УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph220102

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООБМЕНА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

В.А. Белоногов
Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация
E-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратных задач об определении коэффициента теплообмена на границе раздела сред, входящего в условие сопряжения типа неидеального контакта. В цилиндрической пространственной области рассматривается параболическое уравнение второго порядка. Область делится на две подобласти, на общей части границы которых задается условие сопряжения. Коэффициент теплообмена, входящий в условие сопряжения, ищется в виде конечного отрезка ряда с неизвестными коэффициентами Фурье, зависящими от времени. Уравнение дополняется краевыми условиями общего вида и начальными условиями, а также условиями переопределения. Условия переопределения – значения решения в некотором наборе точек, лежащих в пространственной области. При естественных условия гладкости на данные и расположение точек замеров показана локальная по времени теорема существования и единственности решений. Полученное решение является регулярным, т. е. все обобщенные производные, входящие в уравнение, суммируемы с некоторой степенью и уравнение выполняется почти всюду. Метод является конструктивным, и на основе предложенного подхода возможно построение численных методов решения задачи. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и теореме о неподвижной точке.

Ключевые слова: обратная задача, задача сопряжения, коэффициент теплопередачи, параболическое уравнение, тепломассоперенос.

Введение

Мы исследуем обратные задачи об определении коэффициента теплопередачи, входящего в условие сопряжения. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x,t),\ \ (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

где $Lu = a_{nn} u_{x_n x_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} + a_0(x,t) u$, $G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная цилиндрическая область вида $G = \Omega \times (0,l)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\partial\Omega \in C^2$). Пусть $\Gamma = \partial\Omega \times (0,l)$, $S = (0,T) \times \Gamma$. Положим $G_1 = \Omega \times (0,a)$ ($a \in (0,l)$), $G_2 = \Omega \times (a,l)$. Уравнение (1) дополняется начальными и краевыми условиями:

$$Ru|_S = g, u(0,x) = u_0(x)(x \in G), R_0 u(t,x',0) = g_0, R_1 u(t,x',l) = g_1, \tag{2}$$

где $Ru = u$ или $Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} u_{x_j} \nu_i + \sigma u$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $R_0 u = u$ или $R_0 u = -u_{x_n} + \sigma_0 u$, соответственно, $R_1 u = u$ или $R_1 u = u_{x_n} + \sigma_1 u$, а также условиями сопряжения:

$$B^+ u = \frac{\partial u^+}{\partial N} - \beta(u^+ - u^-) = g^+, \frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{\partial u^-}{\partial N}, \tag{3}$$

где $\frac{\partial u^{\pm}}{\partial N}(t,x') = \lim_{x_n \to a \pm 0} a_{nn} u_{x_n}(t,x',x_n), u^{\pm} = \lim_{x_n \to a \pm 0} u(t,x',x_n)$. Пусть $y_i = (y_i', a)$ ($i = 1,2,\ldots,r$) – некоторый набор точек. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u(t, y_i', y_n)\big|_{y_n = a+0} = \psi_i(t)\ (i = 1,2,\ldots,r_0),\ u(t, y_i', y_n)\big|_{y_n = a-0} = \psi_i(t)\ (i = r_0 + 1,\ldots,r). \tag{4}$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(4) и неизвестной функции β вида $\beta=\sum_{i=1}^{r}\beta_i(t)\Phi_i(t,x')$, где функции Φ_i заданы, а функции α_i считаются неизвестными. Условия сопряжения (3) совпадают с известными в теории тепломассопереноса условия на границе двух сред, когда контакт не является идеальным (см. [1]) Если $\beta\to\infty$, мы получим стандартную постановку задачи дифракции (см. [2, 16, гл. 3]), когда условия имеют вид $u^+=u^-$, $\left.\frac{\partial u^+}{\partial N}\right|_{S_0}=\left.\frac{\partial u^-}{\partial N}\right|_{S_0}$.

Обратные задачи вида об определении коэффициента теплопередачи возникают при моделировании теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, исследовании композитных материалов и т. п. (см. [3–8]). В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному решения задач типа (1)–(4) в различных постановках, возникающих в приложениях, как правило, ищется коэффициент β, зависящими от времени или наоборот от пространственных переменных, точки $\{y_i\}$ в (4) чаще всего являются внутренними точками областей G_1, G_2. В приложениях возникают два случая, в первом из них одна из областей, например, G_2 лежит строго внутри области G и во втором случае рассматривается цилиндрическая область, описанная выше, состоящая из двух или более слоев (см. [7, 8]). Численному решению задачи или близкой к ней посвящены работы [5–12]. В качестве метода почти во всех работах используется сведение обратной задачи к некоторой задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала [5, 6, 9–12]. Иногда возникают и задачи об одновременном определении коэффициента, входящего в параболическое уравнение, и коэффициента теплообмена (см. [6]). В этой работе в качестве условий переопределения используются значения замеров температур в точках на границе раздела слоев (как и в условии (4)). Насколько нам известно, теоретических результатов о разрешимости (или единственности решений) задач вида (1)–(4) в литературе не имеется.

В данной работе мы изучаем вопросы корректности задачи (1)–(4), в частности, мы получим теоремы существования и единственности решений (основной результат – теорема 2).

Определения и вспомогательные результаты

В работе мы используем пространства Соболева и Гельдера $W_p^s(G)$, $W_p^s(Q)$, $C^\alpha(\overline{Q})$ а также их анизотропные варианты $W_p^{s,r}(S)$, $W_p^{s,r}(Q)$, $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$ (см. определения в [2, 13, 14]). По определению $W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(0,T;L_p(G))\cap L_p(0,T;W_p^r(G))$. Пусть Γ – гладкая поверхность размерности $n-1$ и $S=(0,T)\times\Gamma$. Тогда, соответственно, $W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Определение включения $\partial\Omega\in C^2$ может быть найдено в [2, с. 9]). Пусть $(u,v)=\int_G u(x)\overline{v(x)}dx$. Обозначим через $B_\delta(y_i)$ – шар радиуса δ с центром в точке y_i. Параметр $\delta>0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(y_i)}\cap\partial G=\varnothing$, $\overline{B_\delta(y_i)}\cap\overline{B_\delta(y_j)}=\varnothing$ для $i\neq j$. Далее во всех условиях на данные считаем такой параметр фиксированным.

Введём обозначения: $Q^\phi=(0,\phi)\times G$, $S_0=(0,T)\times\Omega$, $S_0^\phi=(0,\phi)\times\Omega$, $\Gamma_1=\partial\Omega\times(0,a)$, $\Gamma_2=\partial\Omega\times(a,l)$, $S_i^\phi=(0,\phi)\times\Gamma_i$, $S_i=(0,T)\times\Gamma_i$ $(i=1,2)$, $G^\delta=\cup_i B_\delta(x_i)$, $G_i^\delta=G^\delta\cap G_i$ $(i=1,2)$, $Q_i=(0,T)\times G_i$, $Q_i^\tau=(0,\tau)\times G_i$ $(i=1,2)$. Нам понадобятся весовые пространства $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q)=\{u\in W_p^{s,2s}(Q):ut^{-s}\in L_p(Q)\}$ с нормой

$$\|u\|^p_{W_p^{s,2s}(Q)} = \left(\int\limits_G\int\limits_0^T\frac{|u(x,t)|^p}{t^{sp}}dtdx+\int\limits_G\int\limits_0^T\int\limits_0^T\frac{|u(x,t)-u(x,t)|^p}{|t-\tau|^{1+sp}}dtd\tau dx+\|u\|^p_{L_p(0,T;\tilde{W}_p^{2s}(G))}\right)^{1/p} \tag{5}$$

Вообще говоря, при $s<1/p$ это пространство совпадает с $W_p^{s,2s}(Q)$, а при $s>1/p$ с подпространством $\{u\in W_p^{s,2s}(Q):u(0,x)=0\}$ (см. лемму 1 пункта 3.2.6 в [13]). По аналогии определяем пространства $\tilde{W}_p^s(0,T;L_p(\Gamma))$, $\tilde{W}_p^{s,2s}(S_i)$. Положим $s_0=1/2-1/2p$, $s_1=1-1/2p$ и всюду ниже считаем, что $p>n+2$. Доказательство следующей леммы совпадает с приведенным в лемме 2 в [15]). Поэтому мы его опустим.

Лемма 1 *Существует постоянная C, не зависящая от $\phi\in(0,T]$, такая, что*

$$\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_i^\phi)}+\left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_i^\phi)}\le C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_i^\phi)},$$

$$\left\|v_{x_n}(t,x',c)\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\phi)}+\left\|v(t,x',c)\right\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_0^\phi)}\le C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_i^\phi)},i=1,2, \tag{6}$$

где $c=0$ или $c=a$ при $i=1$ и $c=a$ или $c=l$ при $i=2$, для всех $v\in W_p^{1,2}\left(Q_i^\phi\right)$ таких, что $v(0,x)=0$. Здесь $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ – производная по нормали к S_i^ϕ.

Лемма 2 *Пусть $s\in(1/p,1)$. Произведение $q\cdot v$ функций класса $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$ $(\tau\in(0,T])$ снова принадлежит $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$, а если $q\in\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ и $v\in\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ (или $v\in W_p^{s,2s}(Q)$), то справедливы соответствующие оценки*

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\le c_0\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\|v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)},\ \|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\le c_1\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

где постоянные c_i не зависят от τ. Множество Q^τ в этих утверждениях может быть заменено Q_i^τ, S_i^τ. В случае если q зависит только одной переменной t, норма q в $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ в этих неравенствах заменяется на норму q в $\tilde{W}_p^s(0,\tau)$.

Доказательство. Доказательство основано на определении нормы и оно повторяет доказательство леммы 1 в [16]. Поэтому мы его опустим.

Оператор L считается эллиптическим, т. е. для некоторой постоянной $\delta_0>0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\delta_0|\xi|^2\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\forall(t,x)\in Q,$$

(здесь и далее полагаем, что $a_{ni}=a_{in}=0$ при $i<n$). Приведем условия на данные. Мы предполагаем, что

$$a_i\in L_p(Q)(i=0,\ldots,n),\ a_{ij}\in C(\overline{Q_k}),\sigma\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_k}), \tag{7}$$

$$a_{ij}\big|_{S_k}\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0+\varepsilon}(\overline{S_k}),\sigma_k\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}),i,j=1,\ldots,n,k=1,2, \tag{8}$$

где $\varepsilon_0\in(0,1/2)$ – положительный параметр (он может быть как угодно мал) и включения $a_{ij}\big|_{S_k},\sigma\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\bar{S}_k)$ означают, что $a_{ij}\big|_{S_k},\sigma\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(S_k)$ и эти функции допускают непрерывное продолжение на $\overline{S_k}$ класса $C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\bar{S}_k)$. При переходе через плоскость $x_n=a$ они, вообще говоря, имеют разрывы первого рода.

Дополнительно предположим, что

$$a_i\in L_\infty\left(0,T;W_p^1\left(G_k^\delta\right)\right)(i=0,\ldots,n),a_{ij}\in L_\infty\left(0,T;W_\infty^1\left(G_k^\delta\right)\right),i,j=1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

где $k=1,2$. Построим функции $\varphi_i(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x)=1$ в $B_{\delta/2}(x_i)$ и $\varphi_i(x)=0$ в $\mathbb{R}^n\setminus B_{3\delta/4}(x_i)$, положим $\varphi(x)=\sum_i\varphi_i(x)$ ($i=1,2,\dots,r$). Считаем, что

$$u_0(x)\in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G_k),g^+\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0),g_i\in W_p^{k_1,2k_1}(S_0),g\in W_p^{k_0,2k_0}(S_i)\ (i=1,2),\tag{10}$$

где $k_0=s_0$ (соответственно, $k_1=s_0$) в случае условий третьей краевой задачи и $k_0=s_1$ (соответственно $k_1=s_1$) в случае условий Дирихле. Условия согласования при $t=0$ записываются в виде:

$$g(0,x)=Ru_0|_\Gamma,\frac{\partial u_0^+}{\partial N}=\frac{\partial u_0^-}{\partial N},\tag{11}$$

$$B^+u_0=\frac{\partial u_0^+}{\partial N}-\beta(u_0^+-u_0^-)=g^+(0,x'),\tag{12}$$

где $\frac{\partial u_0^\pm}{\partial N}(x')=a_{nn}u_{0x_n}(0,x',a\pm0),u_0^\pm=u_0(x',a\pm0)$. Пусть также

$$f\in L_p(Q),a_{nn}(t,x',a\pm0)\in C^{s_0+\varepsilon_0,2s_0+2\varepsilon_0}(\overline{S_0}),\nabla_{x'}\varphi f(t,x)\in L_p(Q),\tag{13}$$

$$\nabla_{x'}\varphi u_0(x)\in W_p^{2-2/p}(G_k)\ \nabla_{x'}\varphi g^+\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0),\nabla_{x'}a_{nn}(t,x',a\pm0)\in W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta}),\quad(14$$

$$\Phi_i\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0),\nabla_{x'}\Phi_i\in W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta}),i=1,\dots,r,k=1,2,\tag{15}$$

где $S_{0\delta}=(0,T)\times\cup_{i=1}^rB_\delta(y_i')$, положим $S_{0\delta}^\tau=(0,\tau)\times\cup_{i=1}^rB_\delta(y_i')$. Нам понадобятся дополнительные условия согласования:

А) если $R_iu=u$ $(i=0,1)$ и $Ru=u$, то $g_i(t,x')|_{\partial\Omega}=g(t,x',r_i)$ $(r_0=0,r_1=l)$; если $R_iu=u$ $(i=0,1)$ и $Ru\neq u$, то $R(t,x',r_i)g_i(t,x')|_{\partial\Omega}=g(t,x',r_i)$; если $R_iu\neq u$ $(i=0,1)$ и $Ru=u$, то $R_ig(t,x',r_i)=g_i(t,x')|_{\partial\Omega}$; если $Ru=u$, то $B^+g=g^+(t,x')|_{\partial\Omega}$ и $\frac{\partial g^+}{\partial N}=\frac{\partial g^-}{\partial N}$, где $\frac{\partial g^\pm}{\partial N}=a_{nn}g_{x_n}(t,x',a\pm0)$.

Приведем теорему о разрешимости прямой задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* А), (7)–(14) *и* $\beta\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0)$, $\nabla_{x'}\beta\in W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta})$. *Тогда для любого* $\tau\in(0,T]$ *существует единственное решение* u *задачи (1)–(3) такое, что* $u,\nabla_{x'}\varphi u(t,x)\in W_p^{1,2}(Q_1^\tau)\cap W_p^{1,2}(Q_2^\tau)$. *Если* $u_0\equiv0$, *то справедлива оценка*

$$\|\nabla_{x'}\phi u(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|\nabla_{x'}\phi u(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}+\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}$$

$$C_1(\|g\|_{\tilde W_p^{k_0,2k_0}(S_1^\tau)}+\|g\|_{\tilde W_p^{k_0,2k_0}(S_2^\tau)}+\|f\|_{L_p(Q^\tau)}+\|\nabla_{x'}\varphi f\|_{L_p(Q^\tau)}+\|g^+\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}$$

$$+\|\nabla_{x'}\varphi g^+(t,x')\|_{\tilde W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}+\|g_0\|_{\tilde W_p^{k_0,2k_0}(S_0^\tau)}+\|g_1\|_{\tilde W_p^{k_2,2k_2}(S_0^\tau)}),\tag{16}$$

где постоянная C_1 не зависит от $\tau\in(0,T)$ и $k_0=s_1$ или $k_1=s_1$ или $k_2=s_1$ если соответствующий оператор R или R_0, или R_1 определяет условие Дирихле. Если оператор R или R_1 или R_2 задает условие типа Робина, то $k_0=s_0$ или, соответственно, $k_1=s_0$ или $k_2=s_0$.

Доказательство теоремы 1. Утверждение о разрешимости задачи (1)–(3) из класса $u\in W_p^{1,2}(Q_1^\tau)\cap W_p^{1,2}(Q_2^\tau)$ вытекает из теоремы 3 [17]. Наша задача – частный случай задачи рассмотренной в этой теореме. Однако, к сожалению у нас есть отличия в условиях гладкости на коэффициент β. Вообще говоря в [17] требуется, чтобы он принадлежал некоторому классу

Гельдера. Однако само утверждение теоремы 3 сформулировано для любого p. В нашем случае условие $p>n+2$ гарантирует, как и в случае пространств Гельдера, справедливость соответствующей теоремы о точечных мультипликаторах для пространств Соболева (лемма 2) и соответственно справедливость этой теоремы. Утверждение о дополнительной гладкости решения может быть легко доказано с помощью метода конечных разностей. Фактически, доказательство совпадает с доказательством первой половины теоремы 4 [18, гл. 4, §2, п. 3], где вначале устанавливается дополнительная гладкость решений по касательным переменным. Обоснование того факта, что постоянная C_1 в (16) может быть взята не зависящей от τ осуществляется по той же схеме, что и в доказательстве теоремы 2 в [17].

Основные результаты

Приведем дополнительные условия на исходные данные. Пусть $\Phi(t)$ – матрица с элементами $\phi_{ij}=\Phi_j(t,y_j')$. Мы предполагаем, что

$$u_0^+(y_j')\neq u_0^-(y_j')\ \ (i=1,2,\ldots,r), |\det\Phi|\geq\delta_1>0\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{17}$$

$$u_0^+(y_j')=\psi_i(0),\ \psi_i(t)\in W_p^{s_1}(0,T)\ \ (i=1,2,\ldots,r_0),\ u_0^-(y_j')=\psi_i(0)\ \ (i=r_0+1,\ldots,r), \tag{18}$$

где δ_1 – некоторая положительная постоянная. Рассмотрим равенство (12) в точке $(0,y_j')$:

$$B^+u_0=\frac{\partial u_0^+(y_j')}{\partial N}-\beta(0,y_j')(u_0^+(y_j')-u_0^-(y_j'))=g^+(0,y_j'),\ \beta(0,y_j')=\sum_{i=1}^{r}\beta_i(0)\Phi_i(0,y_j'). \tag{19}$$

Положив $\vec{\beta}_0=(\beta_1(0),\ldots,\beta_r(0))$, $\vec{F}=(F_1,\ldots,F_r)$, получим систему

$$\Phi(0)\vec{\beta}_0=\vec{F}_0,\ F_j=\left(\frac{\partial u_0^+(y_j')}{\partial N}-g_j^+(0,y_j')\right)\Bigg/\left(u_0^+(y_j')-u_0^-(y_j')\right),\ j=1,2,...,r,$$

которая в силу условия (17) имеет единственное решение $\vec{\beta}_0$. Положим $\beta_0=\sum_{i=1}^{r}\beta_i(0)\Phi_i(t,x')$, $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, $\alpha_k=\beta_k-\beta_k(0)$, $\alpha(t,x')=\beta(t,x')-\beta_0(t,x')$. Тогда, чтобы было выполнено (12), необходимо

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N}(x')=\beta_0(0,x')(u_0^+-u_0^-)(x')+g^+(0,x'),\frac{\partial u_0^+}{\partial N}(x')=\frac{\partial u_0^-}{\partial N}(x'),\ x'\in\Omega. \tag{20}$$

Считая, что условия теоремы 1 выполнены, построим решение w_0 задачи сопряжения (1)–(3) на промежутке $[0,T]$, где возьмем функцию β_0 вместо β. Отметим, что в силу условия (15) и леммы 2, $\beta_0\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0)$, $\nabla_{x'}\beta_0\in W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta})$ и таким образом, условия теоремы 1 на коэффициент β выполнены. Условия (17), (18) и включение $w_0\in W_p^{1,2}(Q_k)\subset C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q_k})$ ($\alpha\leq 2-(n+2)/p$, $k=1,2$) гарантируют существование постоянных $\tau^0>0,\delta_2>0$ таких, что

$$|\psi_i(t)-w_0^-(t,y_j')|\geq\delta_2>0\ \ (i\leq r_0),\ \ |\psi_i(t)-w_0^+(t,y_j')|\geq\delta_2>0,\ \forall t\in[0,\tau^0],\ \ (i>r_0). \tag{21}$$

Сделаем замену $u=v+w_0$ в (1)–(4). Функция v есть решение обратной задачи

$$Mv=v_t-Lv=0,\ Bv|_S=0,\ v|_{t=0}=0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}-\beta_0(v^+-v^-)=\alpha(v^+-v^-)+\alpha(w_0^+-w_0^-),\ \frac{\partial v^+}{\partial N}=\frac{\partial v^-}{\partial N},\ (t,x')\in S_0, \tag{23}$$

$$v^+(t,y_j')=\tilde{\psi}_i(t)=\psi_i(t)-w_0^+(t,y_j')\ \ (i\leq r_0),\ v^-(t,y_j')=\tilde{\psi}_i(t)=\psi_i(t)-w_0^-(t,y_j')\ \ (i>r_0). \tag{24}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A), (7)–(11), (13)–(15), (17), (18), (20) *. Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение* u *задачи* (1)–(4) *такое, что* $u\in W_p^{1,2}(Q_i^{\tau_0})$ $(i=1,2)$, $\beta_i(t)\in W_p^{s_0}(0,\tau_0)$ $(i=1,2,\ldots,r)$, *причем* $\nabla_{x'}\varphi u(x)\in W_p^{1,2}(Q_i^{\tau_0})(i=1,2)$.

Доказательство. Достаточно доказать разрешимость вспомогательной задачи (22)–(24). Построим интегральное уравнение для нахождения вектор-функции $\vec{\alpha}$. Фиксируя функцию α и применяя теорему 1 к задаче (22)–(23), мы построим отображение $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$. Возьмем точку $y_i' \in \Omega$ и функцию φ_i $(i \le r)$. Умножая уравнение (22) на φ_i, имеем

$$Mw = w_t - Lw = [\varphi_i, L]v = f_0, w = \varphi_i v, w|_{t=0} = 0, \tag{25}$$

где $[\varphi_i, L]v = \varphi_i Lv - L(\varphi_i v) = -2\sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} v_{x_k} \varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} v \varphi_{ix_k x_l} - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{ix_k} v$. Равенства (25) можно переписать в виде

$$w_t - a_{nn}(t,x) w_{x_n x_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} w_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i w_{x_i} + a_0 w + f_0 = f_1. \tag{26}$$

Отметим, что $a_{nn} > 0$ для всех t, x. Имеем, что $f_1, \nabla_{x'} f_1 \in L_p(Q^\tau)$. В силу теорем вложения, $f_1(t, x', x_n) \in C^\alpha(\overline{\Omega}; L_p((0,\tau)\times(0,l)))$ с $\alpha \le 1-(n-1)/p$, после может быть изменения на множестве меры ноль (см. соотношения (3.1)–(3.3), (3.5), (3.6), следствие 4.3 в [19] и включение (5.7′) в [20]). Рассмотрим уравнения

$$w_{it}(t, x_n) - a_{nn}(t, y_i', x_n) w_{ix_n x_n} = f_1(t, y_i', x_n) \ (i = 1, 2, \ldots, r_0), \tag{27}$$

$$w_{it}(t, x_n) - a_{nn}(t, y_i', x_n) w_{ix_n x_n} = f_1(t, y_i', x_n) \ (i = r_0 + 1, \ldots, r). \tag{28}$$

Дополним уравнения (27), (28) начальными и краевыми условиями

$$w_i(0, x_n) = 0, w_i|_{x_n = a+0} = \psi_i(t), w_i|_{x_n = a+\delta} = 0, i \le r_0. \tag{29}$$

$$w_i(0, x_n) = 0, w_i|_{x_n = a-0} = \psi_i(t), w_i|_{x_n = a-\delta} = 0, i > r_0. \tag{30}$$

Решение w_i задачи (27), (29) (или (28), (30) соответственно) существует и единственно [2]. В случае если $v, \vec{\alpha}$ есть решение задачи (22)–(24), имеем, что $w_i(t, x_n) = \varphi_i v(t, y_i', x_n)$. Перепишем условие сопряжения (23) в виде

$$a_{nn}^+ v_{x_n}^+(t, x') - \beta_0(v^+ - v^-)(t, x') = \alpha(v^+ - v^-)(t, x') + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t, x'), \tag{31}$$

Рассмотрим это условие в точке (t, y_i') и используя (24), получим

$$\begin{gathered} a_{nn}^+(t, y_i') v_{x_n}^+(t, y_i') - \beta_0(v^+ - v^-)(t, y_i') = \\ \alpha(v^+ - v^-)(t, y_i')) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t, y_i')), \ i = 1, 2, \ldots, r_0, \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} a_{nn}^-(t, y_i') v_{x_n}^-(t, y_i') - \beta_0(v^+ - v^-)(t, y_i') = \\ \alpha(v^+ - v^-)(t, y_i')) + \alpha(w_0^+ - w_0^-)(t, y_i')), \ i = r_0 + 1, \ldots, r. \end{gathered} \tag{33}$$

Искомая система для нахождения координат вектора $\vec{\alpha}$ имеет вид

$$\begin{gathered} \alpha(t, y_i') = (a_{nn}^+(t, y_i') w_{ix_n}(t, a) - \beta_0(v^+ - v^-)(t, y_i') + \\ \alpha v^-(t, y_i')) \big/ (\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t, y_i')) = F_i, \ i = 1, 2, \ldots, r_0, \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} \alpha(t, y_i') = (a_{nn}^-(t, y_i') w_{ix_n}(t, a) - \beta_0(v^+ - v^-)(t, y_i') - \\ \alpha v^+(t, y_i')) \big/ (-\tilde{\psi}_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t, y_i')) = F_i, \ i = r_0 + 1, \ldots, r. \end{gathered} \tag{35}$$

Отметим, что в силу (21) знаменатели в этих равенствах строго отделены от нуля на промежутке $[0, \tau^0]$. Здесь v – решение задачи сопряжения (22)–(23), а функции w_i – решения задач (27), (29) и (27), (30) соответственно. Она также может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \tag{36}$$

где координаты вектора F определены равенствами (34), (35). Отметим, что лемма 2 гарантирует оценку

$$\left\|\Phi^{-1}\vec{F}\right\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c\left\|\vec{F}\right\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{37}$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре $B_{R_0}=\{\vec{\alpha}\in W_p^{s_0}(0,\tau):\|\vec{\alpha}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)}\le R_0\}$ и переводит его в себя. Возьмем $\vec{\alpha}=0$. Тогда в силе единственности решений задачи сопряжения (22)–(23) $v=v(\vec{\alpha})=0$, в этом случае вектор $\vec{F}(0)$ запишется в виде

$$F_i(0)=a_{nn}^{+}(t,y_i')\omega_{ix_n}(t,a)\big/(\tilde{\psi}_i(t)+(w_0^{+}-w_0^{-})(t,y_i')),\ i=1,2,\dots,r_0,$$

$$F_i(0)=a_{nn}^{-}(t,y_i')\omega_{ix_n}(t,a)\big/(-\tilde{\psi}_i(t)+(w_0^{+}-w_0^{-})(t,y_i')),\ i=r_0+1,\dots,r,$$

где ω_i решения задач (27), (29) или (28), (30) соответственно, где правые части в (27) и (28) равны нулю. Положим $R_0=2\left\|\Phi^{-1}\vec{F}(0)\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau^0)}$. Получим оценки, считая, что $\vec{\alpha}\in B_{R_0}$ и $\tau\le\tau^0$.

Из теоремы 1 вытекает оценка

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\le c_0\left\|\alpha(v^{+}-v^{-})\right.$$

$$\left.+\alpha(w_0^{+}-w_0^{-})\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi(\alpha(v^{+}-v^{-})+\alpha(w_0^{+}-w_0^{-}))(t,x')\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}), \tag{38}$$

где постоянная c_0 не зависит от τ. Воспользовавшись леммой 2, получим, что первое слагаемое J_0 в правой части здесь оценивается через

$$J_0\le c_1\|\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}(\|v^{+}-v^{-}\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}+\left\|w_0^{+}-w_0^{-}\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \tag{39}$$

Второе слагаемое J_1 оценивается через

$$J_1\le c_2(\|\nabla_{x'}\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta}^\tau)}(\left\|(v^{+}-v^{-})\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}+\left\|(w_0^{+}-w_0^{-})(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)})+$$

$$\|\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}(\left\|\nabla_{x'}\varphi(v^{+}-v^{-})\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\phi(w_0^{+}-w_0^{-})(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \tag{40}$$

В силу леммы 2 имеем оценку

$$\|\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}\left(S_0^\tau\right)}+\|\nabla_{x'}\alpha\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}\left(S_{0\delta}^\tau\right)}\le$$

$$c_3\sum_{i=1}^{r}\|\alpha_i\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\left(\|\Phi_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}+\|\nabla_{x'}\Phi_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{0\delta})}\right)\le c_4\|\vec{\alpha}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{41}$$

где постоянная c_4, равно как и постоянные c_0-c_3, не зависит от τ. Далее, у нас имеет место оценка

$$\left\|(v^{+}-v^{-})\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi(v^{+}-v^{-})\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}\le$$

$$c_5\tau^{1/2}\left(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\right), \tag{42}$$

которая была получена в доказательстве теоремы 3 в [17] (см. неравенства (50)–(52)). Приведем краткое доказательство. Оценим первое слагаемое в (42). Второе оценивается точно так же. Имеем

$$\|v^{\pm}\|^p_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}=\int_0^\tau\frac{|v^{\pm}|^p}{t^{s_0p}}dt+\int_0^\tau\int_0^\tau\frac{|v^{\pm}(t)-v^{\pm}(\xi)|^p}{|t-\xi^{1+s_0}|^p}dtd\tau\le\tau^{(s_1-s_0)p}\|v^{\pm}\|^p_{\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau)}. \tag{43}$$

Отсюда вытекает, что

$$\|v^{\pm}\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)\right)}\le\tau^{1/2}\|v^{\pm}\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau)\right)}. \tag{44}$$

По лемме 1 правая часть оценивается через $C\tau^{1/2}\left(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\right)$. Таким образом, имеем неравенство:

$$\|v^+\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)\right)}+\|v^-\|_{L_p\left(\Omega;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)\right)}\le C\tau^{1/2}\left(\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\right). \quad (45)$$

Оценим нормы $\|v^\pm\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega)\right)}$. Например, для функции v^+ имеем, что

$$\|v^+\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega)\right)}\le c_6\|v\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^1\left(G_2^\tau\right)\right)}\le c_7\|v\|^{1/2}_{Lp\left(Q_2^\tau\right)}\|v\|^{1/2}_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}\le c_8\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}. \quad (46)$$

Здесь мы воспользовались теоремой о следах [13, теорема 4.7, с. 412] и соответствующей оценкой $\|v^+\|_{W_p^{1-1/p}(\Omega)}\le c_1\|v^+\|_{W_p^1(G_2)}$, интерполяционным неравенством $\|v^+\|_{W_p^1(G_2)}\le C\|v^+\|^{1/2}_{L_p(G_2)}\|v^+\|^{1/2}_{W_p^2(G_2)}$ и неравенством $\|v^+\|_{L_p(0,\tau)}\le\tau\|v_t^+\|_{L_p(0,\tau)}$ $(v(0,x)=0)$, вытекающим из формулы Ньютона–Лейбница. Здесь все постоянные не зависят от τ. Аналогично для функции v^- имеем

$$\|v^-\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^{1-1/p}(\Omega)\right)}\le c_9\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)} \quad (47)$$

Таким образом, справедливо неравенство (42). Из (38)–(42) вытекает неравенство

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\le$$

$$c_{10}\tau^{1/2}\|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\left(\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}\right)$$

$$+c_{10}\|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\left(\left\|(w_0^+-w_0^-)(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+-w_0^-)(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}\right). \quad (48)$$

Выбрав τ_1 такое, что $c_{10}R_0\tau_1^{1/2}=1/2$, из (48) получим, что при $\tau\le\tau_2=\min\left(\tau_1,\tau^0\right)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\|v\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi v(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}\le$$

$$2c_{10}\|\vec{\alpha}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\left(\left\|(w_0^+-w_0^-)(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+-w_0^-)(t,x')\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}\right). \quad (49)$$

Пусть $\vec{\alpha}_i=\left(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\ldots,\alpha_{ir}\right)\in B_{R_0}$ $(i=1,2)$ и v_i – соответствующие решения задачи (22), (23), с функциями $\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}\Phi_j$ $(i=1,2)$ вместо α. Имеет место оценка (49), где в правой части стоят соответствующие нормы $\|\vec{\alpha}_i\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}$. Тогда разности $v_1-v_2=\omega$, $\gamma=\alpha_1-\alpha_2$ есть решение задачи

$$Mv=\omega_t-L\omega=0, B\omega|_S=0, \omega|_{t=0}=0, \frac{\partial\omega^+}{\partial N}=\frac{\partial\omega^-}{\partial N}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial\omega^+}{\partial N}-\beta_0(\omega^+-\omega^-)=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2}(\omega^+-\omega^-)+\frac{\gamma}{2}(v_1^++v_2^+-v_1^--v_2^-)+\gamma(w_0^+-w_0^-). \quad (51)$$

Пусть $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$. Задача (50), (51) имеет тот же вид, что и задача (22), (23), поэтому при $\tau\le\tau_2$ имеет место та же оценка (49), которая запишется в виде

$$\|\omega\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\|\omega\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_1^\tau\right)}+\left\|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_2^\tau\right)}\le$$

$$2c_{10}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\left\|\frac{1}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + w_0^+ - w_0^-\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} +$$

$$\left\|\nabla_{x'}\varphi(\frac{1}{2}(v_1^+ + v_2^+ - v_1^- - v_2^-) + w_0^+ - w_0^-)\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}). \qquad (52)$$

Из оценок (42), записанных для функций v_1, v_2, и (52) вытекает неравенство

$$\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} + \left\|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \left\|\nabla_{x'}\varphi\omega(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} \le$$

$$c_{11}\|\vec{\gamma}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}(\left\|w_0^+ - w_0^-\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)} + \left\|\nabla_{x'}\varphi(w_0^+ - w_0^-)\right\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0)}), \qquad (53)$$

где постоянная c_{11} не зависит от τ. Пусть w_i^j $(j=1,2)$ – решения задач (27), (29) и (27), (30) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_i, и $w^0 = \varphi_i\omega$. Тогда разности $k_i = w_i^1 - w_i^2$ есть решения задач

$$k_{it} - a_{nn}(t, y_i', x_n)k_{ix_nx_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\omega^0_{z_iz_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i\omega^0_{z_i} + a_0\omega^0 + [\varphi_i, L]\omega|_{x'=y_i'} = f_i(t, y_i', x_n), \qquad (54)$$

$$k_i|_{t=0} = 0, k_i|_{x_n=a} = 0, k_i|_{x_n=a+\delta} = 0 \ (i \le r_0), \qquad (55)$$

$$k_i|_{t=0} = 0, k_i|_{x_n=a} = 0, k_i|_{x_n=a-\delta} = 0 \ (i > r_0). \qquad (56)$$

Из известных свойств параболических задач (см., например, [2]) имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r_0}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(a,a+\delta))} + \sum_{i=r_0+1}^{r}\|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(a-\delta,a))} \le$$

$$c_{13}\left(\sum_{i=1}^{r_0}\|f_i\|_{L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta))} + \sum_{i=r_0+1}^{r}\|f_i\|_{L_p((0,\tau)\times(a-\delta,a))}\right). \qquad (57)$$

Пусть, например, $i \le r_0$. Имеем

$$\left\|\tilde{f}_i(t, y_i', x_n)\right\|_{L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta))} \le c_{14}\left\|f_i(t,x)\right\|_{W_p^s(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))} = J, s > (n-1)/p, \qquad (58)$$

в силу теорем вложения (см. следствие 4.3 и соотношения (3.1)–(3.12) в [19]). Далее используем неравенства, вытекающие из соответствующих интерполяционных теорем (см. следствие 4.3 и соотношение (3.7) в [19]).

$$J \le c_{15}\left\|\tilde{f}_i(t,x)\right\|^{\theta}_{W_p^1(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}\left\|\tilde{f}_i(t,x)\right\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}, 2\theta - 1 = s. \qquad (59)$$

Ввиду замечания 5.3 (c) в [19] норма в последнем пространстве может быть определена как

$$\|f_i\|_{W_p^{-1}(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))} = \sup_{\varphi\in W_q^1(\Omega; L_q((0,\tau)\times(a,a+\delta)))}\left|\left(\tilde{f}_i, \varphi\right)\right|, \ 1/p + 1/q = 1,$$

где скобки обозначают продолжение скалярного произведения в L_2 до отношения двойственности между соответствующими пространствами. Исходя из определения $\tilde{f}_i$ и условий на коэффициенты имеем

$$\|\tilde{f}_i\|_{W_p^{-1}(\Omega; L_p((0,\tau)\times(a,a+\delta)))} \le c_{16}\left(\|\omega\|_{L_p(0,\tau; W_p^1(G_1))} + \|\omega\|_{L_p(0,\tau; W_p^1(G_2))}\right) \le$$

$$c_{17}\tau^{1/2}\left(\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)}\right), \qquad (60)$$

где постоянная c_1 не зависит от τ. Последняя оценка получается, если мы применим интерполяционное неравенство

$$\|v\|_{L_p\left(0,\tau;W_p^1(G_i)\right)} \le c_{18}\|v\|^{1/2}_{L_p\left(0,\tau;W_p^2(G_i)\right)}\|v\|^{1/2}_{L_p\left(0,\tau;L_p(G_i)\right)}$$

и оценку $\|v\|_{L_p\left(0,\tau;L_p(G_i)\right)} \le \tau\|v_t\|_{L_p\left(0,\tau;L_p(G_i)\right)}$, вытекающую из формулы Ньютона–Лейбница, а затем оценим полученные нормы через норму в $W_p^{1,2}\left(Q_i^\tau\right)$. Оценки (59), (60) влекут, что

$$\left\|\tilde f_i(t,x_i,x_n)\right\|_{L_p\left((0,\tau)\times(a,a+\delta)\right)} \le c_{19}\tau^{(1-\theta)/2}\left\|\nabla_{x'}\varphi_i\omega(t,x)\right\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} +$$

$$\|\nabla_{x'}\varphi_i\omega(t,x)\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)} + (\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)})^{\theta}(\|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|\omega\|_{W_p^{1,2}(Q_2^\tau)})^{1-\theta}. \quad (61)$$

где c_{19} – постоянная не зависящая от τ. Как вытекает из неравенства (53), неравенство (61) можно переписать в виде

$$\left\|\tilde f_i(t,x_i,x_n)\right\|_{L_p\left((0,\tau)\times(a,a+\delta)\right)} \le c_{20}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec\gamma\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)},\ i \le r_0. \quad (62)$$

Очевидно, что такая же оценка имеет место и в случае $i > r_0$. Из (57), (62) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r_0}\|k_i\|_{W_p^{1,2}\left((0,\tau)\times(a,a+\delta)\right)} + \sum_{i=r_0+1}^{r}\|k_i\|_{W_p^{1,2}\left((0,\tau)\times(a-\delta,a)\right)} \le c_{21}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec\gamma\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

В частности, отсюда вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{r}\left\|k_{iz_n}(t,a)\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{22}\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec\gamma\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (63)$$

Оценим $\|R(\vec\alpha_1) - R(\vec\alpha_2)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}$. Из (37) вытекает оценка

$$\|R(\vec\alpha_1) - R(\vec\alpha_2)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{23}\sum_{i=1}^{r}\|F_i(\vec\alpha_1) - F_i(\vec\alpha_2)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (64)$$

Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec\alpha_1) - F_i(\vec\alpha_2)$. Пусть, например, $i \le r_0$. Оно записывается в виде

$$J_1 = a_{nn}^+(t,y_i')\left(\omega_{ix_n}^1 - \omega_{ix_n}^2\right)(t,a)/\left(\tilde\psi_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')\right)$$

В силу леммы 2 и неравенства (63) имеем

$$\|J_1\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{24}\left\|\omega_{iz_n}^1 - \omega_{iz_n}^2\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2\tau^{\beta_1}\|\vec\alpha_1 - \vec\alpha_2\|_{\tilde W_p^{s}(0,\tau)}, \quad (65)$$

где все постоянные не зависят от τ, β_1 – положительная постоянная. Рассмотрим второе слагаемое

$$J_2 = -\beta_0\left(w^+ - w^-\right)(t,y_i')/\left(\tilde\psi_i(t) + (w_0^+ - w_0^-)(t,y_i')\right).$$

В силу леммы 2 имеем

$$\|J_2\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{25}\sum_{i=1}^{r}\left\|(\omega^+ - \omega^-)(t,y_i')\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Справедливы очевидные оценки (лемма 1, (53) и теоремы вложения (см. [19]))

$$\left\|w^\pm(t,y_i')\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_1\left\|\varphi w^\pm(t,x')\right\|_{W_p^1\left(\Omega;W_p^{s_0}(0,\tau)\right)} \le$$

$$c_{26}\left(\left\|\nabla_{x'}\varphi w^\pm(t,x')\right\|_{L_p\left(\Omega;\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)\right)} + \left\|\varphi w^\pm(t,x')\right\|_{L_p\left(\Omega;\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)\right)}\right) \le$$

$$c_{27}\tau^{1/2}\left(\left\|\nabla_{x'}\varphi w^{\pm}(t,x')\right\|_{L_p\left(\Omega;\tilde W_p^{s_1}(0,\tau)\right)}+\left\|\varphi w^{\pm}(t,x')\right\|_{L_p\left(\Omega;\tilde W_p^{s_1}(0,\tau)\right)}\right)\le$$

$$c_{28}\tau^{1/2}\left(\left\|\nabla_{x'}\varphi w(t,x)\right\|_{\tilde W_p^{1,2}\left(Q_k^{\tau}\right)}+\left\|\varphi w(t,x')\right\|_{W_p^{1,2}\left(Q_k^{\tau}\right)}\right)\le c_{29}\tau^{1/2}\left\|\vec\alpha_1-\vec\alpha_2\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)},$$

где $i>r_0$ и $k=1$ в случае функции ω^+ и $k=2$ и $i\le r_0$ в случае функции ω^-. Таким образом, справедлива оценка

$$\left\|J_2\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_{30}\tau^{1/2}\left\|\vec\alpha_1-\vec\alpha_2\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{66}$$

для некоторой не зависящей от τ постоянной c_{30}. Оценка последней разности

$$J_3=\left(\alpha_1 v_1^-(t,x_i)-\alpha_2 v_2^-(t,x_i)\right)/\left(\tilde\psi_i(t)+(w_0^+-w_0^-)(t,x^i(0))\right)$$

получается аналогично, и имеем, что найдутся постоянные $\beta_3>0$ и c_8 такие, что

$$\left\|J_3\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_{31}\tau^{\beta_3}\left\|\vec\alpha_1-\vec\alpha_2\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{67}$$

Окончательная оценка, как вытекает из (65), (66), (67) имеет вид

$$\left\|R\left(\vec\alpha_1\right)-R\left(\vec\alpha_2\right)\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_{31}\tau^{\beta_0}\left\|\vec\alpha_1-\vec\alpha_2\right\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{68}$$

где показатель β_0 минимальный из полученных в доказательстве и постоянная c_{31} не зависит от τ. Возьмем в качестве τ_0 число со свойством $\tau_0\le\tau_2$, $c_{31}\tau_0^{\beta_0}\le 1/2$. В этом случае оператор R переводит шар B_{R_0} в себя и является в нем сжимающим. Следовательно, уравнение (36) имеет решение $\vec\alpha\in\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_0)$. Найдем решение задачи сопряжения v. Покажем, что мы нашли решение нашей обратной задачи. Достаточно показать, что у нас выполнены условия переопределения (24). Мы имеем равенства (32), (33) и равенства (34), (35), откуда вытекает, что

$$a_{nn}^+(t,y_i')w_{ix_n}(t,a)-\beta_0(v^+-v^-)(t,y_i')=\alpha(\tilde\psi_i(t)-v^-)(t,y_i'))+\alpha(w_0^+-w_0^-)(t,y_i'), \tag{69}$$

при $i\le r_0$ и при $i>r_0$ имеем

$$a_{nn}^+(t,y_i')w_{ix_n}(t,a)-\beta_0(v^+-v^-)(t,y_i')=\alpha(v^+(t,y_i')-\tilde\psi_i(t))+\alpha(w_0^+-w_0^-)(t,y_i') \tag{70}$$

Вычитая (32) и (69), соответственно, (33) и (70), получим

$$a_{nn}^+(t,y_i')(v_{x_n}^+(t,y_i')-w_{ix_n}(t,a))=\alpha(v^+-\tilde\psi_i(t))=\alpha(v^+(t,y_i')-w(t,a)),\ i=1,2,\ldots,r_0, \tag{71}$$

$$a_{nn}^-(t,y_i')(v_{x_n}^-(t,y_i')-w_{ix_n}(t,a))=\alpha(\tilde\psi_i(t)-v^-)=\alpha(w(t,a)-v^-),\ i=r_0+1,\ldots,M, \tag{72}$$

Функция $w_{0i}=\varphi_i v$ удовлетворяет уравнению (26). Возьмем в этом уравнении $x'=y_i'$ и вычтем его из равенства (27) при $i\le r_0$ и из (28) при $i>r_0$. Получим равенство

$$\left(w_{it}(t,x_n)-w_{0it}(t,y_i',x_n)\right)-a_{nn}(t,y_i',x_n)\left(w_{ix_nx_n}-w_{0ix_nx_n}(t,x_i,x_n)\right)=0, \tag{73}$$

где $i=1,2,\ldots,r$. Функции $w_i=w_i(t,x_n)-w_{0i}(t,x_i,x_n)$ удовлетворяют уравнению (73), начальному условию $\tilde w_i|_{t=0}=0$ и в силу (71), (72) граничным условиям

$$a_{nn}^+(t,x_i)\tilde w_{ix_n}(t,a)=-\alpha\tilde w_i(t,a),w_i(t,a+\delta)=0,i=1,2,\ldots,r_0, \tag{74}$$

$$a_{nn}^-(t,y_i')\tilde w_{ix_n}(t,a)=\alpha w_i(t,a),\tilde w_i(t,a-\delta)=0,i=r_0+1,\ldots,r. \tag{75}$$

В силу единственности решений смешанной начально-краевой задачи $w_i(t,x_n)=w_{0i}(t,y_i',x_n)$. Следовательно, выполнены равенства $w_{0i}(t,y_i',a+0)=\tilde\psi_i$ для всех $i\le r_0$ и $w_{0i}(t,y_i',a-0)=\psi_i$ для всех $i>r_0$. Поскольку локально по времени задача сводится к уравнению со сжимающим оператором, то утверждение о единственности решений здесь очевидно.

Замечание. Все результаты справедливы и в случае более сложной задачи когда вместо одного условия сопряжения мы рассматриваем несколько условий, скажем в точках $x_n = l_1, l_2, \ldots, l_m$ и неизвестными являются несколько коэффициентов теплопередачи. На каждом из сечений $x_n = l_i$ в некотором наборе точек у нас, как и ранее, заданы значения решения в качестве условий переопределения. Соответствующие условия на данные легко формулируются.

Литература

1. Baehr, H.D. Heat and Mass Transfer / H.D. Baehr, K. Stephan. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 688 p.
2. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, В.А. Солонников. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
3. Алифанов, О.М. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, А.В. Ненарокомов. – Москва: Янус-К, 2009. – 299 с.
4. Ткаченко, В.Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов / В.Н. Ткаченко. – Киев: Наукова думка, 2008. – 243 с.
5. Huang, C. An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine’s exhaust valve and seat / C. Huang, T. Ju // International journal for numerical methods in engineering. – 1995. – Vol. 38, Iss. 5. – P. 735–754.
6. Loulou, T., An inverse heat conduction problem with heat flux measurements / T. Loulou, E. Scott // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2006. – Vol. 67, Iss. 11. – C. 1587–1616.
7. Identification of Contact Failures in Multi-Layered Composites / L.A. Abreu, H.R.B. Orlande, C.P. Naveira-Cotta *et al*. Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Vol. 2: 31st Computers and Information in Engineering Conference, Parts A and B. Washington, DC, USA. August 28–31, 2011. – P. 479–487.
8. A Comparison of two inverse problem techniques for the identification of contact failures in multi-layered composites / L.A.S. Abreu, M.J. Colaco, C.J.S. Alves *et al.* // 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), November 3–7, 2013, Ribeirão Preto, SP, Brazil. – C. 5422–5432.
9. Artyukhin, E.A. Reconstruction of thermal contact resistance from the solution of the inverse heat conduction problem / E.A. Artyukhin, A.V. Nenarokomov // Journal of Engineering Physics. – 1984. – T. 46, № 4. – C. 677–681.
10. Drenchev, L.B. Inverse heat conduction problems and application to estimate of heat parameters in 2-D experiments / L.B. Drenchev, J. Sobczak // Proc. Int. Conf. High Temperature Capillarity, Cracow, Poland, 29 June – 2 July 1997. – Krakow: Foundry Research Institute, 1998. – C. 355–361.
11. Zhuo, L. Reconstruction of the Heat Transfer Coefficient at the Interface of a Bi-Material / L. Zhuo, D. Lesnic, S. Meng // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2020. – Vol. 28, Iss. 3. – C. 374–401.
12. К решению нестационарных нелинейных граничных обратных задач теплопроводности / Ю.М. Мацевитый, А.О. Костиков, Н.А. Сафонов, В.В. Ганчин // Проблемы машиностроения. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 15–23.
13. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
14. Denk, R. Optimal L^p–L^q-Estimates for Parabolic Boundary Value Problems with Inhomogeneous Data / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // Mathematische Zeitschrift. – 2007. – Vol. 257, Iss. 1. – P. 193–224.
15. Belonogov, V.A. On Solvability of Some Classes of Transmission Problems in a Cylindrical Space Domain / V.A. Belonogov, S.G. Pyatkov // Сибирские электронные математические известия. – 2021. – Т. 18, № 1. – С. 176–206.
16. Вержбицкий, М.А. О некоторых обратных задачах об определении граничных режимов / М.А. Вержбицкий, С.Г. Пятков // Математические заметки СВФУ. – 2016. – Т. 23, вып. 2. – С. 3–18.

17. Белоногов, В.А. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта / В.А. Белоногов, С.Г. Пятков // Известия вузов. Математика. – 2020. – № 7. – С. 18–32.

18. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

19. Amann, H. Compact Embeddings of Vector-Valued Sobolev and Besov Spaces / H. Amann // Glasnik matematicki. – 2000. – Vol. 35(55). – p. 161–177.

20. Grisvard, P. Équations différentielles abstraites / P. Grisvard // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4. – 1969. – Vol. 2, no. 3. – P. 311–395.

Поступила в редакцию 4 января 2022 г.

Сведения об авторе

Белоногов Владимир Андреевич, аспирант, Институт цифровой экономики, Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, e-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

Bulletin of the South Ural State University Series "Mathematics. Mechanics. Physics" 2022, vol. 14, no. 1, pp. 13–26

DOI: 10.14529/mmph220102

ON DETERMINING THE COEFFICIENT OF HEAT EXCHANGE IN STRATIFIED MEDIUM

V.A. Belonogov
Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation
E-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru

Abstract. In the article we consider the well-posedness in Sobolev spaces of the inverse problems of determining the heat exchange coefficient at the interface which is included in the transmission condition of the imperfect contact type. In a cylindrical spatial domain, a second-order parabolic equation is considered. The domain is divided into two sub-domains, on the common part of the boundary of which the transmission condition is set. The heat exchange coefficient included in the transmission condition is sought as end segment in series with time-dependent unknown Fourier coefficients. The equation is supplemented with general boundary conditions and initial conditions, as well as overdetermination conditions. The ovedetermination conditions are the values of a solution at some points lying in the spatial domain. Under natural smoothness conditions for the data and the location of the measurement points, the existence and uniqueness theorem local in time is demonstrated. The obtained solution to the problem is regular, i. e., all generalized derivatives included in the equation are summable to some power, and the equation holds almost everywhere. The method is constructive, and the approach allows to develop numerical methods for solving the problem. The proof is based on a priori estimates obtained and the fixed-point theorem.

Keywords: inverse problem; transmission problem; heat transfer coefficient; parabolic equation; heat and mass transfer.

References

1. Baehr H.D., Stephan K. *Heat and Mass Transfer*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, 688 p.

2. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N., Solonnikov V.A. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type). Moskow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (in Russ.).

3. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V. *Obratnye zadachi v issledovanii slozhnogo teploobmena* (Inverse problems in complex heat transfer research). Moscow, Yanus-K, 2009, 299 p. (in Russ.).

4. Tkachenko V.N. *Matematicheskoe modelirovanie, identifikatsiya i upravlenie tekhnologicheskimi protsessami teplovoy obrabotki materialov* (Mathematical Modeling, Identification and Control over Technological). Kiev, Naukova dumka Publ., 2008, 243 p. (in Russ.).

5. Huang C., Ju T. An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine's exhaust valve and seat. *International journal for numerical methods in engineering*, 1995, Vol. 38, Iss. 5, pp. 735–754.

6. Loulou T., Scott E. An inverse heat conduction problem with heat flux measurements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, Vol. 67, Iss. 11, pp. 1587–1616. DOI: 10.1002/nme.1674

7. Abreu L.A., Orlande H.R.B., Naveira-Cotta C.P., Quaresma J.N.N., Cotta R.M., Kaipio J., Kolehmainen V. Identification of Contact Failures in Multi-Layered Composites. *Proc. ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 2: 31st Computers and Information in Engineering Conference, Parts A and B. Washington, DC, USA. August 28–31, 2011*. pp. 479-487. ASME. DOI: 10.1115/DETC2011-47511

8. Abreu L.A.S., Colaco M.J., Alves C.J.S., Orlande H.R.B., Kolehmainen V., Kaipio J. A Comparison of Two Inverse Problem Techniques for the Identification of Contact Failures in Multi-Layered Composites. *Proc. 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), November 3–7, 2013, Ribeirão Preto, SP, Brazil*. С. 5422–5432.

9. Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V. Reconstruction of thermal contact resistance from the solution of the inverse heat conduction problem. *Journal of Engineering Physics*, 1984, Vol. 46, no. 4, pp. 677–681.

10. Drenchev L.B., Sobczak J. Inverse Heat Conduction Problems and Application to Estimate of Heat Parameters in 2-D Experiments. *Proc. Int. Conf. High Temperature Capillarity, Cracow, Poland, 29 June – 2 July 1997, Krakow: Foundry Research Institute*, 1998, pp. 355–361.

11. Zhuo L., Lesnic D., Meng S. Reconstruction of the Heat Transfer Coefficient at the Interface of a Bi-Material. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020. Vol. 28, Iss. 3, С. 374–401. DOI: 10.1080/17415977.2019.1574781

12. Matsevityy Yu.M., Kostikov A.O., Safonov N.A., Ganchin V.V. K resheniyu nestatsionarnykh nelineynykh granichnykh obratnykh zadach teploprovodnosti (To the solution of nonstationary nonlinear reverse problems of thermal conductivity). *Problemy mashinostroeniya*, 2017, Vol. 20, no. 4, pp. 15–23. (in Russ.).

13. Tribel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Deutscher Verlag Wiss, Berlin, 1978. DOI:10.1016/s0924-6509(09)x7004-2

14. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal L^p–L^q-Estimates for Parabolic Boundary Value Problems with Inhomogeneous Data. *Mathematische Zeitschrift*, 2007, Vol. 257, Iss. 1, pp. 193–224. DOI: 10.1007/s00209-007-0120-9

15. Belonogov V.A., Pyatkov S.G. On Solvability of Some Classes of Transmission Problems in a Cylindrical Space Domain. *Sib. Èlektron. Mat. Izv*., 2021, Vol. 18, Iss. 1, pp. 176–206.

16. Verzhbitskii M.A., Pyatkov S.G. On Some Inverse Problems of Determining Boundary Regimes. *Mathematical notes of NEFU*, 2016, Vol. 23, Iss. 2, pp. 3–18. (in Russ.).

17. Belonogov V.A., Pyatkov S.G. On solvability of Conjugation Problems with Non-Ideal Contact Conditions. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2020, Vol. 64, Iss. 7, pp. 13–26. DOI: 10.3103/S1066369X20070038

18. Mikhaylov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* (Partial Differential Equations). Moscow, Nauka Publ., 1976, 391 p.

19. Amann H. Compact Embeddings of Vector-Valued Sobolev and Besov Spaces. *Glasnik matematicki*, 2000, Vol. 35(55), p. 161–177.

20. Grisvard P. *Équations Différentielles Abstraites, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 4*, 1969, Vol. 2, no. 3, pp. 311–395. DOI: 10.24033/asens.1178

Received January 4, 2022

Information about the author

Belonogov Vladimir Andreevich is Post-Graduate Student, Institute of Digital Economics, Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation, e-mail: vladimir.belonogow@yandex.ru