УДК 517.925 DOI: 10.14529/mmph210305

БИФУРКАЦИИ ПОЛИЦИКЛА, ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ ПЕТЛЯМИ СЕПАРАТРИС НЕГРУБОГО СЕДЛА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В.Ш. Ройтенберг
Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Рассматривается семейство гладких динамических систем, заданных на плоскости и зависящих от двумерного параметра, меняющегося в окрестности нуля. Все системы семейства предполагаются инвариантными при преобразовании симметрии относительно начала координат. При нулевом значении параметра динамическая система имеет простейшее негрубое седло, обе выходящие сепаратрисы которого идут в то же седло, образуя две петли. Полицикл «восьмерка», состоящий из петель, является аттрактором этой системы. Он имеет окрестность *U*, в граничных точках которой все траектории систем семейства с параметрами, близкими к нулю, входят в *U*. При условии общего положения описываются бифуркации в окрестности *U* полицикла при изменении параметра. Значения параметра в малой окрестности нуля, при которых система является негрубой в *U*, образуют пять гладких кривых, входящих в начало координат, разбивающих эту окрестность на связные компоненты, для значений параметра из которых системы семейства являются грубыми. Для каждой компоненты описан топологический тип соответствующих динамических систем в *U*. В частности указаны области параметра, при которых система имеет в *U* единственный аттрактор – узел, два аттрактора – узел и цикл, гомотопный в *U* полициклу, или два симметричных цикла, гомотопных в *U* петлям из полицикла, а также три аттрактора – узел и два симметричных цикла.

Ключевые слова: семейство векторных полей на плоскости; центральная симметрия; инвариантность; негрубое седло; петля сепаратрисы седла; полицикл «восьмерка»; бифуркация; устойчивый предельный цикл

Введение

Динамические системы на плоскости, задаваемые гладкими векторными полями, инвариантными относительно центральной симметрии, используются при математическом моделировании ряда процессов. Представляет интерес изучение бифуркаций в типичных конечно-параметрических семействах таких систем. Описание нелокальных бифуркаций в однопараметрических семействах получается как следствие известного описания бифуркаций в типичных семействах динамических систем без симметрии с одним и двумя параметрами [1, 2]. В типичных двухпараметрических семействах систем с симметрией появляются системы с вырождениями, встречающимися для динамических систем без симметрии только в типичных семействах с числом параметров большим двух, описание бифуркаций в которых пока отсутствует. Примером такой динамической системы является система, имеющая в начале координат простейшее негрубое седло, сепаратрисы которого образуют две симметричных петли Γ_0^+ и Γ_0^-. Мы опишем ее типичные двухпараметрические деформации в окрестности полицикла $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$, гомеоморфного «восьмерке».

1. Постановка задачи. Формулировка результатов

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon(z) = P_1(z,\varepsilon)\partial/\partial z_1 + P_2(z,\varepsilon)\partial/\partial z_2$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ переменных $z=(z_1,z_2)$, зависящее от двумерного параметра $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Будем предполагать, что векторные поля X_ε инвариантны относительно преобразования $S: z \mapsto -z$, то есть $X_\varepsilon(-z) = -X_\varepsilon(z)$, а $P_1, P_2 \in C^r$ ($r \ge 3$).

Пусть $O=(0,0)\in \mathbf{R}^2$ является особой точкой векторного поля X_0, т. е. $X_0(O)=0$, и матрица $(\partial P_i(0,0)/\partial z_j)$ линейной части поля в этой точке имеет собственные значения $\lambda_0<0$ и 0. Согласно теореме 5.5 о редукции из [3] при значениях параметра ε, достаточно близких к нулю, в некоторой окрестности Π точки O существует замена координат $(z_1,z_2)\mapsto g(x,y,\varepsilon)$, $|x|<1$, $|y|<1$, $g\in C^r$, $g(0,0,0)=0$, такая, что в координатах (x,y) векторное поле X_ε имеет вид $P(x,\varepsilon)\partial/\partial x+yQ(x,y,\varepsilon)\partial/\partial y$, где $P\in C^r$, $Q\in C^{r-1}$,

$$Q(0,0,0)=\lambda_0. \tag{1}$$

Из доказательства теоремы о редукции следует, что для рассматриваемого семейства $g(-x,-y,\varepsilon)=-g(x,y,\varepsilon)$. Поэтому если точка $z\in\Pi$ имеет координаты (x,y), то симметричная ей точка $S(z)$ имеет координаты $(-x,-y)$ и

$$P(-x,\varepsilon)=-P(x,\varepsilon),\ Q(-x,-y,\varepsilon)=Q(x,y,\varepsilon). \tag{2}$$

Ввиду (2) $P(0,0)=P_x'(0,0)=P_{xx}''(0,0)=0$. Будем считать, что $P_{xxx}'''(0,0)>0$. Тогда особая точка O поля X_0 является топологическим седлом. Назовем такую точку *простейшим негрубым седлом*. Пусть выходящая сепаратриса L_0^+ этого седла совпадает с входящей сепаратрисой, образуя вместе с седлом петлю Γ_0^+. Без ограничения общности можно считать, что $L_0^+\cap\Pi$ состоит из дуг $y=0,\ 0<x<1$ и $x=0,\ 0<y<1$. Вследствие симметрии поля X_0 $\Gamma_0^-=S\Gamma_0^+$ – также петля сепаратрисы поля. Обозначим $\Gamma_0:=\Gamma_0^-\cup\Gamma_0^+$.

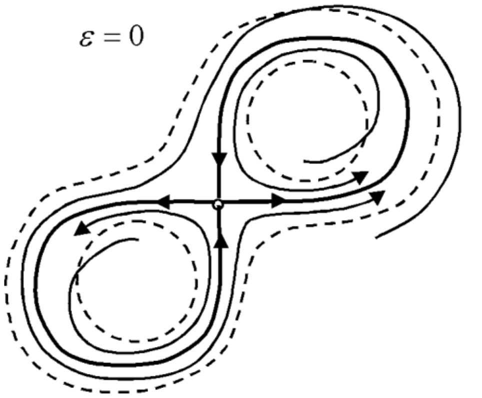

Рис. 1. Траектории поля X_0 в окрестности U полицикла. Граница U изображена пунктиром

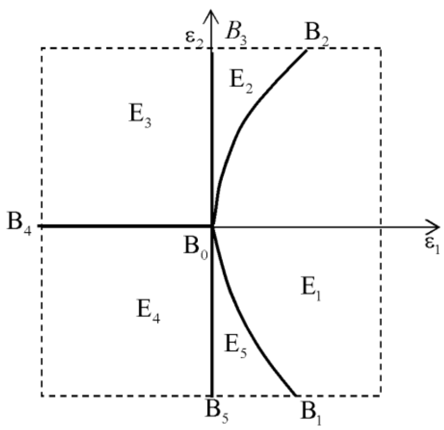

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

Теорема 1. *Пусть векторное поле X_0 удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда существуют окрестность U полицикла Γ_0 с границей ∂U, состоящей из трех непересекающихся между собой гладких простых замкнутых кривых $\gamma_{\rm int}^+,\gamma_{\rm int}^-=S\gamma_{\rm int}^+$ и $\gamma_{\rm ext}$ ($\gamma_{\rm ext}=S\gamma_{\rm ext}$), в точках которых поле X_0 направлено внутрь U, а все траектории поля, начинающиеся в кольцевой области между $\gamma_{\rm int}^+$ и Γ_0^+, $\gamma_{\rm int}^-$ и Γ_0^-, $\gamma_{\rm ext}$ и Γ_0, ω-предельны соответственно к Γ_0^+, Γ_0^-, Γ_0 и выходят из U при убывании времени соответственно в точках $\gamma_{\rm int}^+$, $\gamma_{\rm int}^-$, $\gamma_{\rm ext}$. (рис. 1).*

Ввиду (1), (2) и неравенства $P_{xxx}'''(0,0)>0$ при достаточно малом $d>0$ и значениях параметра ε, достаточно близких к нулю,

$$\forall x\in[-d,d]\ \ \forall y\in(0,d]\ \ Q(x,y,\varepsilon)<0,\ |P_x'(x,\varepsilon)|\le 1/2,\ \ P_{xxx}'''(x,\varepsilon)>0. \tag{3}$$

Так как $P_{1z_1}'(0,0)+P_{2z_2}'(0,0)=P_x'(0,0)+Q_y'(0,0)=\lambda_0$, то можно также считать, что

$$P_{1z_1}'(z,\varepsilon)+P_{2z_2}'(z,\varepsilon)<\lambda_0/2, \tag{4}$$

если точка z имеет координаты $(x,y)\in[-d,d]^2$.

При ε достаточно близких к нулю траектория L_ε^+ поля X_ε, начинающаяся в точке центрального многообразия $y=0$ с координатой $x=d$, пересекает дугу $y=d$ в точке с координатой $x=v(\varepsilon)$, где $v(\cdot)\in C^{r-1}$, $v(0)=0$. Потребуем выполнение условия

$$\begin{vmatrix} P''_{x\varepsilon_1}(0,0) & P''_{x\varepsilon_2}(0,0) \\ v'_{\varepsilon_1}(0) & v'_{\varepsilon_2}(0) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (5)$$

Заметим, что это условие не зависит от в выбора координат (x, y) и числа d. Из (5) следует, что, сделав замену параметров $\tilde{\varepsilon}_1 = -P'_x(0,\varepsilon),\ \tilde{\varepsilon}_2 = v(\varepsilon)$ и вернувшись к их прежним обозначениям, мы можем считать, что при некотором $\delta_1 > 0$

$$P'_x(0,\varepsilon) = -\varepsilon_1,\ v(\varepsilon) = \varepsilon_2 \text{ для всех } \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in [-\delta_1, \delta_1]^2. \qquad (6)$$

Теорема 2. *Пусть семейство векторных полей X_ε удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда окрестность U полицикла Γ_0, о которой идет речь в теореме 1, и число $\delta > 0$ можно выбрать следующим образом.*

В точках ∂U векторные поля X_ε, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, направлены внутрь U.

Область параметров $(-\delta, \delta)^2$ разбивается на множества B_0, E_i, B_i, $i = 1,...,5$, где (рис. 2)

$\mathrm{B}_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = \beta_1(\varepsilon_2)\}$, $\beta_1 : (-\delta, 0) \to (0, \delta)$, $\beta_1 \in C^1$, $\beta_1(-0) = \beta'_1(-0) = 0$,

$\mathrm{B}_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = \beta_2(\varepsilon_2)\}$, $\beta_1 : (0, \delta) \to (0, \delta)$, $\beta_2 \in C^1$, $\beta_2(+0) = \beta'_2(+0) = 0$,

$\mathrm{B}_0 = \{(0,0)\}$, $\mathrm{B}_3 = \{0\} \times (0, \delta)$, $\mathrm{B}_4 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $\mathrm{B}_5 = \{0\} \times (-\delta, 0)$,

E_i *– связная компонента* $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{k=0}^{5} \mathrm{B}_k$, *в границу которой входят* B_i *и* B_{i+1} *(здесь* $\mathrm{B}_6 = \mathrm{B}_1$*), такие, что*

1) *схемы векторных полей X_ε в U для $\varepsilon \in \mathrm{E}_i$ и $\varepsilon \in \mathrm{B}_i$ $(i = 1,...,5)$ имеют вид, изображенный на рис. 3;*
2) *для любого $i = 1,...,5$ векторные поля X_ε при $\varepsilon \in \mathrm{E}_i$ грубые в U, а потому принадлежат одному классу топологической эквивалентности в U;*
3) *для любого $i = 1,...,5$ векторные поля X_ε при $\varepsilon \in \mathrm{B}_i$ негрубые в U и принадлежат одному классу топологической эквивалентности в U.*

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в параграфах 2 и 3.

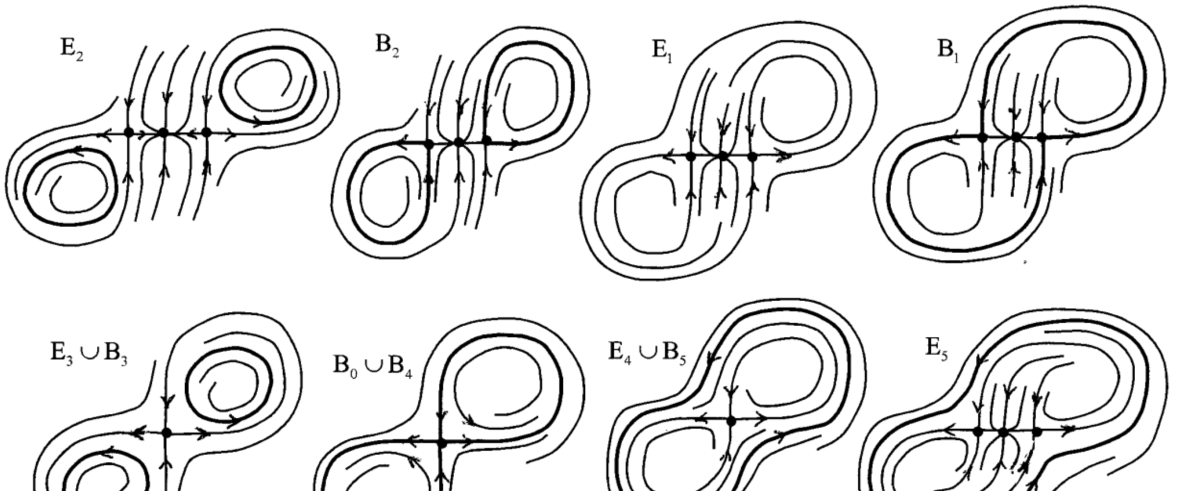

Рис. 3. Перестройки фазовых портретов в окрестности полицикла

2. Функции соответствия и функции последования

Пусть V – окрестность Γ_0 с компактным замыканием. При достаточно малых $\bar{u} \in (0, d)$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ траектория поля X_ε, $\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$, начинающаяся в точке с координатами $x = d$, $y = u \in [-\bar{u}, \bar{u}]$, не выходит из V и пересекает дугу $y = d$ в точке с координатой $x = \varphi(u, \varepsilon)$ в момент времени $t=T_2(u,\varepsilon)>0$, где $\varphi\in C^r$, $\varphi(0,\varepsilon)=v(\varepsilon)$, $\varphi_u'(u,\varepsilon)>0$, $T_2\in C^r$. Пусть $T_{\max}$ – наибольшее значение $T_2(u,\varepsilon)$ на $[-\bar u,\bar u]\times[-\delta_2,\delta_2]^2$, а M – наибольшее значение $|P'_{1z_1}(z,\varepsilon)+P'_{2z_2}(z,\varepsilon)|$ на $\bar V\times[-\delta_2,\delta_2]^2$.

Из (2), (3) и (6) следует, что $\forall x\in[-d,d]\ \forall\varepsilon\in[-\delta_2,\delta_2]^2$

$$P(x,\varepsilon)=x\int_0^1 P'_x(xt,\varepsilon)\,dt=x(-\varepsilon_1+a(x,\varepsilon)), \tag{7}$$

где $a(0,\varepsilon)=a'_x(0,\varepsilon)=0$, $a''_{xx}(x,\varepsilon)>0$. Поэтому существует такое $\delta_3\in(0,\delta_2]$, что уравнение $P(x,\varepsilon)=0$ имеет на отрезке $[-d,d]$ при $\varepsilon\in(0,\delta_3)\times(-\delta_3,\delta_3)$ ровно три решения: $x=0$, $x=x_+(\varepsilon)\in(0,d)$ и $x=x_-(\varepsilon)=-x_+(\varepsilon)$, причем $x_+(\cdot)\in C^1$, $x_+(+0,\varepsilon_2)=0$, $(x_+)'_{\varepsilon_1}(\varepsilon)>0$, $P'_x(0,\varepsilon)<0$, $P'_x(x_\pm(\varepsilon),\varepsilon)>0$; при $\varepsilon\in(-\delta_3,0)\times(-\delta_3,\delta_3)$ – единственное решение $x=0$, причем $P'_x(0,\varepsilon)>0$, если $\varepsilon_1<0$ и $P'_x(0,\varepsilon)=P''_{xx}(0,\varepsilon)=0$, $P'''_{xxx}(0,\varepsilon)>0$, если $\varepsilon_1=0$. Учитывая первое неравенство в (3), получаем, что векторное поле X_ε, $\varepsilon\in(-\delta_3,\delta_3)^2$, имеет в замкнутой области, заданной неравенствами $-d\le x\le d,\ -d\le y\le d$, при $\varepsilon_1>0$ ровно три особых точки – седла $O_\varepsilon^\pm$ с координатами $x=x_\pm(\varepsilon)$, $y=0$ и узел O, при $\varepsilon_1\le 0$ единственную особую точку O, являющуюся грубым седлом, если $\varepsilon_1<0$ и простейшим негрубым седлом если $\varepsilon_1=0$.

Пусть $l(\varepsilon)=x_+(\varepsilon)$, если $\varepsilon\in(0,\delta_3)\times(-\delta_3,\delta_3)$, и $l(\varepsilon)=0$, если $\varepsilon\in(-\delta_3,0]\times(-\delta_3,\delta_3)$. При $l(\varepsilon)<x<d$ имеем $P(x,\varepsilon)>0$. Отсюда и из первого неравенства в (3) получаем, что траектория поля X_ε, $\varepsilon\in(-\delta_3,\delta_3)^2$, начинающаяся в точке с координатами $l(\varepsilon)<x<d$ и $y=d$ (соответственно, $y=-d$) через время $T_1(x,\varepsilon)=\int_x^d d\xi/P(\xi,\varepsilon)$, пересекает дугу $x=d$, $-d<y<d$ в точке с $y=\psi^+(x,\varepsilon)>0$ (соответственно, $y=\psi^-(x,\varepsilon)>0$), где $\psi^\pm\in C^1$, $(\psi^+)'_x(x,\varepsilon)>0$, $(\psi^-)'_x(x,\varepsilon)<0$, $\lim\limits_{x\to l(\varepsilon)}\psi^\pm(x,\varepsilon)=0$. Выберем $\bar x\in(0,d/2)$ так, чтобы $-\bar u<\psi^-(\bar x,0)<0<\psi^+(\bar x,0)<\bar u$ и

$$\ln(d/2\bar x)>MT_{\max}/|\lambda_0|. \tag{8}$$

При достаточно малом $\delta_4\in(0,\delta_3]$ для всех $\varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2$ будет $l(\varepsilon)<\bar x$, $-\bar u<\psi^-(\bar x,\varepsilon)<0<\psi^+(\bar x,\varepsilon)<\bar u$. Тогда при всех $\varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2$ и $x\in(l(\varepsilon),\bar x]$ справедливы неравенства $-\bar u<\psi^-(x,\varepsilon)<0<\psi^+(x,\varepsilon)<\bar u$. Поэтому для любого $\varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2$ на промежутке $(l(\varepsilon),\bar x]$ определены функция последования $f_\varepsilon^+:=\varphi(\psi^+(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и функция соответствия $f_\varepsilon^-:=\varphi(\psi^-(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$.

Используя формулу конечных приращений и второе неравенство в (3), получаем $0<P(\xi,\varepsilon)\le(\xi-l(\varepsilon))/2$ при всех $\varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2$, $\xi\in(l(\varepsilon),d]$. Тогда

$$T_1(x,\varepsilon)\ge\int_{\bar x}^d d\xi/P(\xi,\varepsilon)\ge 2\ln\frac{d-l(\varepsilon)}{\bar x-l(\varepsilon)}\ge 2\ln\frac{d}{2\bar x}.$$

Отсюда и из (8) получаем окончательно

$$T_1(x,\varepsilon)>2MT_{\max}|\lambda_0| \text{ при } \varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2,\ x\in(l(\varepsilon),\bar x]. \tag{9}$$

Покажем, что если x_* – неподвижная точка функции последования f_ε^+, $\varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2$, то $(f_\varepsilon^+)'(x_*)<1$. Через точку z_* с координатами $x=x_*, y=d$ проходит периодическая траектория поля X_ε. Пусть ее период равен T, а уравнение $z=\zeta(t)$, $t\in[0,T]$, причем $\zeta(0)=z_*$. Тогда $T=T_1(x_*,\varepsilon)+T_2(\psi^+(x_*,\varepsilon),\varepsilon)$. Согласно [4, с. 126]

$$(f_\varepsilon^+)'(x_*)=\exp\int_0^T(P'_{1z_1}(\zeta(t),\varepsilon)+P'_{2z_2}(\zeta(t),\varepsilon))\,dt.$$

Из (4), (9) и определения чисел $T_{\max}$ и M получаем

$$\int_0^{T_1(x_*,\varepsilon)} (P'_{1z_1}(\zeta(t),\varepsilon)+P'_{2z_2}(\zeta(t),\varepsilon))dt \le \lambda_0 T_1(x_*,\varepsilon)/2 < -MT_{\max},$$

$$\int_{T_1(x_*,\varepsilon)}^{T} | P'_{1z_1}(\zeta(t),\varepsilon)+P'_{2z_2}(\zeta(t),\varepsilon))| dt \le MT_{\max},$$

и потому $(f_\varepsilon^+)'(x_*)<1$. Отсюда в частности следует, что f_ε^+ имеет не более одной неподвижной точки.

Покажем теперь, что

$$\forall x\in(0,\bar{x}] \ \ f_0^+(x)<x. \qquad (10)$$

Предположим временно, что это не так. Тогда $f_0^+(x_0)>x_0$ при некотором $x_0\in(0,\bar{x}]$. При достаточно малом $\varepsilon\in\{0\}\times(-\delta_4,0)$ и $f_\varepsilon^+(x_0)>x_0$, а, кроме того, $f_\varepsilon^+(+0)=\varepsilon_2<0$. Поэтому f_ε^+ имеет на интервале $(0,x_0)$ неподвижную точку x_*. Так как $(f_\varepsilon^+)'(x_*)<1$, то $f_\varepsilon^+(x_1)<x_1$ при некотором $x_1\in(x_*,x_0)$. Но тогда f_ε^+ имеет на интервале (x_1,x_0) еще одну неподвижную точку, что невозможно. Поэтому сделанное предположение неверно и справедливо (10).

Введем функции последования $f_\varepsilon(x):=-f_\varepsilon^-(-f_\varepsilon^-(x))$. Ввиду симметрии поля X_ε через точку с координатами $x=x_*, y=-d$ проходит замкнутая траектория поля тогда и только тогда, когда $f_\varepsilon^-(x_*)=-x_*$. Это равенство равносильно тому, что x_* – неподвижная точка функции последования: $f_\varepsilon(x_*)=x_*$. Как и для f_ε^+, получаем $0<(f_\varepsilon)'(x_*)<1$ и потому $-1<(f_\varepsilon^-)'(x_*)<0$, а f_ε имеет не более одной неподвижной точки. Аналогично (10) имеем неравенства

$$\forall x\in(0,\bar{x}] \ \ -x<f_0^-(x)<0 \ \text{ и } \ 0<f_0(x)<x. \qquad (11)$$

Ввиду (10) и (11) мы можем считать, что δ_4 выбрано столь малым, что для $\forall\varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2$ значение $f_\varepsilon(\bar{x})$ определено и

$$f_\varepsilon^+(\bar{x})<\bar{x}, \ \ -\bar{x}<f_\varepsilon^-(\bar{x})<0 \ \text{ и } \ 0<f_\varepsilon(\bar{x})<\bar{x}. \qquad (12)$$

3. Бифуркационные кривые. Перестройки фазовых портретов

Из (12) согласно [5, п. 3.14] получаем, что через точку с координатами $x=f_0^+(\bar{x})$, $y=d$ ($x=f_0^-(\bar{x})$, $y=-d$) можно провести гладкую замкнутую кривую γ_{int}^+ ($\gamma_{\text{ext}}=S\gamma_{\text{ext}}$), в точках которой поле X_0 трансверсально кривой и направлено внутрь ее положительной (отрицательной) полуокрестности. Обозначим U окрестность полицикла с границей ∂U, состоящей из γ_{int}^+, $\gamma_{\text{int}}^-:=S\gamma_{\text{int}}^+$ и γ_{ext}. Из конструкции U, (10) и (11) следуют все утверждения теоремы 1.

Считая δ_4 выбранным достаточно малым, получим, что поле X_ε при всех $\varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2$ в точках ∂U направлено внутрь U и не имеет в U особых точек, отличных от точек O и $O_\varepsilon^\pm$.

Так как $\varphi(0,\varepsilon)=\varepsilon_2$, а $x_+(\varepsilon)$ – решение уравнения $\varepsilon_1=a(x,\varepsilon)$, то при $\varepsilon_1>0$ уравнение $\varphi(0,\varepsilon)=x_+(\varepsilon)$ равносильно уравнению $\varepsilon_1=a(\varepsilon_2,\varepsilon)$. Последнее уравнение определено при всех $\varepsilon\in(-\delta_2,\delta_2)^2$. Согласно (7) $a(0,0)=a'_{\varepsilon_1}(0,0)=a'_{\varepsilon_2}(0,0)=a'_x(0,0)=0$. Поэтому по теореме о неявной функции существуют такие число $\delta\in(0,\delta_4]$ и C^1-функция $\beta_2:(-\delta,\delta)\to[0,\delta)$, что $\beta_2(0)=\beta_2'(0)=0$ и при $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$ $\varepsilon_1=a(\varepsilon_2,\varepsilon)\Leftrightarrow\varepsilon_1=\beta_2(\varepsilon_2)$. Так как для $\varepsilon_2\in(0,\delta)$ $a(\varepsilon_2,\varepsilon)>0$, то и $\beta_2(\varepsilon_2)>0$. Поэтому $\forall\varepsilon\in(0,\delta)\times(0,\delta)$ $\varphi(0,\varepsilon)=x_+(\varepsilon)\Leftrightarrow\varepsilon_1=\beta_2(\varepsilon_2)$. Так как $(x_+)'_{\varepsilon_1}(\varepsilon)>0$, то

$$\forall\varepsilon\in(0,\delta)\times(0,\delta) \ \ \operatorname{sgn}(x_+(\varepsilon)-\varphi(0,\varepsilon))=\operatorname{sgn}(\varepsilon_1-\beta_2(\varepsilon_2)). \qquad (13)$$

Аналогично (13) доказывается, что δ можно выбрать так, что

$$\forall\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,0) \ \operatorname{sgn}(\varphi(0,\varepsilon)-x_-(\varepsilon))=\operatorname{sgn}(\varepsilon_1-\beta_1(\varepsilon_2)), \qquad (14)$$

где $\beta_1:(-\delta,0)\to(0,\delta)$ – такая C^1-функция, что $\beta_1(+0)=\beta_1'(+0)=0$.

Определим теперь множества B_0, E_i, B_i так, как это описано в формулировке теоремы 2.

При $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$ из (14) следует, что выходящая сепаратриса L_ε^+ седла O_ε^+ идет в седло O_ε^-, а выходящая сепаратриса $L_\varepsilon^- = SL_\varepsilon^+$ седла O_ε^- идет в седло O_ε^+. Так как $f_\varepsilon^+(x) < x_-(\varepsilon) = -x_+(\varepsilon)$, то функция последования $f_\varepsilon(x)$ определена при всех $x \in (x_+(\varepsilon), \bar{x}]$. Покажем, что все траектории, пересекающие дугу $y=-d$, $x_+(\varepsilon) < x < \bar{x}$, а потому все траектории, начинающиеся в точках кольца между γ_{ext} и полициклом $\Gamma_\varepsilon = L_\varepsilon^+ \cup O_\varepsilon^+ \cup L_\varepsilon^- \cup O_\varepsilon^-$, ω-предельны к Γ_ε и выходят из U в точках γ_{ext}. Ввиду последнего из неравенств (12) достаточно показать, что f_ε не имеет неподвижных точек. Это равносильно тому, что функция $f_\varepsilon^-(x) + x$ не имеет нулей. Предположим, что это не так и $f_\varepsilon^-(x_*) + x_* = 0$. Так как $(f_\varepsilon^-)'(x_*) + 1 < 0$, то существует точка $x_0 \in (x_+(\varepsilon), x_*)$, для которой $f_\varepsilon^-(x_0) + x_0 > 0$. При всех $\tilde{\varepsilon}$, достаточно близких к ε, будет $x_+(\tilde{\varepsilon}) < x_0$ и $f_{\tilde{\varepsilon}}^-(x_0) + x_0 > 0$. Выберем $\tilde{\varepsilon} \in \mathrm{E}_1$. Из (14) получаем $\lim\limits_{x \to x_+(\tilde{\varepsilon})} [f_{\tilde{\varepsilon}}^-(x) + x] = \varphi(0, \tilde{\varepsilon}) - x_-(\tilde{\varepsilon}) < 0$. Но тогда существует точка $x_1 \in (x_+(\tilde{\varepsilon}), x_0)$, в которой $f_{\tilde{\varepsilon}}^-(x_1) + x_1 = 0$. Поскольку двух неподвижных точек f_ε иметь не может, то получаем, что их нет вообще. Из первого из неравенств (12) и из неравенства $f_\varepsilon^+(x_+(\varepsilon)) = x_-(\varepsilon) < x_+(\varepsilon)$, аналогично тому, как это было доказано выше для f_ε, следует, что $f_\varepsilon^+(x) < x$ для любого $x \in (x_+(\varepsilon), \bar{x}]$. Поэтому все траектории, пересекающие дугу $y = d,\ x_-(\varepsilon) < x < \bar{x}$, а потому и все траектории, начинающиеся в точках кольца C_ε^+ между γ_{int}^+ и замкнутой кривой, составленной из сепаратрисы L_ε^+ и дуги $y = 0,\ x_-(\varepsilon) \le x \le x_+(\varepsilon)$, выходят из U при убывании времени в точках γ_{int}^+, и, за исключением входящей сепаратрисы седла O_ε^+, ω-предельны к узлу O. Соответственно, все траектории, начинающиеся в точках кольца SC_ε^+, выходят из U при убывании времени в точках γ_{int}^-, и, за исключением входящей сепаратрисы седла O_ε^-, ω-предельны к узлу O. Выходящие сепаратрисы $y = 0,\ 0 < x < x_+(\varepsilon)$ седла O_ε^+ и $y = 0,\ x_-(\varepsilon) < x < 0$ седла O_ε^- ω-предельны к узлу O. Таким образом, мы описали поведение всех траекторий векторных полей X_ε, $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$. Это поведение схематично отображено на рис. 3.

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{E}_5$. Из (14) получаем $\lim\limits_{x \to x_+(\varepsilon)} [f_\varepsilon^-(x) + x] = \varphi(0, \varepsilon) - x_-(\varepsilon) = \varepsilon_2 - x_-(\varepsilon) < 0$. Согласно (12) $f_\varepsilon^-(\bar{x}) + \bar{x} > 0$. Поэтому существует такое $x_* \in (x_+(\varepsilon), \varepsilon_2)$, что $f_\varepsilon^-(x_*) = -x_*$. Следовательно через точки с координатами $x = x_*$, $y = -d$ и $x = -x_*$, $y = d$ проходит грубая устойчивая замкнутая траектория Γ_ε поля X_ε, причем Γ_ε– единственная замкнутая траектория, пересекающая дугу $y = -d$, $x_+(\varepsilon) < x \le \bar{x}$.

Любая траектория поля X_ε в U, не лежащая на дуге $y = 0,\ x_-(\varepsilon) \le x \le x_+(\varepsilon)$, пересекает либо дугу $\mathrm{T}^+ : y = d,\ -\bar{x} < x < \bar{x}$, либо дугу $\mathrm{T}^- : y = -d,\ -\bar{x} < x < \bar{x}$. Траектория, проходящая через точку T^+ (T^-) с координатой $x \in (-\bar{x}, -x_*)$ ($x \in (x_*, \bar{x})$), ω-предельна к Γ_ε и выходит из U при убывании времени в точке, принадлежащей γ_{ext}. Из первого из неравенств (12) и неравенства $\lim\limits_{x \to x_+(\varepsilon)} [f_\varepsilon^+(x) - x] = \varphi(0, \varepsilon) - x_+(\varepsilon) < 0$ следует, что $f_\varepsilon^+(x) < x$ для всех $x \in (x_+(\varepsilon), \bar{x})$. Поэтому траектории, проходящие через точки T^+ (T^-) с координатой $x \in [x_-(\varepsilon), \bar{x})$ ($x \in (-\bar{x}, x_+(\varepsilon)]$), выходят из U при убывании времени в точках γ_{int}^+ (γ_{int}^-); все они ω-предельны к узлу O, за исключением входящих сепаратрис седел O_ε^+ и O_ε^-, проходящих через точки с координатами $x = x_+(\varepsilon)$ и $x = x_-(\varepsilon)$. Траектория, проходящая через точку T^+ (T^-) с координатой $x \in (-x_*, x_-(\varepsilon))$ ($x \in (x_+(\varepsilon), x_*)$), ω-предельна к Γ_ε, выходит из U при убывании времени в точке γ_{int}^+ (γ_{int}^-), если $\varepsilon_2 < x < x_-(\varepsilon)$ ($x_+(\varepsilon) < x < -\varepsilon_2$), в точке γ_{int}^- (γ_{int}^+), если $x_* < x < \varepsilon_2$ ($-\varepsilon_2 < x < x_*$), и является выходящей сепаратрисой L_ε^+ (L_ε^-) седла O_ε^+ (O_ε^-), если $x = \varepsilon_2$ ($x = -\varepsilon_2$).

Таким образом, поведение траекторий векторных полей X_ε в U при $\varepsilon \in \mathrm{E}_5$ такое, как изображено на рис. 3. Случаи $\varepsilon \in \mathrm{E}_j$ и $\varepsilon \in \mathrm{B}_{j+1}$ ($j = 1,2,3,4$) рассматриваются аналогично.

Грубость векторных полей X_ε в U при $\varepsilon \in \mathrm{E}_j$ ($j = 1,...,5$) следует из грубости особых точек, замкнутых траекторий и отсутствия траекторий, идущих из седла в седло [4]. На этом доказательство теоремы 2 закончено.

Литература

1. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – Т. 5. – М.: ВИНИТИ, 1986. – С. 5–218.

2. Шильников, Л.П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 548 с.

3. Шильников, Л.П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. – Москва–Ижевск: ИКИ, 2004. – 416 с.

4. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.

5. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

Поступила в редакцию 26 мая 2021 г.

Сведения об авторе

Ройтенберг Владимир Шлеймович – доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998, e-mail: vroitenberg@mail.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2021, vol. 13, no. 3, pp. 39–46

DOI: 10.14529/mmph210305

BIFURCATIONS OF A POLYCYCLE FORMED BY TWO SEPARATRIX LOOPS OF A NON–ROUGH SADDLE OF A DYNAMICAL SYSTEM WITH CENTRAL SYMMETRY

V.Sh. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: vroitenberg@mail.ru

A family of smooth dynamical systems defined on the plane and depending on a two-dimensional parameter varying in a neighborhood of zero is considered. All systems of the family are assumed to be invariant under a symmetry transformation about the origin. At zero value of the parameter, the dynamical system has the simplest non-rough saddle, both outgoing separatrixes of which go to the same saddle, forming two loops. The polycycle “eight”, consisting of the loops, is an attractor of this system. It has a neighborhood *U*, at the boundary points of which all trajectories of systems of the family with parameters close to zero enter *U*. Under the condition of general position, bifurcations in the neighborhood U of the polycycle are described when the parameter changes. The values of the parameter in a small neighborhood of zero, for which the system is non-rough in *U*, form five smooth curves entering the origin, dividing this neighborhood into connected components, for values of the parameter from which the systems of the family are rough. For each component, the topological type of the corresponding dynamical systems in U is described. In particular, the regions of the parameter are indicated for which the system has a single attractor in *U* – a node, two attractors – a node and a cycle homotopic in U to a polycycle, or two symmetric cycles homotopic in U to loops from a polycycle, as well as three attractors – a node and two symmetric cycles.

Keywords: family of vector fields on the plane; central symmetry; invariance; non-rough saddle; separatrix loop; polycycle "eight"; bifurcation; stable limit cycle.

References

1. Arnold V.I., Afrajmovich V.S., Ilyashenko Y.S., Shilnikov L.P. *Dynamical Systems V. Bifurcation theory and catastrophe theory*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 274 p. DOI: 10.1007/978-3-642-57884-7

2. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev, D., Chua L.O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 2*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, Vol. 5, River Edge, N.J.: World Sci., 2001. DOI: 10.1142/4221

3. Shilnikov L.P., Shilnikov A. L., Turaev D., Chua L.O., *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 1*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, Vol. 4, River Edge, N.J.: World Sci., 1998.

4. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973.

5. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973. DOI: 10.1063/1.3128815

Received May 26, 2021

Information about the author

Roitenberg Vladimir Shleymovich, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998, e-mail: vroitenberg@mail.ru