Математика

УДК 517.544.8 DOI: 10.14529/mmph220101

УСТОЙЧИВОСТЬ ФАКТОРИЗАЦИОННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Н.В. Адукова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: adukovanv@susu.ru

Аннотация. Рассматривается факторизация Винера–Хопфа двух достаточно близких по норме алгебры Винера матриц-функций $A(t)$ и $B(t)$. Целью работы является изучение вопроса, когда факторизационные множители $A(t)$, $B(t)$ будут достаточно близки друг к другу. Эта задача представляет значительный интерес в связи с разработкой методов приближенной факторизации матриц-функий. Имеются два основных препятствия при изучении данной проблемы: неустойчивость частных индексов матриц-функций и не единственность их факторизационных множителей. Ранее задача изучалась М.А. Шубиным, который показал, что устойчивость факторизационных множителей имеет место только в случае, когда $A(t)$ и $B(t)$ имеют одинаковые частные индексы. Тогда существует факторизация $B(t)$, для которой факторизационные множители будут достаточно близки к множителям $A(t)$. Теорема М.А. Шубина носит неконструктивный характер, поскольку не известно, когда частные индексы двух близких матриц-функций будут одинаковыми и не указан способ выбора требуемой факторизации Винера–Хопфа матрицы-функции $B(t)$. Для преодоления этих недостатков в настоящей работе изучена проблема нормировки факторизации в устойчивом случае, описаны все возможные типы нормировок и доказана их устойчивость при малом возмущении $A(t)$. Это позволило найти конструктивный способ выбора факторизации возмущенной матрицы-функции, который гарантирует устойчивость факторизационных множителей.

Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа; устойчивая система частных индексов; устойчивость факторизационных множителей; нормировка факторизации.

Введение

Задача факторизации Винера–Хопфа матриц-функций (или краевая задача Римана для вектора) является одной из самых востребованных задач комплексного анализа, имеющей многочисленные приложения в различных областях математики, физики и прикладных наук.

Введем основные понятия теории факторизации [1]. Пусть $A(t)$ – обратимая на единичной окружности $\mathbb{T}$ матрица-функция порядка p из матричной алгебры Винера $W^{p\times p}(\mathbb{T})$. Стандартная норма на этой алгебре будет обозначаться $\|\cdot\|_W$.

Правой факторизацией Винера–Хопфа $A(t)$ называется ее представление в следующем виде:

$$A(t) = A_-(t)D(t)A_+(t),\ t\in\mathbb{T}, \tag{1}$$

где $A_\pm(t)\in GW_\pm^{p\times p}(\mathbb{T})$, $D(t)=diag\left[t^{\rho_1},\ldots,t^{\rho_p}\right]$, $\rho_1\le\ldots\le\rho_p$ – правые частные индексы $A(t)$.

Здесь $GW_\pm^{p\times p}(\mathbb{T})$ – группа обратимых элементов подалгебры $W_\pm^{p\times p}(\mathbb{T})$, состоящей из абсолютно сходящихся матричных рядов Фурье с нулевыми коэффициентами Фурье с отрицательными/положительными индексами. Правые частные индексы однозначно (с точностью до порядка) определяются матрицей-функцией $A(t)$, в отличие от факторизационных множителей $A_\pm(t)$.

Два обстоятельства сдерживают применение задачи факторизации. Во-первых, в отличие от скалярного случая, матричная задача, вообще говоря, не решена в конструктивной форме (или, как принято говорить, эффективно).

Разработка приближенных методов факторизации наталкивается на серьезное препятствие в виде неустойчивости задачи в общем случае. Напомним, что понимается под устойчивостью задачи факторизации [1–3].

Частные индексы $\rho_1,\dots,\rho_p$ матрицы-функции $A(t)$ называются *устойчивыми*, если для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ любая матрица-функция $\tilde{A}(t)$, удовлетворяющая неравенству $\left\|A(t)-\tilde{A}(t)\right\|_W<\varepsilon$, обладает тем же набором правых частных индексов, что и $A(t)$.

В общем случае частные индексы неустойчивы при малом возмущении. Имеется классический критерий Гохберга–Крейна–Боярского устойчивости частных индексов: система правых частных индексов $\rho_1\le\ldots\le\rho_p$ устойчива при малом возмущении матрицы-функции $A(t)$ тогда и только тогда, когда $\rho_p-\rho_1\leqslant 1$. К сожалению, этот критерий не является эффективным, поскольку нет методов вычисления частных индексов. В настоящее время известно мало эффективных критериев устойчивости индексов. Однако для лорановских матричных многочленов такой критерий получен в работе [4].

Для приближенного построения факторизации важно, чтобы факторизационные множители были *непрерывно зависящими от* $A(t)$ или *устойчивыми*. Это означает, что для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любой матрицы-функции $\tilde{A}(t)$, удовлетворяющей неравенству $\left\|A(t)-\tilde{A}(t)\right\|_W<\delta$, среди всех возможных факторизаций $\tilde{A}(t)$ найдется факторизация $\tilde{A}(t)=\tilde{A}_-(t)\tilde{D}(t)\tilde{A}_+(t)$, для которой $\left\|A_\pm(t)-\tilde{A}_\pm(t)\right\|_W<\varepsilon$.

Уточнение «среди всех возможных факторизаций» $\tilde{A}(t)$ вызвано тем, что факторизационные множители находятся не единственным образом и потому говорить об их близости для близких матриц-функций $A(t)$ и $\tilde{A}(t)$ нельзя, не выбрав специальным образом соответствующие факторизации, т. е. как-то не пронормировав их. Необходимым условием устойчивости факторов $\tilde{A}_\pm(t)$ является совпадение частных индексов у исходной $A(t)$ и возмущенной $\tilde{A}(t)$ матриц-функций [2, Теорема 6.14]. Если это условие выполнено, то факторы $A_\pm(t)$ непрерывно зависят от $A(t)$ (теорема М.А. Шубина), см. [2, Теорема 6.15]. Неизвестно, однако, как нужно выбирать факторизацию $\tilde{A}(t)$, чтобы гарантировать устойчивость факторов. В силу этого невозможно получить явные оценки абсолютной погрешности $\left\|A_\pm(t)-\tilde{A}_\pm(t)\right\|_W$ нахождения факторизационных множителей. Данная проблема возникает потому, что неизвестно, как нужно нормировать факторизацию, чтобы добиться ее единственности. Поэтому основная часть работы будет посвящена нормировке факторизации в устойчивом случае.

Устойчивая факторизация Винера–Хопфа подразделяется на два случая. В первом случае все частные индексы равны друг другу, $\rho_1=\ldots=\rho_p$, и факторизация $A(t)$ имеет вид

$$A(t)=t^{\rho_1}A_-(t)A_+(t),$$

т.е. фактически эквивалентна канонической факторизации. Здесь трудностей с нормировкой не возникает, всегда факторизацию можно нормировать условием $A_-(\infty)=I_p$, где I_p – единичная матрица порядка p. В работе [5] этот случай подробно изучен, в ней исследована непрерывность факторизационных множителей и получены явные оценки для абсолютной погрешности этих факторов при малом возмущении исходной матрицы-функции.

В настоящей работе мы изучим второй случай устойчивости, когда $\rho_p-\rho_1=1$, т. е. когда $\rho_1=\ldots=\rho_{p-r}=s,\quad \rho_{p-r+1}=\ldots=\rho_p=s+1$, где числа s, r находятся из соотношения $\varkappa:=ind\det A(t)=sp+r$. Теперь $D(t)$ имеет следующий блочный вид:

$$D(t)=\begin{pmatrix} t^s I_{p-r} & 0 \\ 0 & t^{s+1} I_r \end{pmatrix},$$

где I_{p-r}, I_r – единичные матрицы соответствующих порядков. В первую очередь мы решим проблему нормировки устойчивой факторизации и опишем типы возможных нормировок факторизации заданной матрицы-функции. Далее мы покажем, что тип нормировки устойчив при малом возмущении исходной матрицы-функции. После этого мы сможем изучить непрерывность факторизационных множителей $A_{\pm}(t)$ и получить явные оценки для абсолютной погрешности при приближенном нахождении $A_{\pm}(t)$, аналогичные оценкам, полученным в [5] для канонической факторизации. Таким образом, теперь устойчивый случай будет полностью изучен.

1. P-нормировка факторизации Винера–Хопфа для матриц-функций с устойчивой системы частных индексов

Прежде всего напомним теорему Гохберга–Крейна об общем виде факторизационных множителей $A_{\pm}(t)$ [1, Гл. VIII, Теорема 1.2]. Сформулируем этот результат только для устойчивого случая.

Пусть $\rho_1=\ldots=\rho_{p-r}=s$, $\rho_{p-r+1}=\ldots=\rho_p=s+1$, где числа s, r находятся из соотношения $\varkappa:=ind\det A(t)=sp+r$. Обозначим $\mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$ множество всех блочно-треугольных матриц-функций вида

$$Q_-(t)=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12}(t) \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где Q_{11}, Q_{22} – числовые обратимые матрицы размером $(p-r)\times(p-r)$ и $r\times r$ соответственно, а $Q_{12}(t)$ – матричный многочлен от t^{-1} степени не выше 1 размером $(p-r)\times r$: $Q_{12}(t)=Q_{12}^0+Q_{12}^1 t^{-1}$.

По теореме Гохберга–Крейна об общем виде факторизационных множителей в устойчивом случае общий вид факторизационных множителей $A_-(t)$, $A_+(t)$ задается формулами

$$G_-(t)=A_-(t)Q_-(t), \quad G_+(t)=Q_+(t)A_+(t),$$

где $Q_+(t)=D^{-1}(t)Q_-^{-1}(t)D(t)$. Таким образом, для любой $Q_-(t)\in\mathcal{Q}_-(\rho_1,\ldots,\rho_p)$ равенство $A(t)=G\_(t)D(t)G\_+(t)$ задает новую факторизацию Винера–Хопфа $A(t)$ и любая факторизация $A(t)$ может быть получена аналогично при соответствующем выборе $Q_-(t)$.

Для определения нормировки факторизации Винера–Хопфа нам потребуется еще один тип факторизации матриц-функций – факторизация Биркгофа [3]. *Правой факторизацией Биркгофа* $A(t)$ называется ее представление в следующем виде:

$$A(t)=D_b(t)B_-(t)B_+(t),\ t\in\mathbb{T},$$

где $B_{\pm}(t)\in GW_{\pm}^{p\times p}(\mathbb{T})$ и $D_b(t)=diag\left[t^{\beta_1},\ldots,t^{\beta_p}\right]$, $\beta_1,\ldots,\beta_p$ – правые индексы Биркгофа $A(t)$. Индексы Биркгофа не определяются однозначно матрицей-функцией $A(t)$. Однако среди всевозможных наборов индексов Биркгофа всегда существует набор, полученный некоторой перестановкой правых частных индексов [6]. Таким образом, одна из факторизаций Биркгофа всегда может быть записана в виде

$$A(t)=P\,D(t)\,P^{-1}B_-(t)B_+(t),\ t\in\mathbb{T}, \tag{3}$$

где P – некоторая матрица перестановок.

Следующее определение нормировки было предложено в совместном докладе Н. Адуковой и В. Адукова на 13-м конгрессе ISAAC [7].

Определение 1. Факторизация Винера–Хопфа матрицы-функции $A(t)$:

$$A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t) \tag{4}$$

называется P**-нормированной**, если выполняются следующие два условия:

Факторизация (4) задает факторизацию Биркгофа

$$A(t)=P\,D(t)P^{-1}B_-(t)B_+(t)$$

по формулам $B_-(t)=P\,D^{-1}(t)P^{-1}C_-(t)D(t)$, $B_+(t)=C_+(t)$ для некоторой матрицы перестановок P из группы перестановок порядка n.

$$B_-(\infty)=P\,.$$

Оказывается, что выполнение этих условий обеспечивает существование нормировки, гарантирующей единственность факторизации.

Числовые матрицы $Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}^{(0)}, Q_{12}^{(1)}$ требуется подобрать так, чтобы привести факторизацию (1) к P-нормированной факторизации (4):

$$C_-(t)=A_-(t)Q_-(t)\,.$$

Прежде всего мы покажем, что требование (1) из определения 1 приводит к так называемой блочной PLU-факторизации обратимой числовой матрицы $A_0=A_-(\infty)$.

Разобьем числовую матрицу $A_0=\begin{pmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{pmatrix}$ на такие же блоки, как в $Q_-(t)$. Напомним (см., например, [8]), что если в обратимой матрице A_0 обратим блок A_{11}^0, то она допускает блочно-треугольное разложение

$$A_0=L_0\,U_0=\begin{pmatrix} L_{11}^0 & 0 \\ L_{21}^0 & L_{22}^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11}^0 & U_{12} \\ 0 & U_{22}^0 \end{pmatrix}.$$

Если зафиксировать диагональные блоки матрицы L_0 (или U_0), взяв, например, $L_{11}^0=I_{p-r}$, $L_{22}^0=I_r$, то данное разложение будет единственным. Оно называется *блочной* LU*-факторизацией* A_0. Если же матрица A_{11}^0 – необратима, то всегда существует матрица перестановок P такая, что $P^{-1}A_0$ допускает блочную LU-факторизацию, т. е. A_0 допускает разложение $A_0=PL_0U_0$. Оно называется *блочной* PLU*-факторизацией* A_0. Отметим, что матрица перестановок P находится не единственным образом.

Предложение 1. Если матрица-функция $A(t)$ с устойчивыми индексами допускает P-нормированную факторизацию, то для любой факторизации Винера–Хопфа $A(t)=A_-(t)\,D(t)\,A_+(t)$ матрица $A_-(\infty)$ допускает блочную PLU-факторизацию.

Доказательство. Предположим, что матрица-функция $A(t)$ допускает P-нормированную факторизацию $A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t)$ с матрицей перестановок P. Тогда в силу условия (1) из определения P-нормировки должно выполняться включение $P\,D^{-1}(t)P^{-1}C_-(t)\,D(t)\in W_-^{p\times p}(\mathbb{T})$.

Это требование равносильно тому, что в разложении блока $\left(P^{-1}C_-(t)\right)_{12}$ в матричный ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки коэффициенты при $1, t^{-1}$ должны быть нулевыми. В частности, матрица $P^{-1}C_-(\infty)$ является нижней блочно-треугольной. По теореме об общем виде факторизационных множителей, для любой факторизации $A(t)=A_-(t)\,D(t)\,A_+(t)$ должно выполняться условие $C_-(t)=A_-(t)Q_-(t)$ для некоторой $Q_-(t)$ вида (2). В частности, $C_-(\infty)=A_-(\infty)Q_-(\infty)$, где $Q_-(\infty)$ – верхняя блочно-треугольная матрица. Отсюда следует, что $A_-(\infty)$ допускает блочную PLU-факторизацию. □

Как указывалось, любая обратимая матрица $A_-(\infty)$ допускает блочную PLU-факторизацию. Сейчас мы покажем, что это условие является достаточным условием для существования у матрицы-функции с устойчивой системой частных индексов нормировки P-типа.

Теорема 1. Пусть для матрицы-функции $A(t)$ существует факторизация *Винера–Хопфа* $A(t)=A_-(t)D(t)A_+(t)$ для которой числовая матрица $A_-(\infty)$ допускает блочную PLU-факторизацию, т. е. для которой блок $\left(P^{-1}A_-(\infty)\right)_{11}$ – обратимая матрица.

Тогда $A(t)$ допускает P-нормируемую факторизацию

$$A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t), \tag{5}$$

где

$$C_-(t)=P\begin{pmatrix} I_{p-r}+t^{-1}C_{11}^-(t) & t^{-2}C_{12}^-(t) \\ C_{21}^-(t) & I_r+t^{-1}C_{22}^-(t) \end{pmatrix}$$

и элементы блоков $C_{ij}^-(t)$ принадлежат алгебре Винера $W_-(\mathbb{T})$. Факторизационные множители $C_-(t)$, $C_+(t)$ находятся единственным образом.

Факторизация Винера–Хопфа (5) порождает факторизацию Биркгофа

$$A(t)=PD(t)P^{-1}B_-(t)B_+(t),$$

где $B_-(t)=P\begin{pmatrix} I_{p-r}+t^{-1}C_{11}^-(t) & t^{-1}C_{12}^-(t) \\ t^{-1}C_{21}^- & I_r+t^{-1}C_{22}^-(t) \end{pmatrix}$, $B_+(t)=C_+(t)$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда для исходной факторизации Винера–Хопфа блок $A_0=\left(A_-(\infty)\right)_{11}$ – обратимая матрица, т. е. случай, когда $P=I_p$. Докажем существование I_p-нормированной факторизации. По теореме об общем виде факторизации любые два фактора $A_-(t)$, $C_-(t)$ связаны соотношением

$$C_-(t)=A_-(t)Q_-(t), \tag{6}$$

где $Q_-(t)$ имеет вид (2).

Подберем матрицы Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}^0, Q_{12}^1 так, чтобы фактор $C_-(t)$ имел нужный вид. Для этого разложим аналитические в области D_- матрицы-функции $A_-(t)$, $C_-(t)$ в ряды Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$A_-(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\,t^{-k},\; C_-(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\,t^{-k}.$$

Из равенства (6) следует, что $C_k=\sum_{j=0}^{k}A_{k-j}\,Q_j$, в частности, $C_0=A_0\,Q_0$. Построим блочную LU-факторизацию матрицы $A_0=L_0U_0$, выбрав в качестве диагональных элементов матрицы L_0 единичные матрицы I_{p-r}, I_r. Положим $Q_0=U_0^{-1}$, тогда $C_0=L_0$. Обратимые матрицы Q_{11}, Q_{22} и коэффициент Q_{12}^0 матричного многочлена $Q_{12}(t)=Q_{12}^0+Q_{12}^1\,t^{-1}$ определены единственным образом. Оставшийся матричный коэффициент Q_{12}^1 определим как $Q_{12}^1=-(A_{11}^0)^{-1}\left(A_1U_0^{-1}\right)_{12}$. Тогда легко видеть, что для матричного коэффициента C_1 блок $(C_1)_{12}=0$. Это означает, что матрица-функция $C_-(t)$ имеет требуемый вид. Поскольку матрицы Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}^0, Q_{12}^1, определяющие матричный многочлен $Q_-(t)$, находятся единственным образом, то факторизация Винера–Хопфа (5) определяется однозначно.

Определим матрицу-функцию $B_-(t)=D^{-1}(t)C_-(t)D(t)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$B_-(t)=\begin{pmatrix} I_{p-r}+t^{-1}C_{11}^-(t) & t^{-1}C_{12}^-(t) \\ t^{-1}C_{21}^-(t) & I_r+t^{-1}C_{22}^-(t) \end{pmatrix}.$$

Это означает, что матрица-функция $B_-(t)$ вместе с обратной принадлежит алгебре $W_-^{p\times p}(\mathbb{T})$ и $B_-(\infty)=I_p$. Таким образом, факторизация (5) является I_p-нормированной. Поскольку $A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t)=D(t)B_-(t)C_+(t)$, то мы построили для $A(t)$ по факторизации Винера–Хопфа ее факторизацию Биркгофа. Часть теоремы, относящаяся к случаю $P=I_p$, полностью доказана. Случай, когда $A_-(\infty)$, допускает PLU-факторизацию для некоторой матрицы перестановок P, т. е. для случая, когда $(P^{-1}A_-(\infty))_{11}$, легко сводится к уже рассмотренному. □

2. Устойчивость P-нормировки и непрерывность факторизационных множителей

В этом параграфе мы прежде всего изучим устойчивость P-нормировки при малом возмущении. При определении нормы $\|\cdot\|_W$ матрицы-функции из матричной алгебры Винера мы будем использовать максимальную столбцовую норму $\|\cdot\|_1$ для ее матричных коэффициентов Фурье.

Определение 2. P-нормировка факторизации матрицы-функции $A(t)$ называется **устойчивой** при малом возмущении $A(t)$, если для любого достаточно малого $\delta>0$ любая матрица-функция $\tilde{A}(t)$, имеющая тот же набор правых частных индексов $\rho_1,\ldots,\rho_p$, что и $A(t)$, и удовлетворяющая неравенству $\|A(t)-\tilde{A}(t)\|_W<\delta$, имеет тот же тип нормировки, что и $A(t)$.

Очевидно, что при $\rho_p-\rho_1=0$ каноническая нормировка является устойчивой. Рассмотрим теперь случай $\rho_p-\rho_1=1$.

Теорема 2. Нормировка P-типа для матрицы-функции $A(t)$ с устойчивой системой частных индексов является устойчивой при малом возмущении $A(t)$.

Доказательство. Предположим вначале, что матрица-функция $A(t)$ допускает нормированную факторизацию I_p-типа: $A(t)=C_-(t)D(t)C_+(t)$, где

$$C_-(t)=\begin{pmatrix} I_{p-r}+t^{-1}C_{11}^-(t) & t^{-2}C_{12}^-(t) \\ C_{21}^-(t) & I_r+t^{-1}C_{22}^-(t) \end{pmatrix}.$$

Значит, $C_-(\infty)=\begin{pmatrix} I_{p-r} & 0 \\ C_{21}^-(\infty) & I_r \end{pmatrix}$. Поскольку $A(t)$ имеет устойчивую систему частных индексов, то любая достаточно близкая к $A(t)$ матрица-функция $\tilde{A}(t)$ будет иметь такую же систему частных индексов.

Тогда, по теореме Шубина, для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta>0$ такое, что, если $\|A(t)-\tilde{A}(t)\|_W<\delta$, то существует факторизация $\tilde{A}(t)=\tilde{A}_-(t)D(t)\tilde{A}_+(t)$, для которой $\|C_-(t)-\tilde{A}_-(t)\|_W<\varepsilon$. Поэтому $\|C_-(\infty)-\tilde{A}_-(\infty)\|_1<\varepsilon$, а значит, и $\left\|I_{p-r}-\left(\tilde{A}_-(\infty)\right)_{11}\right\|_1<\varepsilon$. Таким образом, числовая матрица $\left(\tilde{A}_-(\infty)\right)_{11}\neq 0$ достаточно близка к единичной матрице и потому обратима. Это означает, что матрица-функция $\tilde{A}(t)$ допускает нормированную факторизацию I_p-типа.

Пусть теперь $A(t)$ допускает нормированную факторизацию P-типа. Образуем матрицы-функции $F(t)=P^{-1}A(t)$ и $\tilde{F}(t)=P^{-1}\tilde{A}(t)$, где $\tilde{A}(t)$ – любая достаточно близкая к $A(t)$ матрица-функция. Тогда числовая матрица $\left(P^{-1}\tilde{A}(\infty)\right)_{11}$ будет достаточно близка к единичной матрице и потому является обратимой. Это означает, что $\tilde{A}(t)$ допускает нормированную факторизацию P-типа. □

Теперь нетрудно изучить вопрос о непрерывности факторизационных множителей для матрицы-функции $A(t)$ и уточнить теорему Шубина. Оказывается, что если $A(t)$ и $\tilde{A}(t)$ достаточно близки и имеют одинаковый набор правых частных индексов, то, одинаково нормировав их факторизации, мы получим достаточно близкие факторизационные множители $C_\pm(t)$ и $\tilde{C}_\pm(t)$. При этом использование факторизаций Биркгофа, порожденных P-нормированными факторизациями $A(t)$ и $\tilde{A}(t)$, позволяет применить для оценки $\left\|C_\pm - \tilde{C}_\pm\right\|_W$ результаты работы [5].

Теорема 3. Пусть матрица-функция $A(t)$ допускает P-нормированную факторизацию $A(t) = C_-(t)D(t)C_+(t)$ и матрица-функция $\tilde{A}(t)$ удовлетворяет неравенству $\left\|A(t) - \tilde{A}(t)\right\| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\tilde{A}(t)$ допускает нормированную факторизацию $\tilde{A}(t) = \tilde{C}_-(t)D(t)\tilde{C}_+(t)$ того же типа, что $A(t)$, и

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{4}\|A\|_W, \frac{1}{16\left\|C_+^{-1}\right\|_W \left\|C_-^{-1}\right\|_W}, \frac{1}{128\left\|C_+\right\|_W \left\|C_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|C_+^{-1}\right\|_W^2}\right\}. \tag{7}$$

Тогда

$$\left\|C_- - \tilde{C}_-\right\|_W < 8\left(\left\|C_+^{-1}\right\|_W + 128\|A\|_W \left\|C_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|C_+^{-1}\right\|_W^2\right)\cdot\varepsilon, \left\|C_+ - \tilde{C}_+\right\|_W < 32\left(\left\|C_+\right\|_W^2 \left\|C_-^{-1}\right\|_W^2 \left\|C_+^{-1}\right\|_W^2\right)\cdot\varepsilon. \ □$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740024.

Литература

1. Гохберг, И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

2. Litvinchuk, G.S. Factorization of measurable matrix functions / G.S. Litvinchuk, I.M. Spitkovsky. – Birkhauser, Basel-Boston, 1987. – 372 p.

3. Clancey, K.F. Factorization of matrix functions and singular integral operators. Operator Theory, Advances and Applications / K.F. Clancey, I. Gohberg. – 1981. – 236 p.

4. Adukova, N.V. On effective criterion of stability of partial indices for matrix polynomials / N.V. Adukova, V.M. Adukov // Proceedings of the Royal Society A. – 2020. – Vol. 476, Iss. 2238. – p. 20200012.

5. Адукова, Н.В. Устойчивость факторизационных множителей канонической факторизации Винера–Хопфа матриц-функций / Н.В. Адукова, В.Л. Дильман // Вестник Южно-Уральского университета, серия Математика. Механика. Физика. – 2021. – Т. 13, № 1. – С. 5–13.

6. Чеботару, И.С. Сведение систем уравнений Винера–Хопфа с системам с нулевыми индексами / И.С. Чеботару // Изв. АН Молд. ССР, сер. физ.-техн. н. – 1967. – № 8. – С. 54–66.

7. Adukova, N. On a normalization of the Wiener–Hopf factorization for matrix functions / N. Adukova, V. Adukov // 13th International ISAAC Congress, August 2–6, 2021, Ghent, Belgium. – 2021. – P. 45.

8. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

Поступила в редакцию 5 декабря 2021 г.

Сведения об авторе

Адукова Наталия Викторовна, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия, E-mail: adukovanv@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2022, vol. 14, no. 1, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph220101

STABILITY OF FACTORIZATION FACTORS OF WIENER–HOPF FACTORIZATION OF MATRIX FUNCTIONS

N.V. Adukova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: adukovanv@susu.ru

Abstract. We consider the Wiener–Hopf factorization of two matrix functions A(t) and B(t) that are quite close in the norm of the Wiener algebra. The aim of this work is to study the question when the factorization factors of $A(t)$, $B(t)$ will be close enough to each other. This problem is of considerable interest in connection with the development of methods for approximate factorization of matrix functions. There are two main obstacles in the study of this problem: the instability of the partial indices of matrix functions and the non-uniqueness of their factorization factors. The problem was previously studied by M.A. Shubin, who showed that the stability of factorization factors takes place only in the case when $A(t)$ and $B(t)$ have the same partial indices. Then there is a factorization $B(t)$ for which the factorization factors are sufficiently close to the factors of $A(t)$. Theorem M.A. Shubin is non-constructive since it is not known when the partial indices of two close matrix functions will be the same, and the method for choosing the required Wiener–Hopf factorization of the matrix function $B(t)$ is not indicated. To overcome these shortcomings, in the present paper we study the problem of normalization of the factorization in the stable case, describe all possible types of normalizations, and prove their stability under a small perturbation $A(t)$. Now it is possible to find a constructive way of choosing the factorization of the perturbed matrix function, which guarantees the stability of the factorization factors.

Keywords: Wiener–Hopf factorization; stable system of partial indices; stability of factorization factors; normalization of factorization.

References

1. Gokhberg I.Ts., Fel'dman I.A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* (Convolution Equations and Projection Methods for their Solution). Moscow, Nauka, 1971, 352 p. (in Russ.)

2. Litvinchuk G.S., Spitkovsky I.M. *Factorization of Measurable Matrix Functions*. Birkhauser, Basel-Boston, 1987, p. 372. DOI: 10.1007/978-3-0348-6266-0

3. Clancey K.F., Gohberg I. Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators. *Operator Theory, Advances and Applications*, 1981, p. 236. DOI:10.1007/978-3-0348-5492-4

4. Adukova N.V., Adukov V.M. On effective Criterion of Stability of Partial Indices for Matrix Polynomials. *Proc. R. Soc. A.*, 2020, Vol. 476, Iss. 2238, 20200012. DOI:10.1098/rspa.2020.0012

5. Adukova N.V., Dilman V.L. Stability of Factorization Factors of the Canonical Factorization of Wiener–Hopf Matrix Functions. *Bulletin of the South Ural State University, Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2021, vol. 13, no. 1, pp. 5–13. (in Russ.).

6. Chebotaru I.S. Svedenie sistem uravneniy Vinera–Khopfa s sistemam s nulevymi indeksami (Reduction of Systems of Wiener–Hopf Equations to Systems with Zero Indices). *Izv. AN MSSR*, 1967, no. 8, pp. 54–66. (in Russ.).

7. Adukova N., Adukov V. On a Normalization of the Wiener–Hopf Factorization for Matrix Functions. *Proc. 13th ISAAC Congress, August 2–6, Ghent, Belgium*, 2021, pp. 45.

8. Voevodin V.V., Kuznecov U.A. *Matritsy i vychisleniya* (Matrices and Calculations). Moscow, Nauka Publ., 1984, 318 p. (in Russ.).

Received December 5, 2021

Information about the author

Adukova Nataliya Viktorovna, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: adukovanv@susu.ru