Краткие сообщения

УДК 519.17 DOI: 10.14529/mmph210409

МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕРШИННЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЦВЕТНЫХ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

П.В. Разумовский, М.Б. Абросимов
Саратовский государственный университет, г. Саратов, Российская Федерация
E-mail: shprotby@gmail.com, mic@rambler.ru

Предлагаются к рассмотрению результаты поиска минимальных вершинных расширений для неориентированных цветных полных графов. Данная тематика непосредственно связана с моделированием полных отказоустойчивых технических систем с элементами различного типа в терминологии графов. Если описывать техническую систему как Σ, то ей сопоставляется некоторый граф $G(\Sigma)$, в котором вершины соответствуют элементам системы Σ, а ребра – связям между ними. Тип каждого элемента выражается в сопоставлении каждой вершине графа $G(\Sigma)$ некоторого цвета из множества цветов $F = \{1, 2\ldots, i\}$. Вершинным расширением данной системы тогда является некоторый граф $G(\Sigma)$, в котором введены избыточные вершины и при котором система, ему соответствующая, способна продолжать работу в присутствии k отказов любых её элементов. Полным граф называется тогда, когда любые две его вершины соединены ребром. Полные графы не имеют реберных расширений по определению – не существует способа добавить ребро в граф с максимальным количеством ребер. Другими словами, система, представленная полным графом, не способна противостоять отказам связей между своими элементами. Поэтому данная работа целиком посвящена исследованию минимальных вершинных расширений. Описываются условия существования минимальных вершинных расширений для цветных полных графов, приводятся схемы построения и формулы, по которым можно вычислить необходимое количество дополнительных ребер для построения минимального вершинного расширения цветного полного графа.

Ключевые слова: вершинные расширения графов; полные графы; минимальные расширения графов; расширения цветных графов; цветные графы.

Введение

При проектировании технических систем особое внимание уделяется свойству отказоустойчивости. Отказоустойчивость как свойство дискретной системы впервые была введена А. Авиженисом [1] и трактуется как обеспечение системы способностью противостоять ошибке и возможностью продолжать работу в присутствии этой ошибки.

Следующим шагом в исследовании данной проблемы стало переложение Д. Хейзом в 1976 году [2] задачи построения отказоустойчивых дискретных систем на модель, основанную на графах. В этой модели технической системе сопоставляется граф. Элементам системы соответствуют вершины графа, а связям между элементами – ребра (или дуги) графа. Отказом элемента системы является удаление вершины из графа со всеми инцидентными ребрами.

Позднее Джон Хейз в 1990-х годах совместно с американским математиком Фрэнком Харари обобщили модель на случай отказов связей между элементами [3]. При этом модель с рассматриваемым отказом элементов было предложено называть системой с вершинной отказоустойчивостью [4].

М.Б. Абросимов в своих работах [5] предложил использовать термины «вершинное расширение графа» и «реберное расширение графа» для модели вершинной отказоустойчивости и реберной отказоустойчивости соответственно.

На практике технические системы состоят из элементов различного типа. В контексте переложения подобных систем на графовую модель предлагается рассматривать расширения для цветных графов. В данном случае элементу системы заданного типа сопоставляется вершина с заданным на ней цветом. Таким образом, рассмотрение расширений цветных графов позволит конструировать отказоустойчивые технические системы с комбинацией элементов различных типов.

Первыми результатами исследования заданной проблемы стали алгоритмы построения всех неизоморфных цветных графов заданного количества вершин, ребер и цветов [6].

Следующим этапом в исследовании цветных графов и их расширений стал поиск решения задачи минимальных вершинных и реберных расширений для найденных неизоморфных цветных графов. Был разработан алгоритм поиска всех неизоморфных минимальных расширений для заданного цветного графа. Результаты были опубликованы в работе [7]. Цветные минимальные расширения, полученные после запуска реализации данного алгоритма, позволили проанализировать различные классы графов и найти для них общие схемы построения.

Данная работа содержит схемы построения минимальных вершинных расширений для цветных полных графов всех возможных конфигураций. Предварительные результаты для минимальных вершинных 1-расширений были представлены на конференции «Ломоносов 2021» [8]. В настоящей работе публикуются законченные результаты исследования цветных полных графов.

Определения и обозначения

Для начала дадим основные определения и обозначения, которые будут использоваться в настоящей работе. Основные понятия теории графов даны в соответствии с [9]. Определения минимальных расширений графов даны в соответствии с [5].

Определение 1. Граф $K_n = (V,\alpha)$, где $|V| = n$, называется *полным*, если у него любые две вершины смежны: $u,v \in V, u \neq v : (u,v) \in \alpha$.

Определение 2. Пусть $G = (V,\alpha)$ – граф, а $i \in \mathbb{N}$. Функция вида $f : V \to \{1,\ldots,i\}$ называется вершинной i-раскраской графа G, а $f(v), v \in V$ – цветом вершины v. При этом граф называется *графом с цветными вершинами*, или *цветным графом*. Для таких графов вводится следующее обозначение: $G = (V,\alpha,f)$.

Введем несколько дополнительных обозначений. Пусть множество цветов будет обозначаться как $F = \{1,\ldots,i\}$. Тогда цвет будет иметь обозначение $f_i \in F$. Множество $V_{f_i} = \{v \mid v \in V, f(v) = f_i\}$ – набор вершин цвета f_i. Множество $W = \left\{ V_{f_i} \,\middle|\, f_i \in F \right\}$ содержит все множества наборов вершин по цветам. $W^1 = \{V_{f_i} \mid V_{f_i} \in W, |V_{f_i}| = 1\}$ – множества вершин с цветами, встречающимися в графе только единожды. Тогда $W^2 = \{V_{f_i} \mid V_{f_i} \in W, |V_{f_i}| = 1\}$ содержит множества вершин с неуникальными цветами, то есть встречающимися два и более раз в графе.

Определение 3. Граф $G^* = (V^*,\alpha^*,f^*)$ называется вершинным k-расширением (где $k \in \mathbb{N}$) i-цветного графа $G = (V,\alpha,f)$, если граф G вкладывается с учетом цветов в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k вершин.

Определение 4. Граф $G^* = (V^*,\alpha^*,f^*)$ называется минимальным вершинным k-расширением (где $k \in \mathbb{N}$) i-цветного графа $G = (V,\alpha,f)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G является вершинным k-расширением цветного графа G;
2) граф G содержит $|V| + ik$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + ik$;
3) α^* содержит минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Для удобства термин «минимальное вершинное k-расширение» будем сокращать до МВ-k Р.

Минимальные вершинные 1-расширения двухцветных полных графов

Сначала рассмотрим частный случай минимальных вершинных 1-расширений двухцветных полных графов. Данный случай позволит в дальнейшем обобщить данную модель для k-расширений многоцветных графов.

Теорема 1. Для полного графа $K_n = (V, \alpha, f)$ с $F = \{f_0, f_1\}$, $|F| = 2$, $|V_{f_0}| = 1$, $|V_{f_1}| > 1$ найдется минимальное вершинное 1-расширение с количеством дополнительных ребер, равным

$$2n - 1. \quad (1)$$

Схема построения минимального вершинного 1-расширения заключается в следующем:

1. Из дополнительной вершины цвета f_0 проводятся ребра во все исходные вершины цвета f_1.
2. Из дополнительной вершины цвета f_1 проводятся ребра во все исходные вершины.

Пример графа, удовлетворяющего условиям теоремы 1, и его МВ-1Р, построенного по представленной схеме, изображен на рис. 1 и 2 соответственно.

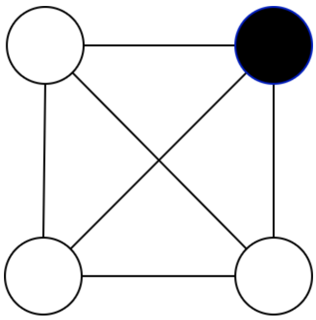

Рис. 1. Граф K_4, удовлетворяющий условиям теоремы 1

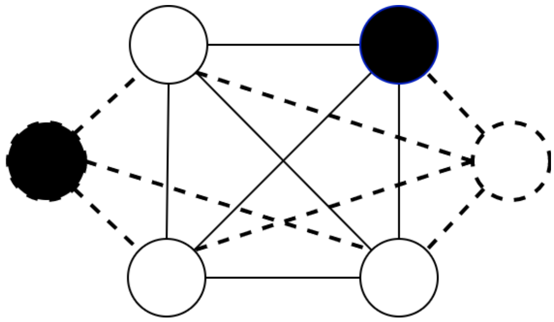

Рис. 2. МВ-1Р представленного графа K_6. Пунктиром изображены дополнительные вершины и ребра

Доказательство. Рассмотрим оба пункта схемы по отдельности.

При удалении исходной вершины цвета f_0 все исходные вершины цвета f_1 теряют свою связь с вершинами цвета f_0. Таким образом, исходный граф становится одноцветным. Для того чтобы восстановить исходный граф, необходимо соединить ребрами дополнительную вершину цвета f_0 со всеми исходными вершинами цвета f_1. Количество дополнительных ребер в данном случае будет равным $n - 1$.

При отказе исходной вершины цвета f_1 граф превращается в полный двухцветный граф K_{n-1}. Чтобы вернуть возможность вложить исходный граф в расширение, необходимо соединить дополнительную вершину цвета f_1 со всеми исходными вершинами со степенью $n - 1$ (вершины, потерявшие ребро после отказа рассматриваемой вершины). С учетом условия вершинного расширения, при котором может быть удалена любая вершина f_1, ребра будут проведены ко всем исходным вершинам. Их общее количество будет равно n.

Итоговая сумма дополнительных ребер будет $n - 1 + n = 2n - 1$.

Теорема 2. Для полного графа $K_n = (V, \alpha, f)$ с $F = \{f_0, f_1\}$, $|F| = 2$, $|V_{f_0}| > 1$, $|V_{f_1}| > 1$ найдется минимальное вершинное 1-расширение с количеством дополнительных ребер, равным:

$$2n. \quad (2)$$

Схема построения минимального 1-расширения:

1. Из дополнительной вершины цвета f_0 проводятся ребра во все исходные вершины.

2. Из дополнительной вершины цвета f_1 проводятся ребра во все исходные вершины.

Пример графа, удовлетворяющего условиям теоремы 2, и его МВ-1Р, построенного по представленной схеме, изображен на рис. 3 и 4 соответственно.

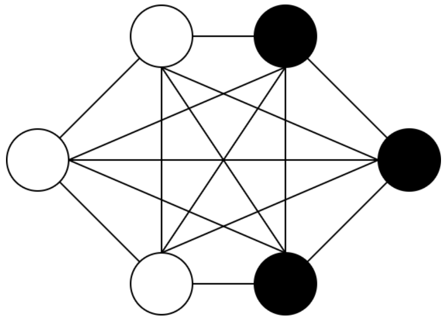

Рис. 3. Граф K_6, удовлетворяющий условиям теоремы 2

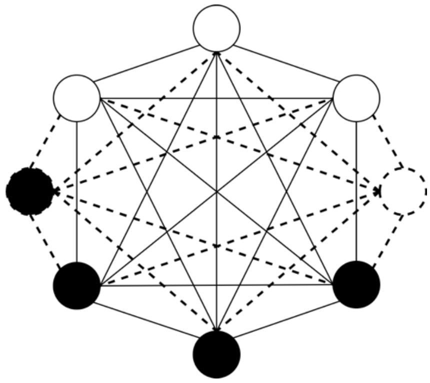

Рис. 4. МВ-1Р представленного графа K_6. Пунктиром изображены дополнительные вершины и ребра

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме при удалении вершины цвета f_0 $n-1$ исходных вершин теряют связь с данной вершиной, поэтому необходимо добавить $n-1$ ребер между исходными вершинами и дополнительной вершиной цвета f_0. Поскольку отказать может любая вершина цвета f_0, то дополнительная вершина цвета f_0 должна быть соединена со всеми исходными вершинами. При этом количество дополнительных ребер будет равно n.

Аналогичным образом дополнительная вершина цвета f_1 должна быть соединена со всеми исходными вершинами.

Итоговое количество дополнительных ребер будет равно $n+n=2n$.

Минимальные вершинные k-расширения двухцветных полных графов

Теперь перейдем к общему случаю минимальных вершинных k-расширений двухцветных полных графов. Данные теоремы дадут понимание, как строятся k-отказоустойчивые вершинные реализации для цветных полных графов.

Введем следующие обозначения. Исходные вершины из V цвета f_0 и цвета f_1 будем обозначать за v_{f_0} и v_{f_1} соответственно, а дополнительные из V^* – за $v_{f_0}^+$ и $v_{f_1}^+$.

Теорема 3. Для полного графа $K_n=(V,\alpha,f)$ с $F=\{f_0,f_1\}$, $|F|=2$, $|V_{f_0}|=1$, $|V_{f_1}|>1$ найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным

$$k(n-1)+kn+(k-1)(k-1)+\frac{k(k-1)}{2}. \qquad (3)$$

Минимальное вершинное k-расширение строится по следующей схеме:

1. Из k дополнительных вершин цвета f_0 проводятся ребра во всех исходные вершины цвета f_1: $k(n-1)$.

2. Из k дополнительных вершин цвета f_1 проводятся ребра во все исходные вершины: kn.

3. Из $k-1$ дополнительной вершины цвета f_0 проводится $k-1$ ребро в одни и те же дополнительные вершины цвета f_1: $(k-1)(k-1)$.

4. Из k дополнительных вершин цвета f_1 строится полный граф: $K_k=\frac{k(k-1)}{2}$.

Пример графа, удовлетворяющего условиям теоремы 3, и его МВ-2Р, построенного по представленной схеме, изображен на рис. 5 и 6 соответственно.

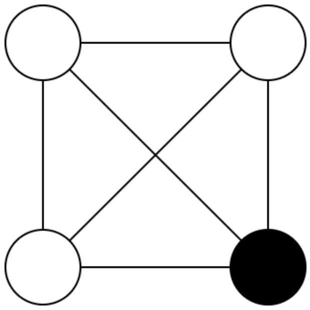

Рис. 5. Граф K_4 , удовлетворяющий условиям теоремы 3

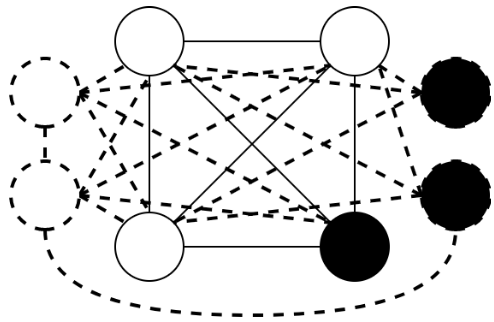

Рис. 6. МВ-2Р представленного графа K_4 . Пунктиром изображены дополнительные вершины и ребра

Доказательство. Рассмотрим на примере МВ-2Р, какие случаи отказа могут присутствовать в графе:

1. Удалены вершины v_{f_0} и v_{f_1} .
2. Удалены две вершины v_{f_1} .
3. Удалены вершины v_{f_0} и $v_{f_0}^{+}$.
4. Удалены вершины v_{f_0} и $v_{f_1}^{+}$.
5. Удалены вершины v_{f_1} и $v_{f_1}^{+}$.
6. Удалены вершины v_{f_1} и $v_{f_0}^{+}$.
7. Удалены две вершины $v_{f_0}^{+}$.
8. Удалены две вершины $v_{f_1}^{+}$.

Последние два случая рассматривать смысла нет, поскольку в графе, полученном удалением любых двух дополнительных вершин, уже содержится исходный граф.

Случаи с 3) по 6) сводятся к теореме 1, поэтому количество дополнительных ребер будет равно $2n-1$. Поскольку по условию вершинного расширения в МВ-2Р могут быть удалены любые два ребра – дополнительные ребра необходимо провести из каждой вершины $v_{f_0}^{+}$ и $v_{f_1}^{+}$: $2(2n-1)=2(n-1)+2n$. В общем случае в МВ-k Р могут быть удалены любые k ребер, поэтому формула для общего случая будет равна $k(2n-1)=k(n-1)+kn$.

Теперь рассмотрим случай 2), когда удаляются две любые исходные вершины цвета f_1 . В данном случае получившийся исходный граф становится полным графом K_{n-2} . Если рассматривать граф таким образом, это означает, что полный граф K_n являлся соединением графов K_2+K_{n-2} . Значит, чтобы вложить исходный граф в получившийся, необходимо восстановить соединение графа K_{n-2} с графом K_2 , состоящим из вершин f_1 . Это значит, что нам необходимо создать из вершин $v_{f_1}^{+}$ граф K_2 с количеством ребер $\frac{2(2-1)}{2}$ и соединить его с K_{n-2} , состоящим из оставшихся вершин исходного графа. Поскольку данное соединение уже присутствует в решении для случаев 3)–6), то общее количество дополнительных ребер для случаев 2)–6) будет равно $2(n-1)+2n+\frac{2(2-1)}{2}$.

Очевидно, при рассмотрении общего случая при удалении любых k исходных вершин цвета f_1 исходный полный граф становится K_{n-k} . Это значит, что необходимо восстановить соединение $K_k + K_{n-k}$. Исходя из рассуждений выше, в общем случае количество дополнительных ребер будет равно $k(n-1)+kn+\frac{k(k-1)}{2}$.

Рассмотрим оставшийся случай 1). При удалении вершины v_{f_1} и v_{f_0} получившийся исходный граф является K_{n-2}, состоящий только из вершин цвета f_1. Как и в случае 2), необходимо восстановить соединение K_{n-2} с K_2, причем K_2 должно включать вершину цвета f_0. Случаи с 3) по 6) уже имеют достаточные ребра, соединяющие v_{f_1} с $v_{f_1}^+$ и v_{f_1} с $v_{f_0}^+$ (а также K_1, состоящее из вершин цвета f_1 с количеством ребер $\frac{1(1-1)}{2}=0$). Общее число ребер будет равным $\frac{(n-2)(n-2-1)}{2}+(n-2)2+\frac{1(1-1)}{2}$.

В общем случае при удалении k вершин исходный граф становится K_{n-k}, причем он состоит только из вершин цвета f_1. Следовательно, необходимо восстановить соединение K_{n-k} с K_k. Случаи с 3) по 6) уже имеют достаточные ребра, соединяющие v_{f_1} с $v_{f_1}^+$ и v_{f_1} с $v_{f_0}^+$ (а также K_{k-1}, состоящее из вершин цвета f_1). Общее число ребер будет равным

$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}+(n-k)k+\frac{(k-1)(k-2)}{2}:\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}+(n-k)k+\frac{(k-1)(k-2)}{2}=$$

$$\frac{n^2-n-2k+2}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{2k-2}{2}=\frac{n(n-1)}{2}-(k-1).$$

Несложно заметить, что данное число меньше $\frac{n(n-1)}{2}$ на $k-1$, а значит, чтобы вписать исходный полный граф в получившийся, нужно добавить $k-1$ ребер между вершинами цвета f_0 и цвета f_1. Эти ребра можно получить путем их добавления между дополнительными вершинами цвета f_0 и f_1. Поскольку должно быть выполнено условие вершинного расширения, и максимальное количество удаленных вершин цвета f_1 в первом случае может быть только $k-1$, то для минимального вершинного k расширения достаточно провести $k-1$ дополнительных ребер из $k-1$ дополнительных вершин цвета f_1 в дополнительные вершины цвета f_0: $(k-1)(k-1)$.

Теорема 4. Для полного графа $K_n=(V,\alpha,f)$ с $F=\{f_0,f_1\}$, $|F|=2$, $|V_{f_0}|>1$, $|V_{f_1}|>1$ найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным:

$$2nk+\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)+k(k-1). \tag{4}$$

Схема построения минимального вершинного расширения:

1. Из каждой $v_{f_0}^+$ проведем ребра во все исходные вершины: kn.
2. Из каждой $v_{f_1}^+$ проведем ребра во все исходные вершины: kn.
3. Из дополнительной вершины цвета f_1 проведем ребра в $(k-1)$ дополнительную вершину цвета f_0. Далее из дополнительной вершины цвета f_0 проведем $(k-2)$ вершин в дополнительные вершины цвета f_1. Данная операция повторяется при увеличении степени k расширения, постепенно уменьшая количество дополнительных ребер. Таким образом, общее число ребер будет равно: $\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)$.

4. Из множества $v_{f_0}^{+}$ и множества $v_{f_1}^{+}$ построим два полных графа K_k : $2\frac{k(k-1)}{2}$.

Пример графа, удовлетворяющего условиям теоремы 4, и его МВ-2Р, построенного по представленной схеме, изображен на рис. 7 и 8 соответственно.

Доказательство. Рассмотрим случаи отказа 2 вершин на примере расширения с $k=2$. Большинство случаев аналогичны случаям из теоремы 3, однако здесь появляется еще один дополнительный: когда удаляются 2 вершины v_{f_0}. Поскольку отказ двух вершин v_{f_0} аналогичен удалению двух v_{f_1}, то будем рассматривать этот случай как вариант случая 2).

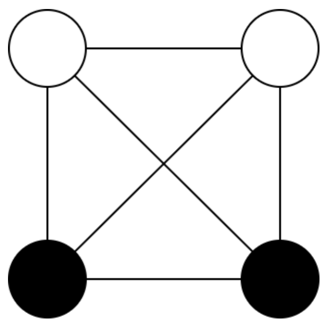

Рис. 7. Граф K_4, удовлетворяющий условиям теоремы 4

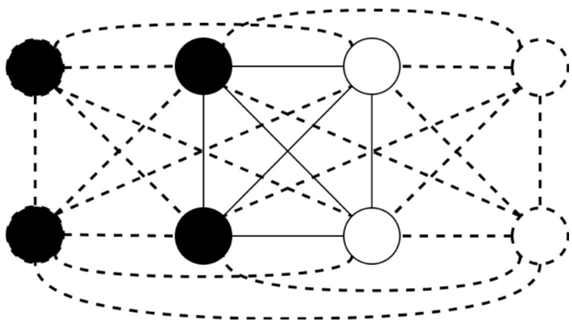

Рис. 8. МВ-2Р представленного графа K_4. Пунктиром изображены дополнительные вершины и ребра

Случаи 7) и 8) так же, как и в теореме 3, не имеет смысла рассматривать.

Случаи 3)–6) сводятся к теореме 2, поэтому количество дополнительных ребер будет равно $2n$. По условию вершинного расширения в графе могут отказать любые две вершины, поэтому дополнительные ребра необходимо построить из каждой дополнительной вершины: $2\cdot 2n$. В общем случае $k\cdot 2n$.

Рассмотрим теперь удаление k исходных вершин одинакового цвета. Для v_{f_0} он аналогичен предыдущей теореме. Также и для v_{f_1}. Это означает, что необходимо построить $|F|$ полных графов K_k : $2\frac{k(k-1)}{2}$. Для $k=2$ количество дополнительных ребер будет равно двум – для двух полных графов K_2.

Перейдем к оставшемуся случаю, когда удаляются вершины v_{f_0} и v_{f_1}. Полученный граф содержит K_{n-2} (в общем случае K_{n-k}) исходных вершин различных цветов. Это означает, что нам необходимо добавить K_2, состоящий из вершин цвета f_0 и f_1.

Чтобы вложить граф в дополнительные вершины, необходимо добавить $(k-1)$ ребер между вершинами $v_{f_0}^{+}$ и $v_{f_1}^{+}$, в случае $k=2$ требуется добавить одно ребро.

При увеличении k растет число вариантов, вершины каких цветов могут быть удалены. Другими словами, растет количество вариантов, из вершин каких цветов может состоять K_k, которую необходимо добавить. Например, при $k=3$ могут быть удалены две вершины цвета f_0 и одна цвета f_1, а также могут быть удалена одна вершина цвета f_0 и две – цвета f_1. При этом добавление $k-1$ ребер между дополнительными вершинами заданных цветов дают возможность вложить только один из вариантов K_k. Для того чтобы иметь возможность вложить оба варианта, а также выполнить условие минимальности, необходимо дополнительно добавить $k-2$ ребер между данными дополнительными вершинами разных цветов. Итоговое количество добавленных ребер будет равно $(k-1)+(k-2)$.

При $k>3$ данная логика распространяется следующим образом: при увеличении степени расширения увеличивается количество вариантов отказов вершин, следовательно, необходимо покрывать все случаи увеличением количества ребер. Так, для $k=4$ количество ребер будет равным $(k-1)+(k-2)+(k-3)$, поскольку существует три варианта удаления вершин цвета f_1 и f_2. Для $k=5$ таких вариантов четыре, и так далее. Соответственно, для покрытия всех вариантов общее число ребер будет равно $\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)$.

Таким образом, мы рассмотрели все случаи отказов вершин.

4. Минимальные вершинные расширения трехцветных полных графов

Увеличим количество цветов в графе до трех и исследуем представленную модель построения минимальных вершинных k-расширений.

Введем функцию $F(W)$ – набор цветов, которые присутствуют в множествах вершин из W. Для удобства повествования обозначим вершины цвета из множества $F(W^1)$ за v_{W^1} и $v^+_{W^1}$ – исходные и дополнительные соответственно. Аналогично обозначим v_{W^2} и $v^+_{W^2}$.

Теорема 5. Для полного графа $K_n=(V,\alpha,f)$ с $|F|=3$, $|W^1|>1$, $\left(W^2\right(=1$ найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным:

$$2(n-2)k+nk+|W^1|(k-1)(k-1)+\frac{k(k-1)}{2}+k \qquad (5)$$

Схема построения данного минимального вершинного расширения:

1. Из k вершин $v^+_{W^1}$ (для каждого цвета из $F(W^1)$) проводится $(n-2)$ ребер в вершины исходного графа v_{W^2} – во все вершины, кроме вершин цвета из $F(W^1)$: $2(n-2)k$ (в общем случае $|W^1|(n-|W^1|)k$).
2. Из k дополнительных вершин $v^+_{W^2}$ проводятся ребра во все вершины исходного графа: nk.
3. Из $k-1$ дополнительной вершины $v^+_{W^1}$ для каждого цвета из $F(W^1)$ проводится $k-1$ ребро в одни и те же дополнительные вершины цвета из $F(W^2)$. Количество ребер: $|W^1|(k-1)(k-1)$.
4. Каждая пара дополнительных вершин разного цвета из $F(W^1)$ соединяется ребром k.
5. Строится полный граф из дополнительных вершин цвета из $F(W^2)$: $\frac{k(k-1)}{2}$.

Доказательство. Следует из теоремы 3. Четвертый пункт схемы обосновывается тем фактом, что при удалении любого набора, состоящего из вершин из W^1, теряется связь между вершинами данного цвета, поэтому его нужно сконструировать из дополнительных вершин.

Теорема 6. Для полного графа $K_n=(V,\alpha,f)$ с $|F|=3$, $|W^1|=1$, $|W^2|>1$ найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным

$$(n-1)k+2nk+(k-1)(k-1)+2\frac{k(k-1)}{2}+\sum_{j=1}^{k-1}(k-j). \qquad (6)$$

Схема построения данного минимального вершинного расширения:

1. Из k дополнительных вершин $v^+_{W^1}$ проводятся ребра во все вершины v_{W^2}: $(n-1)k$.

2. Из k вершин $v_{W^2}^{+}$ каждого цвета из $F\left(W^2\right)$ проводятся ребра во все вершины исходного графа: $2nk$.

3. Из $k-1$ дополнительной вершины $v_{W^1}^{+}$ для каждого цвета из $F\left(W^1\right)$ проводится $k-1$ ребро в одни и те же дополнительные вершины цвета из $F\left(W^2\right)$. Количество ребер: $2(k-1)(k-1)$.

4. Из дополнительной вершины $v_{W^2}^{+}$ цвета $c_1 \in F\left(W^2\right)$ проведем ребра в $(k-1)$ дополнительную вершину цвета $c_2 \in F\left(W^2\right)$. Далее из дополнительной вершины цвета c^2 проведем $(k-2)$ вершин в дополнительные вершины цвета c_1. Данная операция повторяется при увеличении степени k расширения, постепенно уменьшая количество дополнительных ребер. Таким образом, общее число ребер будет равно $\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)$.

5. Для каждого цвета из $F\left(W^2\right)$ построим полный граф из $v_{W^2}^{+}$: $2\frac{k(k-1)}{2}$.

Доказательство. Данную схему можно разбить на две – схема построения расширения для графа с $|W^1|=1, |W^2|>1$ и схема для $|W^1|>1, |W^2|=1$. Пункты 1–3 следуют из теоремы 3. Последние два пункта следуют из теоремы 4.

Теорема 7. Для полного графа $K_n=(V,\alpha,f)$ с $|F|=3$, $|W^1|=0$, $|W^2|>1$ найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным

$$3nk+3\frac{k(k-1)}{2}+3\left(\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\right) \tag{7}$$

Схема построения:

1. Для каждого цвета из $F\left(W^2\right)$ из k дополнительных вершин $v_{W^2}^{+}$ проводятся ребра во все вершины исходного графа: $3nk$ (в общем случае $|W^2|nk$).
2. Для каждой пары цветов $c_1, c_2 \in F\left(W^2\right)$ из дополнительной вершины цвета c_1 проводятся $k-1$ ребер в вершины цвета c_2, а из дополнительной вершины цвета c_2 ребра в $k-2$ дополнительные вершины цвета c_1 и так далее при увеличении степени расширения: $3\left(\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\right)$. Несложно заметить, что все рассматриваемые пары образуют полный $|W^2|$-вершинный граф. Таким образом, в общем случае количество дополнительных ребер будет равным $\frac{|W^2|\left(|W^2|-1\right)}{2}\left(\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\right)$.
3. Для каждого цвета из $F\left(W^2\right)$ строится полный граф из $v_{W^2}^{+}$: $3\frac{k(k-1)}{2}$ (в общем случае $|W^2|\frac{k(k-1)}{2}$).

Доказательство. Следует из предыдущих теорем.

Теорема 8. Для полного графа $K_n=(V,\alpha,f)$ с $|F|=3$, $|W^1|>1$, $|W^2|=0$ найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным

$$k\frac{|W^1|\left(|W^1|-1\right)}{2} \tag{8}$$

Схема построения заключается в том, чтобы построить k полных графов из вершин $v_{W^1}^{+}$.

Пример графа, удовлетворяющего условиям теоремы 8, и его МВ-1Р, построенного по представленной схеме, изображен на рис. 9 и 10 соответственно.

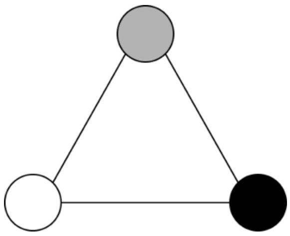

Рис. 9. Граф K_3, удовлетворяющий условиям теоремы 8

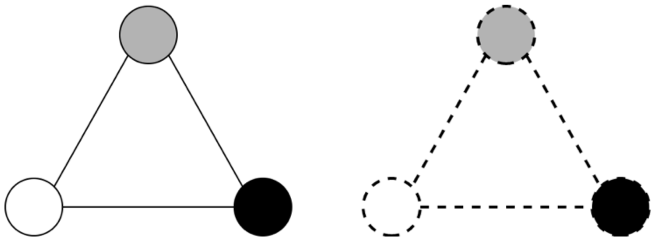

Рис. 10. МВ-1Р представленного графа K_3. Пунктиром изображены дополнительные вершины и ребра

Доказательство. При удалении любой вершины любого цвета граф K_n превращается в K_{n-1}, поэтому необходимо соединить K_{n-1} с K_1, построенный из дополнительной вершины удаленного цвета. Поскольку может быть удалена вершина любого цвета и для каждого цвета необходимо соединять K_1 удаленного цвета с K_{n-1}, то нужно провести $n-1$ ребер из каждой дополнительной вершины. Очевидно, что условие минимальности расширения достигается тогда, когда каждая дополнительная вершина соединена с остальными дополнительными: $\frac{n(n-1)}{2}$. С учетом степени расширения k необходимо построить k полных графов из k дополнительных вершин.

Замечание. Условия теоремы 8 справедливы и для графов с $|F|=2$.

Рассматривая представленные теоремы, можно обнаружить некоторую закономерность в построении схемы минимального вершинного k-расширения для различных конфигураций графов. В действительности, все описанные выше схемы можно свести к единой и обобщить все теоремы выше к общей теореме для цветных полных графов любой конфигурации.

5. Минимальные вершинные k-расширения цветных полных графов

Следующая теорема является следствием закономерного развития идеи построения схем минимального вершинного k-расширения для цветных полных графов, рассмотренных в теоремах 1–8.

Теорема 9. Для полного графа $K_n=(V,\alpha,f)$ с $|F|>1$ найдется минимальное вершинное k-расширение с количеством дополнительных ребер, равным

$$|W^1|\left(n-|W^1|\right)k+|W^2|nk+\sum_{0}^{|W^2|}|W^1|(k-1)(k-1)+\frac{|W^2|\left(|W^2|-1\right)}{2}\left(\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\right)+$$

$$+|W^2|\frac{k(k-1)}{2}+k\frac{|W^1|\left(|W^1|-1\right)}{2} \tag{9}$$

Схема построения данного минимального вершинного расширения заключается в следующем:

1. Для каждого цвета из $F\left(W^1\right)$ проводятся ребра из k дополнительных вершин $v_{W^1}^{+}$ во все вершины v_{W^2}: $|W^1|\left(n-|W^1|\right)k$.

2. Для каждого цвета из $F\left(W^2\right)$ из k дополнительных вершин $v^+_{W^2}$ проводятся ребра во все вершины исходного графа: $|W^2|nk$.
3. Из $k-1$ дополнительной вершины $v^+_{W^2}$, для каждого цвета из $F\left(W^2\right)$ проводится $k-1$ ребро в одни и те же дополнительные вершины цвета из $F\left(W^1\right)$. Количество ребер: $\sum_{0}^{|W^2|}|W^2|(k-1)(k-1)$.
4. Для каждой пары цветов $c_1, c_2 \in F\left(W^2\right)$ из дополнительной вершины цвета c_1 проводятся $k-1$ ребер в вершины цвета c_2, а из дополнительной вершины цвета c_2 ребра в $k-2$ дополнительные вершины цвета c_1 и так далее при увеличении количества вариантов удаления исходных вершин различного цвета: $\frac{|W^2|\left(|W^2|-1\right)}{2}\left(\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\right)$.
5. Для каждого цвета из $F\left(W^2\right)$ строится полный граф из $v^+_{W^2}$: $|W^2|\frac{k(k-1)}{2}$.
6. Каждая пара дополнительных вершин разного цвета из $F\left(W^1\right)$ соединяется ребром: $k\frac{|W^1|\left(|W^1|-1\right)}{2}$.

В работе М.Б. Абросимова [5] приводится теорема о минимальном вершинном k-расширении полного графа $K_n = (V,\alpha)$. В ней говорится, что полный граф имеет единственное с точностью до изоморфизма МВ-k Р, и этим расширением является полный граф K_{n+k}.

Полный граф без введенной на нем функции раскраски можно рассматривать как граф $K_n = (V,\alpha,f)$ с $|F|=1$, $|W^1|=0$, $|W^2|=1$. Посчитаем количество дополнительных ребер в расширении K_{n+k}:

$$\frac{(n+k)(n+k-1)-n(n-1)}{2} = \frac{n^2+kn-n+kn+k^2-k-n^2+n}{2} = \frac{2kn+k^2-k}{2} = kn + \frac{k(k-1)}{2}$$

Теперь посчитаем количество дополнительных ребер по теореме 9.

$$0(n-0)k + nk + 0 + \frac{1\cdot 0}{2}\left(\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\right) + \frac{k(k-1)}{2} + k\frac{0\cdot(-1)}{2} = kn + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Следствие 1. Схема построения минимального вершинного k-расширения с заданным по формуле количеством дополнительных ребер справедлива и для полных графов с $|F|=1$.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Литература

1. Avižienis, A. Fault-tolerance and fault-intolerance: Complementary approaches to reliable computing / A. Avižienis // ACM SIGPLAN Notices. – 1975. – Vol. 10, Iss. 6. – P. 458–464.
2. Hayes, J.P. A graph model for fault-tolerant computing system / J.P. Hayes // IEEE Trans. Comput. – 1976. – Vol. C-25, no. 9. – P. 875–884.
3. Harary, F. Edge fault tolerance in graphs / F. Harary, J.P. Hayes // Networks. – 1993, Vol. 23, Iss. 2. – P. 135–142.
4. Harary, F. Node fault tolerance in graphs / F. Harary, J.P. Hayes // Networks. – 1996, vol. 27, Iss. 1. – P. 19–23.

5. Абросимов, М.Б. Графовые модели отказоустойчивости / М.Б. Абросимов. – Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, 2012. – 189 с.

6. Разумовский, П.В. Построение цветных графов без проверки на изоморфизм / П.В. Разумовский, М. Б. Абросимов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, № 2. – С. 267–277.

7. Razumovsky, P.V. The search for minimal edge 1-extension of an undirected colored graph / P.V. Razumovsky // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – Т. 21, № 3. – P. 400–407.

8. Разумовский, П.В. О минимальных вершинных 1-расширениях двухцветных полных графов / П.В. Разумовский // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021». – М.: МАКС Пресс, 2021. https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22112/124513_uid563707_report.pdf

9. Богомолов, А.М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А.М. Богомолов, В.Н. Салий. – М.: Наука, 1997. – 367 с.

Поступила в редакцию 28 октября 2021 г.

Сведения об авторах

Разумовский Пётр Владимирович – аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, https://orcid.org//0000-0003-3648-3166, e-mail: shprotby@gmail.com

Абросимов Михаил Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, https://orcid.org/0000-0002-4473-8790, e-mail: mic@rambler.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2021, vol. 13, no. 4, pp. 77–89

DOI: 10.14529/mmph210409

THE MINIMAL VERTEX EXTENSIONS FOR COLORED COMPLETE GRAPHS

P.V. Razumovsky, M.B. Abrosimov
Saratov State University, Saratov, Russian Federation
E-mail: shprotby@gmail.com, mic@rambler.ru

The article proposes the results of the search for minimal vertex extensions of undirected colored complete graphs. The research topic is related to the modelling of full fault tolerant technical systems with a different type of their objects in the terminology of graph theory. Let a technical system be Σ, then there is a graph $G(\Sigma)$, which vertices reflects system's objects and edges reflects connections between these objects. Type of each object reflected in a mapping of some color from $F = \{1,2\ldots,i\}$ to the corresponding vertex. System's Σ vertex extension is a graph $G(\Sigma)$ which contains additional vertices. System reflected by graph $G(\Sigma)$ can work even if there are k faults of its objects. Complete graph is a graph where each two vertices have an edge between them. Complete graphs have no edge extensions because there is no way to add additional edge to the graph with a maximum number of edges. In other words, the system reflected by some complete graph cannot be able to resist connection faults. Therefore the article research is focused on vertex extensions only. There is a description of vertex extensions existence condition for those colored complete graphs. This paper considers generating schemes for such minimal vertex extensions along with formulas, which allows to calculate number of additional edges to have an ability to construct minimal vertex extension.

Keywords: graph vertex extensions; complete graphs; graph minimal extensions, colored graph extensions, colored graphs.

References

1. Avižienis A. Fault-tolerance and fault-intolerance: Complementary approaches to reliable computing. *ACM SIGPLAN Notices*, 1975, Vol. 10, Iss. 6, pp. 458–464. DOI: 10.1145/390016.808469

2. Hayes J.P. A Graph Model for Fault-Tolerant Computing System. *IEEE Trans. Comput*., 1976, Vol. C-25, no. 9, pp. 875–884. DOI: 10.1109/TC.1976.1674712

3. Harary F., Hayes J.P. Edge Fault Tolerance in Graph. *Networks*, 1993, Vol. 23, Iss. 2, pp. 135–142. DOI: 10.1002/net.3230230207

4. Harary F., Hayes J.P. Node Fault Tolerance in Graphs. *Networks*, 1996, Vol. 27, Iss. 1, pp. 19–23. DOI: 10.1002/(sici)1097-0037(199601)27:1<19::aid-net2>3.0.co;2-h

5. Abrosimov M.B. *Grafovye modeli otkazoustoychivosti* (Graph Models of Fault Tolerance). Saratov, Izd-vo Sarat. Un-ta Publ., 2012, 189 p. (in Russ.).

6. Razumovsky P.V., Abrosimov M.B. Generation of Colored Graphs with Isomorphism Rejection. *Izv. Sarat. Univ. Math. Mech. Inform.*, 2021, Vol. 21, Iss. 2, pp. 267–277. (in Russ.). DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-2-267-277

7. Razumovsky P.V. The Search for Minimal Edge 1-Extension of an Undirected Colored Graph. *Izv. Sarat. Univ. Math. Mech. Inform*., 2021, Vol. 21, Iss. 3, pp. 400–407. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-400-407

8. Razumovskiy P.V. O minimal'nykh vershinnykh 1-rasshireniyakh dvukhtsvetnykh polnykh grafov (On Minimal Vertex 1-Extensions of Two-Color Complete Graphs). *Materialy Mezhdunarodnogo molodezhnogo nauchnogo foruma "LOMONOSOV-2021"* (Proc. Int. Youth Scientific Forum "LOMONOSOV-2021"), Moscow, MAKS Press Publ., 2021. https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22112/124513_uid563707_report.pdf

9. Bogomolov A.M., Saliy V.N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* (Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems). Moscow, Nauka Publ., 1997, 367 p. (in Russ.).

Received October 28, 2021

Information about the authors

Razumovskiy Pyetr Vladimirovich, Postgraduate Student of the Department of Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography, Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation, https://orcid.org/0000-0003-3648-3166, e-mail: shprotby@gmail.com

Abrosimov Mikhail Borisovich, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Department of Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography, Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation, https://orcid.org/0000-0002-4473-8790, e-mail: mic@rambler.ru