inverse source problem.

Keywords: inverse source problem; fourth-order partial integro-differential equation; system of Volterra integral equations; Green's function, resolvent.

References

1. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* (Inverse and Ill-Posed Problems). Novosibirsk, Izd-vo SO RAN Publ., 2018, 511 s. (in Russ.).

2. Bukhgeym A.L. *Uravneniya Vol'terra i obratnye zadachi* (Volterra Equations and Inverse Problems). Novosibirsk, Nauka Publ., 1983, 207 p. (in Russ.).

3. Lavrent'ev M.M. *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* (On some Ill-Posed Problems in Mathematical Physics). Novosibirsk, Izd-vo SO AN SSSR Publ., 1962, 92 p. (in Russ.).

4. Falaleev M.V. On Solvability in the Class of Distributions of Degenerate Integro-Differential Equations in Banach Spaces. The *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, Vol. 34, pp. 77–92. (in Russ.). DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.77

5. Islomov B.I., Ubaydullayev U.S. The Inverse Problem for a Mixed Type Equation with a Fractional Order Operator in a Rectangular Domain. *Russ Math*, 2021, Vol. 65, pp. 25–42. DOI: 10.3103/S1066369X21030038

6. Ubaydullayev U.Sh. The inverse problem for a mixed loaded equation with the riemann-liouville operator in a rectangular domain. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, Vol. 31, no. 2, pp. 18–31. (in Russ.). DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-18-31

7. Glasko Yu.V. The inverse problem of interpretation of gravitational and magnetic anomalies of hydrocarbon deposits. Sib. Zh. Ind. Mat., 2020, Vol. 23, no. 1, pp. 46–57. (in Russ.). DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.105

8. Megraliev Ya.T., Velieva B.K. Inverse boundary value problem for the linearized Benney-Luke equation with nonlocal conditions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, Vol. 29, no. 2, pp. 166–182. (in Russ.).

9. Durdiev U.D. An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2019, Vol. 22, no. 4, pp. 26–32. DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.403

10. Sulyandziga P.B., Ivanov A.N., Sulyandziga E.P. Internal Inverse Problem of Complex Magnetic Potential. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2019, Vol. 19, no. 1, pp. 75–83. (in Russ.).

11. Zamyshlyaeva A.A., Lut A.V. Inverse Problem for Sobolev Type Mathematical Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 25–36.

12. Kamynin V.L. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Lower Space-Dependent Coefficients in a Parabolic Equation. *Mathematical Notes*, 2019, Vol. 106, no. 2, pp. 235–247. DOI: 10.1134/S0001434619070277

13. Knyazkov D.Y. Inverse Problem of Diffraction of Electromagnetic Wave on a Plane Layer. *Program Systems: Theory and Applications*, 2019, Vol. 9, no. 1, pp. 21–36. DOI: 10.25209/2079-3316-2018-9-1-21-36

14. Buterin S.A. Inverse Spectral Problem for Integro-Differential Sturm–Liouville Operators with Discontinuity Conditions. *Proc. Crimean autumn mathematical school-symposium, CMFD*, Vol. 64, no. 3, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 2018, pp. 427–458. DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-3

15. Kornilov V.S. Istoriya razvitiya teorii obratnykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy – sostavlyayushchaya gumanitarnogo potentsiala obucheniya prikladnoy matematike (The history of the

development of the theory of inverse problems for differential equations is a component of the humanitarian potential of teaching applied mathematics). *Vestnik MGPU. Seriya: Informatika i informatizatsiya obrazovaniya* (Vestnik MGPU. Series: Informatics and informatization of education), 2009, no. 17, pp. 108–113. (in Russ.).

16. Mamytov A.O. On an Inverse Problem for a Linear Differential Equation of Fourth Degree with Redefined at Interior Points. *Science, New technologies and Innovations in Kyrgyzstan*, 2015, no. 7, pp. 10-15.

17. Mamytov A.O. Determination of the right side for one class of a fourth-order linear differential equation. *Science, new technologies and innovations of Kyrgyzstan*, 2014. no. 7, pp. 37–42.

18. Mamytov A.O. *Young Scientist*, 2016, no. 11(115), pp. 49–53. (in Russ.). https://moluch.ru/archive/115/30705/

Received May 25, 2021

Information about the author

Mamytov Aytbay Omonovich, Lecturer, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: mamytov1968@list.ru