УДК 517.965 DOI: 10.14529/mmph210402

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ ПЕРВООБРАЗНЫХ ОТ ЛЕБЕГОВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТОЙ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

В.Л. Дильман, Д.А. Комиссарова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: dilmanvl@susu.ru, komissarovada@susu.ru

Описываются линейные функциональные уравнения на простых гладких кривых с функцией сдвига, имеющей ненулевую производную, удовлетворяющую условию Гельдера, и неподвижными точками только на концах кривой. Цель статьи – найти условия существования и единственности решения таких уравнений в классах первообразных от лебеговских функций с коэффициентом и правой частью из таких же классов. Эти условия зависят от значений коэффициента уравнения на концах кривой. Показано, что если коэффициент и правая часть функционального уравнения принадлежат классу первообразных от лебеговских функций, то и его решение принадлежит этому классу. У решений определены показатели Гельдера и классов первообразных от лебеговских функций. Метод исследования основан на критерии Ф. Рисса принадлежности функции классу первообразных от интегрируемых по Лебегу функций. Показаны возможности применения линейных функциональных уравнений для изучения и решения сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими особенностями.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения со сдвигом; линейные функциональные уравнения с одной переменной; классы первообразных от лебеговских функций.

Введение

Начиная с уравнения

$$\int_0^1 \ln|\tau - t|\varphi(\tau)d\tau = f(t),$$

решенного в 1922 г. в замкнутой форме Т. Карлеманом [1], интегральные уравнения первого рода с логарифмическими особенностями постоянно привлекали внимание исследователей теории краевых задач аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений. В дальнейшем были получены многочисленные результаты, относящиеся к исследованию и решению различных типов уравнений с логарифмическими особенностями в ядре, исследованию свойств интегральных операторов с логарифмическими особенностями в различных функциональных классах и пространствах (ссылки в [2]). При изучении сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими особенностями рассматривались классы или пространства первообразных либо от гельдеровских функций [3, 4], либо от функций из лебеговских пространств [5], а также функций из этих классов, имеющих степенные особенности в отдельных точках.

В работе [2] было предложено и исследовалось в гельдеровских классах функций «модельное» интегральное уравнение первого рода с переменной логарифмической особенностью в ядре вида:

$$A(t)\int_t^b \varphi(\tau)d\tau + B(t)\int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau\int_a^\tau \frac{C(\xi)}{\xi - t}d\xi = f(t). \qquad (1)$$

Здесь $\Gamma = [a;b]$ – простая ориентированная кривая на комплексной плоскости с концами a и b (ориентация от a до b; возможно $a = b$). В работе [6] это уравнение исследовалось в лебеговских классах функций.

В связи с теорией краевых задач и сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [7–9] представляет интерес изучение интегральных уравнений с двумя логарифмическими особенностями в ядре, одна из которых получается из другой в результате сдвига. Как обобщение уравнения (1) на случай двух «подвижных» логарифмических особенностей, содержащихся в интегральном уравнении, можно рассмотреть в качестве модельного уравнение

$$A(t)\left(\int\limits_{\alpha_{-1}(t)}^{b}\varphi(\tau)d\tau-g(t)\int\limits_{t}^{b}\varphi(\tau)d\tau\right)+B(t)\int\limits_{\Gamma}\varphi(\tau)d\tau\left(\int\limits_{a}^{\alpha(\tau)}\frac{p(\xi)}{\xi-t}d\xi-\int\limits_{a}^{\tau}\frac{g(\xi)p(\xi)}{\xi-t}d\xi\right)=f(t). \quad (2)$$

Это уравнение связано с линейным функциональным уравнением

$$\left(F_g(\psi)\right)(t)\equiv\psi(\alpha(t))-g(t)\psi(t)=h(t). \quad (3)$$

Имеется большое количество публикаций, связанных с уравнением (3) и его обобщениями [10]. В [10] исследования проводились в классах непрерывных функций.

В работе исследуются свойства решений уравнения (3). Цель статьи – найти условия существования и единственности решения уравнения (3) в классах A_p первообразных от лебеговских функций, если коэффициент и правая часть также принадлежит A_p. Эти условия зависят от значений коэффициента $g(t)$ уравнения на концах кривой. Показано, что если коэффициент и правая часть уравнения (3) принадлежат A_p, то и решение принадлежат A_p.

Обозначения и вспомогательные утверждения

Класс непрерывных на Γ функций обозначим C^{Γ} или просто C. Класс функций φ, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ:

$$\left|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right|<K\left|t_1-t_2\right|^{\mu},\quad t_1,t_2\in\Gamma,\ 0<\mu\le 1,$$

обозначим $H_{\mu}^{\Gamma}(K)$, или сокращенно $H_{\mu}(K)$ или H_{μ}; $H_{\mu}^{\Gamma}=\bigcap\limits_{0<\nu<\mu}H_{\nu}^{\Gamma}$. Класс абсолютно интегрируемых на Γ со степенью p функций обозначим L_p^{Γ}, или сокращенно L_p. Класс первообразных от L_p обозначим A_p; $A_p^{\Gamma}=\bigcap\limits_{1\le q<p}A_q^{\Gamma}$, $p>1$.

Пусть $\alpha=\alpha(t)$, $t\in\Gamma$ – отображение кривой Γ на себя со свойствами:

1. α – взаимно однозначное непрерывное отображение кривой Γ на себя с сохранением принятой на Γ ориентации;
2. На Γ не существует других неподвижных точек (н.т.), кроме a и b;
3. Для всех $t\in\Gamma$ существует $\alpha'(t)\ne 0$, причем $\alpha'\in H_{\theta}$ на Γ, $\theta\in(0;1]$;
4. $\left|\alpha'(a)\right|\ne 1$, $\left|\alpha'(b)\right|\ne 1$.

Будем применять обозначения: $\alpha_0(t)\equiv t$, $\alpha_1(t)\equiv\alpha(t)$, $\alpha_n(t)\equiv\alpha(\alpha_{n-1}(t))$, $\alpha_{-1}(t)$ – обратное к α отображение, $\alpha_{-n}(t)\equiv\alpha_{-1}(\alpha_{-n+1}(t))$, $n=\overline{1,\infty}$. Очевидно, $\alpha_n(\alpha_{-n}(t))\equiv\alpha_{-n}(\alpha_n(t))\equiv t$.

Если для всех $t\in(a;b)$ $\alpha(t)\in(a;t)$, то точку a будем называть *притягивающей неподвижной точкой* (п. н. т.). Если для всех $t\in(a;b)$ $\alpha(t)\in(a;t)$, то точку b будем называть *отталкивающей неподвижной точкой* (о.н.т.). Очевидно, что всегда либо точка a – п. н. т., а точка b – о. н. т., либо наоборот, a – о. н. т., а точка b – п. н. т.

Всюду в работе полагаем, что a – п. н. т., а точка b – о. н. т. В этом случае условие 4 можно заменить на условие

4*. $\left|\alpha'(a)\right|<1$, $\left|\alpha'(b)\right|>1$.

Заметим, что все утверждения, относящиеся к о. н. т., следуют из соответствующих утверждения для п. н. т.

Пусть $c\in(a;b)$. Введем обозначение: $I_n(c)=\left[\alpha_n(c);\alpha_{n-1}(c)\right]$, $n=\overline{1,\infty}$.

Критерий Ф. Рисса принадлежности функции классу $A_p, p>1$ для действительных функций, заданных на отрезке действительной прямой, имеет место в рассматриваемой ситуации, то есть для комплекснозначных функций на простой гладкой кривой, заданной на комплексной плоскости. Сформулируем его в виде следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $\Gamma=[a;b]$ – простая гладкая кривая. Определенная на Γ комплексная комплекснозначная функция $\varphi\in A_p, p>1$, тогда и только тогда, когда для любой последовательности точек на Γ $\left\{t_j, j=0,...,n: t_0=a, t_n=b, t_j\in\left(t_{j-1};t_{j+1}\right), j=1,...,n-1\right\}$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\left|\varphi\left(t_{j+1}\right)-\varphi\left(t_j\right)\right|^p}{\left|t_{j+1}-t_j\right|^{p-1}}<K,$$

где постоянная K не зависит от $\left\{t_j, j=0,...,n\right\}$.

Основные результаты

Введем обозначение

$$G_n(t)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{g\left(\alpha_j(t)\right)}{g(a)},\ G_0(t)\equiv 1,\ \ G_{-n}(t)=\prod_{j=1}^{n}\frac{g(b)}{g\left(\alpha_{-j}(t)\right)},\ \ n=\overline{1,\infty}\ . \tag{4}$$

Сначала сформулируем две теоремы, относящиеся к полуоткрытым промежуткам гладких кривых.

Теорема 1. Пусть $h,g\in H_\mu,\ g(t)\neq 0, t\in[a;b)$. Пусть $\left|g(a)\right|>1$. Тогда существует единственное решение уравнения (3) в классе $C^{[a;b)}$ [10]:

$$\psi(t)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h\left(\alpha_k(t)\right)}{\prod_{j=0}^{k}g\left(\alpha_j(t)\right)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h\left(\alpha_k(t)\right)}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}\ . \tag{5}$$

Если $g,h\in A_p^{[a;b)},\ p>1$, то $\psi\in A_p^{[a;b)}$.

Введем обозначения. Пусть точка $c\in(a;b)$ – произвольна; обозначим через $C_{c,g,h}$ класс функций f, непрерывных на $I_0(c)=\left[\alpha(c);c\right]$ и удовлетворяющих условию:

$$f\left(\alpha(c)\right)-g(c)\,f(c)=h(c).$$

Пусть K – произвольный класс функций; положим по определению:

$$K_{c,g,h}=C_{c,g,h}\cap K\ .$$

Теорема 2. Пусть $c\in(a;b)$ – произвольна; $\psi_0\in C_{c,g,h}$ – произвольна. Пусть $h,g\in H_\mu,\ g(t)\neq 0, t\in(a;b]$. Пусть $\left|g(b)\right|>1$. Тогда уравнение (3) разрешимо в классе $C^{(a;b]}$. Его общее решение имеет вид:

$$\psi(b)=\frac{h(b)}{1-g(b)}\,,$$

$$\psi(t)=\begin{cases}\prod\limits_{j=0}^{n-1}g\left(\alpha_{j-n}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_{-n}(t)\right)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}h\left(\alpha_{k-n}(t)\right)\prod\limits_{j=k+1}^{n-1}g\left(\alpha_{j-n}(t)\right),\ t\in I_n(c),\ n=2;3;...\\ g\left(\alpha_{-1}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_{-1}(t)\right)+h\left(\alpha_{-1}(t)\right),\ t\in I_1(c),\\ \psi_0(t),\ t\in I_0(c),\\ \prod\limits_{j=1}^{n-1}g^{-1}\left(\alpha_{j-n}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_n(t)\right)-\sum\limits_{k=1}^{n}h\left(\alpha_{n-k}(t)\right)\prod\limits_{j=k}^{n}g^{-1}\left(\alpha_{n-j}(t)\right),\ t\in I_{-n}(c),\ n=1;2;...\end{cases} \tag{6}$$

Если $\mu < \log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|$, то $\psi \in H_\mu^{(a;b]}$. Если $g,h \in A_p^{(a;b]}$, $p>1$, $\psi_0 \in A_{p_0,c,g,h}^{(a;b]}$, $p_0>1$, то $\psi \in A_{p_b}^{(a;b]}$ для $p_b = \min\left\{p; p_0; p_b^*\right\}$, $p_b^* = \left(1-\log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|\right)^{-1}$, если $|g(b)|<|\alpha'(b)|$, и $p_b^* = +\infty$ в остальных случаях.

Следующая теорема является следствием теорем 1 и 2.

Теорема 3. Пусть $h,g \in H_\mu$, $g(t)\neq 0, t\in[a;b]$. Пусть $|g(a)|>1$, $|g(b)|>1$. Тогда существует единственное решение уравнения (3) в классе $C^{[a;b]}\left(b^0\right)$. Оно определяется формулами:

$$\psi(a) = \frac{h(a)}{1-g(a)},\quad \psi(t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h(\alpha_k(t))}{\left(g(a)\right)^{k+1}G_{k+1}(t)},\ t\in(a;b].$$

Если $\mu < \log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|$, то $\psi \in H_\mu^{[a;b]}$.

Если $g,h \in A_p^{[a;b]}$, $p>1$, $\dfrac{p-1}{p} < \log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|$, то $\psi \in A_p^{[a;b]}$.

Теорема 4. Пусть $h,g \in H_\mu$, $g(x)\neq 0,\ x\in[a;b]$. Пусть $|g(a)|\geq 1$, $|g(b)|\leq 1$. Тогда для существования решения уравнения (3) в классе $C^{[a;b]}\left(b^0\right)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{h(\alpha_k(t))}{\left(g(a)\right)^{k+1}G_{k+1}(t)} = 0,\ t\in(a;b) \tag{7}$$

При выполнении (7) решение уравнения (3) единственно, причем $\psi \in H_\mu^{[a;b]}$. Если $g,h \in A_p^{[a;b]}$, $p>1$, то $\psi \in A_p^{[a;b]}$.

Замечание. Если $g(a)=1$, $|g(b)|>1$ или $|g(a)|<1$, $|g(b)|>1$, то решение уравнения (3) не единственно. В первом случае решения существуют тогда и только тогда, когда $h(a)=0$, а общее решение является однопараметрическим семейством функций. Во втором случае уравнение (3) имеет континуум линейно независимых решений в классе непрерывных на $[a;b]$ функций. В работе эти случаи не рассматриваются.

Доказательство теоремы 1

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. Пусть $\Gamma = [a;b]$ – гладкая в некоторой окрестности точки a кривая, r – действительное число, такое что

$$|\alpha'(a)| < r < 1.$$

Тогда: существует такая окрестность $V(a)$ точки a на кривой Γ и такое натуральное число N, зависящее только от r, что для любых точек $t_1, t_2 \in V(a)$ и любых целых $m,n \geq N$

$$|\alpha_n(t_1)-\alpha_m(t_2)| < r|\alpha_{n-1}(t_1)-\alpha_{m-1}(t_2)|,$$

существует число K такое, что для любых точек $t\in V(a)$

$$|\alpha_n(t)-a| < K_1 r^n.$$

Следствие. В условиях леммы 2 для $k=0;1;2;\ldots$

$$|\alpha_k(t_1)-\alpha_k(t_2)| < r^k|t_1-t_2|.$$

Лемма 3. Пусть $\Gamma=[ab]$ – гладкая в некоторой окрестности $[ac]$ точки a кривая, функция $g(t)\neq 0,\ g(t)\in H_\mu,\ t\in[ac]$. Тогда последовательность $\{G_n(t),\ n=1;2;...\}$ равномерно сходится на $[a;c]$,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t)=G_a(t)\neq 0,\infty .$$

В частности, если функция g непрерывна на $[ab)$, то и $G_a(t)$ непрерывна на $[ab)$; $G_a(a)=1$.

Сформулируем неравенство Гельдера для числовых рядов в форме:

Лемма 4. Пусть $\{a_j,\ j=0;1;2;...\}$ и $\{b_j,\ j=0;1;2;...\}$ – последовательности действительных чисел, $a_j\geq 0,\ b_j\geq 0,\ j=0;1;2;...$. Пусть сходятся ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} b^{\frac{p}{p-1}}=G^{\frac{1}{p-1}},\quad \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{a_j}{b_j}\right)^p .$$

Тогда сходится ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$, причем

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)^p \leq G\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{a_j}{b_j}\right)^p . \tag{8}$$

Доказательство теоремы 1.

Шаг 1. Пусть $c\in(a;b),\ f\in A_p$ на $[a;c]$, $|f(a)|<1$. Тогда

$$\prod_{k=0}^{j} f(\alpha_k(t))\in A(p,L),$$

где постоянная L не зависит от j.

Доказательство шага 1. Из условия следует, что существуют число r_1 и отрезок $[a;c_1]\subseteq[a;c]$ такие, что для $t\in[a;c_1]$ $|f(t)|<r_1<1$. Существует $k_0\in\{0;1;2;...\}$ такое, что для $k\geq k_0$ $f(\alpha_k(t))\in[a;c_1]$ и, следовательно,

$$|f(\alpha_k(t))|<r_1<1,\ \text{если}\ t\in[a;c]. \tag{9}$$

Из условия $f\in A_p$ на $[a;c]$ и леммы 1 следует, что если $\{t_0;...;t_n\}\subseteq[a;c]$, $t_0=a;\ t_n=c$, то

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{|f(t_{m+1})-f(t_m)|^p}{|t_{m+1}-t_m|^{p-1}}\leq M ,$$

где M не зависит от выбора $\{t_0;...;t_n\}$. Из следствия леммы 2 тогда следует:

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{|f(\alpha_k(t_{m+1}))-f(\alpha_k(t_m))|^p}{|t_{m+1}-t_m|^{p-1}}\leq \sum_{m=0}^{n}\frac{|f(\alpha_k(t_{m+1}))-f(\alpha_k(t_m))|^p}{|\alpha_k(t_{m+1})-\alpha_k(t_m)|^{p-1}}\frac{|\alpha_k(t_{m+1})-\alpha_k(t_m)|^{p-1}}{|t_{m+1}-t_m|^{p-1}}\leq$$

$$\leq r^{k(p-1)}\sum_{m=0}^{n}\frac{|f(\alpha_k(t_{m+1}))-f(\alpha_k(t_m))|^p}{|\alpha_k(t_{m+1})-\alpha_k(t_m)|^{p-1}}\leq M\,r^{k(p-1)} . \tag{10}$$

Пусть $|f(t)|<M_1$ на $[a;c]$ для некоторого M_1. Очевидно,

$$\left|\prod_{k=0}^{k_0-1} f(\alpha_k(t))\right|\leq M_1^{k_0} . \tag{11}$$

Докажем, что для $\prod\limits_{k=0}^{j} f(\alpha_k(t))$ выполняется условие леммы 1.

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{\left|\prod_{k=0}^{j}f\left(\alpha_k\left(t_{m+1}\right)\right)-\prod_{k=0}^{j}f\left(\alpha_k\left(t_m\right)\right)\right|^p}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}\le M_1^{k_0}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left|\prod_{k=k_0}^{j}f\left(\alpha_k\left(t_{m+1}\right)\right)-\prod_{k=k_0}^{j}f\left(\alpha_k\left(t_m\right)\right)\right|^p}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}\le$$

(следует из (11))

$$M_1^{k_0}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left|\sum_{l=l_0}^{j}\Big(f\left(\alpha_l\left(t_{m+1}\right)\right)-f\left(\alpha_l\left(t_m\right)\right)\Big)\prod_{k=l_0}^{l-1}f\left(\alpha_k\left(t_m\right)\right)\prod_{k=l+1}^{j}f\left(\alpha_k\left(t_{m+1}\right)\right)\right|^p}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}\le$$

(для удобства записи формул считаем, что $\prod_{l_0}^{l_0-1}$, $\prod_{j+1}^{j}$ равны 1)

$$M_1^{k_0}\sum_{m=0}^{n}\frac{j^{p-1}\sum_{l=l_0}^{j}\left|\Big(f\left(\alpha_l\left(t_{m+1}\right)\right)-f\left(\alpha_l\left(t_m\right)\right)\Big)\right|^p r_1^{j-k_0}}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}\le$$

(здесь использовано (9) и неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^p\le n^{p-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^p,\ \ x_i\ge 0\ ) \qquad (12)$$

$$M_1^{k_0}\sum_{l=0}^{j}j^{p-1}r_1^{j-k_0}\frac{\sum_{m=0}^{n}\left|\Big(f\left(\alpha_l\left(t_{m+1}\right)\right)-f\left(\alpha_l\left(t_m\right)\right)\Big)\right|^p}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}\le M_1^{k_0}M\,j^{p-1}r_1^{j-k_0}\sum_{l=0}^{j}r^{l(p-1)}\le$$

(здесь использовано неравенство (10))

$$M_1^{k_0}M\,j^{p-1}r_1^{j-k_0}\,S\,,\ S=\sum_{l=0}^{\infty}r^{l(p-1)}.$$

Пусть $\max\left\{j^{p-1}r_1^{j-k_0},\ j=1;2;...\right\}=M_2$. Тогда $\prod_{k=0}^{j}f\left(\alpha_k\left(t\right)\right)\in A\left(p,L\right)$, где $L=M\,M_1^{k_0}M_2\,S$ и не зависит от j.

Шаг 2. Подготовимся к проверке выполнения критерия Ф. Рисса (лемма 1) для функции (6). Введем обозначение для удобства записи формул:

$$H_j\left(t\right)=\frac{1}{g^{j+1}\left(a\right)G_{j+1}\left(t\right)}=\frac{1}{\prod_{k=0}^{j}g\left(\alpha_k\left(t\right)\right)},\ \ j=0;1;..., \qquad (13)$$

где $G_j\left(t\right)$ определено формулой (4). Так как $\left|g^{-1}\left(a\right)\right|<1$ и $g^{-1}\left(t\right)\in A_p$, то, как следствие первого шага,

$$H_j\in A\left(p,L\right),$$

причем L не зависит от j. По лемме 3 функция H_j равномерно ограничена по j на $\left[a;c\right]$, то есть существует число M_3 такое, что $\left|H_j\left(t\right)\right|<M_3$ на $\left[a;c\right]$ для всех $j=0;1;...$. Используя обозначение (13) и формулу (5), запишем:

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{\left|\psi\left(t_{m+1}\right)-\psi\left(t_m\right)\right|^p}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}=\sum_{m=0}^{n}\frac{\left|\sum_{j=0}^{\infty}\Big(h\left(\alpha_j\left(t_{m+1}\right)\right)H_j\left(t_{m+1}\right)-h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right)H_j\left(t_m\right)\Big)\right|^p}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}\le S_1+S_2\,, \qquad (14)$$

где

$$S_1 = 2^{1-p} \sum_{m=0}^{n} \frac{\left| \sum_{j=0}^{\infty} h\left(\alpha_j\left(t_{m+1}\right)\right)\left(H_j\left(t_{m+1}\right) - H_j\left(t_m\right)\right) \right|^p}{\left|t_{m+1} - t_m\right|^{p-1}} \le$$

$$\le 2^{1-p} \sum_{m=0}^{n} \frac{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| h\left(\alpha_j\left(t_{m+1}\right)\right)\left(H_j\left(t_{m+1}\right) - H_j\left(t_m\right)\right) \right| \right)^p}{\left|t_{m+1} - t_m\right|^{p-1}}, \tag{15}$$

$$S_2 = 2^{1-p} \sum_{m=0}^{n} \frac{\left| \sum_{j=0}^{\infty} H_j\left(t_{m+1}\right)\left(h\left(\alpha_j\left(t_{m+1}\right)\right) - h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right)\right) \right|^p}{\left|t_{m+1} - t_m\right|^{p-1}} \le$$

$$\le 2^{1-p} \sum_{m=0}^{n} \frac{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| H_j\left(t_{m+1}\right)\left(h\left(\alpha_j\left(t_{m+1}\right)\right) - h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right)\right) \right| \right)^p}{\left|t_{m+1} - t_m\right|^{p-1}}, \tag{16}$$

причем неравенство (14) следует из неравенства (12) при $n = 2$, а неравенства (15) и (16) верны, если ряды из модулей в их правых частях сходятся, что будет показано ниже.

Шаг 3. Рассмотрим частный случай, когда $h(a) = 0$.

Оценим слагаемое S_1. Временно обозначим:

$$u_j = \left| h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right)\left(H_j\left(t_{m+1}\right) - H_j\left(t_m\right)\right) \right|, \; v_j = r^{\frac{p-1}{2p} j}. \tag{17}$$

Так как $h(a) = 0$ по предположению и $h \in A_p \subseteq H_{\frac{p-1}{p}}$, то

$$\left| h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right) \right| \le \left| h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right) - h(a) \right| \le M_4 \left| \alpha_j\left(t_m\right) - a \right|^{\frac{p-1}{p}} \tag{18}$$

для некоторой постоянной M_4. Используя обозначения (17), неравенство $\left| H_j(t) \right| < M_3$ для всех $j = 1; 2; 3; ...$ на $[a; c]$, неравенство (18) и лемму 2, получим:

$$\frac{u_j}{v_j} \le \frac{2M_3 M_4 \left| \alpha_j\left(t_m\right) - a \right|^{\frac{p-1}{p}}}{v_j} \le \frac{2M_3 M_4 K^{\frac{p-1}{p}} r^{\frac{p-1}{p} j}}{v_j} \le M_5 r^{\frac{p-1}{2p} j},$$

где $M_5 = 2M_3 M_4 K^{\frac{p-1}{p}}$, постоянная K введена в лемме 2. Поэтому ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{u_j}{v_j} \right)^p$ сходится, что доказывает неравенства (15) и (16). Неравенство (8) леммы 4 в обозначениях (17) имеет вид:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j \right)^p \le G \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{u_j}{v_j} \right)^p = G \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left| h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right)\left(H_j\left(t_{m+1}\right) - H_j\left(t_m\right)\right) \right|^p}{r^{j\left(\frac{p-1}{2}\right)}}. \tag{19}$$

Используя обозначения (17) и неравенство (19), получим:

$$S_1 \le 2^{1-p} G \sum_{m=0}^{n} \frac{\sum_{j=0}^{\infty} r^{-j\left(\frac{p-1}{2}\right)} \left| h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right)\left(H_j\left(t_{m+1}\right) - H_j\left(t_m\right)\right)^p \right|}{\left|t_{m+1} - t_m\right|^{p-1}} \le$$

$$2^{1-p}G\sum_{m=0}^{n}\frac{\sum_{j=0}^{\infty}r^{-j\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(Kr^{i}\right)^{p-1}\left|H_j\left(t_{m+1}\right)-H_j\left(t_m\right)\right|^p}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}\le$$

$$2^{1-p}GK^{p-1}\sum_{j=0}^{\infty}r^{j\left(\frac{p-1}{2}\right)}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left|H_j\left(t_{m+1}\right)-H_j\left(t_m\right)\right|^p}{\left|t_{m+1}-t_m\right|^{p-1}}\le 2^{1-p}GK^{p-1}L\sum_{j=0}^{\infty}r^{j\left(\frac{p-1}{2}\right)}=K_1$$

Сумма S_1 оценена константой, обозначенной K_1.

Оценим слагаемое S_2. В этом случае временно обозначим:

$$u_j=\left|h\left(\alpha_j\left(t_{m+1}\right)\right)-h\left(\alpha_j\left(t_m\right)\right)\right|,\ v_j=r^{\frac{p-1}{2p}j}.$$

Тогда из леммы 2 и $h\in H_{\frac{p-1}{p}}$ следует:

$$\frac{u_j}{v_j}\le\frac{M_4\left|\alpha_j\left(t_{m+1}\right)-\alpha_j\left(t_m\right)\right|^{\frac{p-1}{p}}}{v_j}\le M_6 r^{\frac{p-1}{2p}j}.$$

Применяя неравенство (8) леммы 4, оценим S_2 точно так же, как S_1. Пусть $S_2\le K_2$. Следовательно, для функции ψ, заданной формулой (5),

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\left|\psi\left(t_{j+1}\right)-\psi\left(t_j\right)\right|^p}{\left|t_{j+1}-t_j\right|^{p-1}}<K_1+K_2,$$

откуда в силу леммы 1 $\psi(t)\in A_p,\ t\in[a;c]$.

Шаг 4. Пусть теперь не обязательно $h(a)=0$. Очевидно, уравнение (3) равносильно уравнению

$$\chi\left(\alpha(t)\right)-g(t)\chi(t)=h_1(t),$$

где

$$\chi(t)=\psi(t)-\frac{h(a)}{1-g(a)},\ h_1(t)=h(t)-\frac{h(a)}{1-g(a)}\left(1-g(t)\right).$$

Так как $h_1(a)=0$, $\chi(t)\in A_p,\ t\in[a;c]$, а, следовательно, $\psi(t)\in A_p,\ t\in[a;c]$, что завершает доказательство теоремы 1.

Приложение к сингулярным интегральным уравнениям

Рассмотрим уравнение (2). Воспользуемся формулой перестановки порядка интегрирования в повторном интеграле [7]:

$$\int_{\Gamma}\varphi(\tau)d\tau\int_a^{\tau}\frac{p(\xi)}{\xi-t}d\xi=\int_{\Gamma}\frac{p(\xi)}{\xi-t}d\xi\int_{\xi}^{b}\varphi(\tau)d\tau. \qquad (20)$$

Здесь $\Gamma=[a;b]$ – простая гладкая кривая, внутренний интеграл в левой части при $t\in(a;\tau)$ и интеграл в правой части существуют в смысле главного значения, а внешний интеграл левой части существует по крайней мере как несобственный. Из формулы (20) следует

Лемма 5. Пусть $\Gamma=[a;b]$ – простая гладкая кривая, $c\in(a;b)$. Пусть функция φ интегрируема по Лебегу на $[c;b]$, причем

$$\psi(t)=\int_t^b\varphi(\tau)d\tau\in H^{[c;b]}, \qquad (21)$$

функция $p \in H^{[c;b]}$, а функция α задана на $\Gamma = [a;b]$ и удовлетворяет условиям 1–4. Тогда

$$\int_c^b \varphi(\tau)d\tau \int_{\alpha(c)}^{\alpha(\tau)} \frac{p(\xi)}{\xi - t} d\xi = \int_{\alpha(c)}^{b} \frac{p(\xi)}{\xi - t} d\xi \int_{\alpha_{-1}(\xi)}^{b} \varphi(\tau)d\tau, \quad t \in (a;b). \tag{22}$$

Здесь внутренний интеграл в левой части при $t \in (\alpha(c);\alpha(\tau))$ и интеграл в правой части существуют в смысле главного значения.

Переходя в (22) к пределу при $c \to a$, получаем:

$$\int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau \int_a^{\alpha(\tau)} \frac{p(\xi)}{\xi - t} d\xi = \int_\Gamma \frac{p(\xi)}{\xi - t} d\xi \int_{\alpha_{-1}(\xi)}^{b} \varphi(\tau)d\tau, \quad t \in (a;b). \tag{23}$$

Из (20) и (23) следует:

$$\int_\Gamma \varphi(\tau)d\tau \left(\int_a^{\alpha(\tau)} \frac{p(\xi)}{\xi - t} d\xi - \int_a^{\tau} \frac{g(\xi)p(\xi)}{\xi - t} d\xi \right) = \int_\Gamma \frac{p(\xi)}{\xi - t} d\xi \left(\int_{\alpha_{-1}(t)}^{b} \varphi(\tau)d\tau - g(t)\int_t^b \varphi(\tau)d\tau \right).$$

Тогда (2) приобретает вид:

$$A(t)\left(\int_{\alpha_{-1}(t)}^{b} \varphi(\tau)d\tau - g(t)\int_t^b \varphi(\tau)d\tau \right) + B(t)\int_\Gamma \frac{p(\xi)}{\xi - t} d\xi \left(\int_{\alpha_{-1}(t)}^{b} \varphi(\tau)d\tau - g(t)\int_t^b \varphi(\tau)d\tau \right) = f(t)$$

или

$$A(t)\nu(t) + B(t)\int_\Gamma \frac{p(\xi)\nu(\xi)}{\xi - t} d\xi = f(t), \tag{24}$$

где обозначено:

$$\int_{\alpha_{-1}(t)}^{b} \varphi(\tau)d\tau - g(t)\int_t^b \varphi(\tau)d\tau = \nu(t),$$

то есть (см. (21))

$$\psi(\alpha_{-1}(t)) - g(t)\psi(t) = \nu(t). \tag{25}$$

Поэтому для решения уравнения (2) следует решить сингулярное интегральное уравнение (24), полученное решение подставить в правую часть функционального уравнения (25); решение этого уравнения, в соответствии с (21), продифференцировать. Если решение уравнения (24) принадлежит $L_p, p \ge 1$, то решение уравнения (2) также принадлежит L_p.

Литература

1. Carleman, T. Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen / T. Carleman // Mathematische Zeitschrift. – 1922. – Vol. 15, Iss. 1. – P. 111–120.

2. Чибрикова, Л.И. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами / Л.И. Чибрикова, Н.Б. Плещинский // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 6. – С. 91–104.

3. Мусхелишвили, А.И. Сингулярные интегральные уравнения / А.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

4. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

5. Хведелидзе, Б.В. Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной / Б.В. Хведелидзе // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. – 1975. – Т. 7. – С. 5–162.

6. Дильман, В.Л. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p, $p > 1$ / В.Л. Дильман, Л.И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 4. – С. 26–36.

7. Litvinchuk, G.S. Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift / G.S. Litvinchuk. – Springer Science +Business Media, 2012. – 378 p.

8. Kravchenko, V.G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Springer Science+Business Media, 2014. – 308 p.

9. Карлович, Ю.И. Теория Нётера сингулярных интегральных операторов со сдвигом / Ю. И. Карлович, В. Г. Кравченко, Г. С. Литвинчук // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 3–27.

10. Kuczma, M. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Katowice, 1985.

Поступила в редакцию 22 октября 2021 г.

Сведения об авторах

Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9197-3497, e-mail: dilmanvl@susu.ru

Комиссарова Дарья Амировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/ 0000-0003-0590-3981, e-mail: komissarovada@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 4, pp. 13–23

DOI: 10.14529/mmph210402

EXISTENCE AND UNIQUENESS CONDITIONS FOR SOLUTIONS OF LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS IN THE CLASSES OF LEBESGUE FUNCTIONS ANTIDERIVATIVES ON A SIMPLE SMOOTH CURVE

V.L. Dilman, D.A. Komissarova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: dilmanvl@susu.ru, komissarovada@susu.ru

The article describes linear functional equations on simple smooth curves with a shift function and fixed points only at the ends of the curve. The case when the shift function has a nonzero derivative satisfying the Hölder condition is considered. The objective of the article is to find the conditions of the existence and uniqueness of such equations solution in the classes of Lebesgue functions antiderivatives with a coefficient and the right-hand part belonging to the same classes. These conditions depend on the values of the equation coefficient at the ends of the curve. It is shown that if the coefficient and the right-hand side of a functional equation belong to the class of Lebesgue functions antiderivatives, then its solution also belongs to this class. The indicators of Hölder and of classes of Lebesgue functions antiderivatives are determined for the solutions. The research method is based on F. Riesz's criterion of a function's belonging to the class of antiderivatives of Lebesgue integrable functions. The possibilities of applying linear functional equations for studying and solving singular integral equations with logarithmic singularities are shown.

Keywords: singular integral equations with a shift; linear functional equations with a single variable; classes of Lebesgue functions antiderivatives.

References

1. Carleman T. Über die Abelsche Integralgleichung mit Konstanten Integrationsgrenzen. *Mathematische Zeitschrift*, 1922, Vol. 15, Iss. 1, pp. 111–120. DOI: 10.1007/bf01494386

2. Chibrikova L.I., Pleshchinskiĭ N.B. Integral Equations with Generalized Logarithmic and Power Kernels. *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1976, Vol. 20, no. 6, pp. 80–92.

3. Muskhelishvili A.I. *Singulyarniye integral'niye uravneniya* (Singular Integral Equations). Moscow, Nauka Publ., 1968, 511 p. (in Russ.).

4. Gakhov F.D. *Krayeviye zadachi* (Boundary Value Problems), Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russ.).

5. Khvedelidze B.V. The Method of Cauchy-type Integrals in the Discontinuous Boundary-Value Problems of the Theory of Holomorphic Functions of a Complex Variable. *Journal of Soviet Mathematics*, 1977, Vol. 7, no. 3, pp. 309–415. DOI: 10.1007/BF01091836

6. Dil'man V.L., Chibrikova L.I. Solutions of an Integral Equation with Generalized Logarithmic Kernel in L_p, $p > 1$. *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1986, Vol. 30, no. 4, pp. 33–46.

7. Litvinchuk G.S. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Springer Science +Business Media, 2012, 378 p.

8. Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift.* Springer Science+Business Media, 2014, 308 p.

9. Karlovich Yu.I., Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. Noether's Theory of Singular Integral Operators with Shift. *Soviet Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1983, Vol. 27, no. 4, pp. 1–34.

10. Kuczma M. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Katowice, 1985.

Received October 22, 2021

Information about the authors

Dilman Valeriy Leyzerovich, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9197-3497, e-mail: dilmanvl@susu.ru

Komissarova Dar'ya Amirovna, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/ 0000-0003-0590-3981, e-mail: komissarovada@susu.ru