УДК 517.955.8 DOI: 10.14529/mmph220103

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К.Г. Кожобеков, А.А. Шооруков, Д.А. Турсунов
Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика
E-mail: dtursunov@oshsu.kg

Аннотация. Строится полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения первой краевой задачи. Первая краевая задача ставится для сингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными параболического типа. Задача исследуется на прямоугольнике. Особенности задачи – присутствие малого параметра перед оператором теплопроводности, существование угловых пограничных слоев на нижних углах прямоугольника. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения первой краевой задачи на прямоугольнике, с любой степенью точности, при стремлении малого параметра к нулю. Асимптотическое разложение решения по малому параметру строится методом Вишика–Люстерника. При решении поставленной задачи нами используются: методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, классический метод малого параметра, метод пограничных функций Вишика–Люстерника и принцип максимума. Как обычно, задача решается в двух этапах: в первом этапе строится формальное разложение решения первой краевой задачи, а во втором этапе оценивается остаточный член полученного разложения и этим доказывается, что полученное разложение действительно является асимптотическим на всем прямоугольнике. В первом этапе формальное асимптотическое решение ищется в виде суммы шести функций (решений): внешнее решение, определенное на всем прямоугольнике, погранслойное решение в малой окрестности нижней стороны прямоугольника, два боковых погранслойных решения в малой окрестности боковых сторон прямоугольника и два угловых погранслойных решения в окрестностях нижних вершин прямоугольника. Все эти погранслойные решения экспоненциально убывают вне пограничных слоев.

Ключевые слова: асимптотическое решение; малый параметр; сингулярно возмущенная задача; первая краевая задача; уравнение теплопроводности; погранслойное решение.

Постановка задачи. В прямоугольнике рассмотрим первую краевую задачу [1, 2]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}+q(t,x)z(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Omega, \tag{1}$$

$$z(0,x)=\varphi(x),\quad x\in[0,1], \tag{2}$$

$$z(t,0)=\mu_1(t),\ z(t,1)=\mu_2(t),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

где ε – малый положительный параметр, $0<a$ – const, $\Omega=\{(t,x)\,|\,0<t\le T, 0<x<1\}$, $q,p,f\in C^\infty(\bar\Omega)$, $\varphi\in C^\infty[0,1]$, $\mu_1,\mu_2\in C^\infty[0,T]$, $q(t,x)>0:(t,x)\in\bar\Omega$, $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(1)=\mu_2(0)$.

Требуется построить равномерное асимптотическое приближение первой краевой задачи (1)–(3), при $\varepsilon\to 0$.

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра [3–5]:

$$z(t,x)=U(t,x)+V(\tau,x)+\Pi_1(t,\eta_1)+\Pi_2(t,\eta_2)+W_1(\tau,\eta_1)+W_2(\tau,\eta_2) \tag{4}$$

где $\tau=t/\varepsilon$, $\eta_1=x/\lambda$, $\eta_2=(1-x)/\lambda$, $\lambda=\sqrt{\varepsilon}$.

Подставляя соотношение (4) в задачу (1)–(3), получаем следующие задачи:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 \mathrm{U}(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial \mathrm{U}(t,x)}{\partial x}+q(t,x)U(t,x)=f(\mathrm{t,x}),\ \ (\mathrm{t},x)\in\Omega; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial\tau}-\varepsilon a^2\frac{\partial^2 V(\tau,x)}{\partial x^2}+\varepsilon^2 p(\tau,x)\frac{\partial V(\tau,x)}{\partial x}+q(\tau,x)V(\tau,x)=0,\ \ (\tau,x)\in\Omega_1; \qquad (6)$$

$$a^2\frac{\partial^2\Pi_j(t,\eta_j)}{\partial\eta_j^2}-q(t,\eta_j)\Pi_j(t,\eta_j)=\lambda^2\frac{\partial\Pi_j(t,\eta_j)}{\partial t}+\lambda^3 p(t,\eta_j)\frac{\partial\Pi_j(t,\eta_j)}{\partial\eta_j},\ (t,\eta_j)\in\Omega_{2j}; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial W_j(\tau,\eta_j)}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 W_j(\tau,\eta_j)}{\partial\eta_j^2}+q(\tau,\eta_j)W_j(\tau,\eta_j)=-\lambda^4 p(\tau,\eta_j)\frac{\partial W_j(\tau,\eta_j)}{\partial\eta_j},\ (\tau,\eta_j)\in\Omega_{3j}, \qquad (8)$$

где $\Omega_1=\{(\tau,x)\,|\,0<\tau\le\mu^{-1}T,\ 0\le x\le 1\}$, $\Omega_{2j}=\{(\mathrm{t},\eta_j)\,|\,0\le t\le T,\ 0<\eta_j\le\lambda^{-1}\}$, $\Omega_{3j}=\{(\tau,\eta_j)\,|\,0<\tau\le T\varepsilon^{-1},\ 0<\eta_j\le\lambda^{-1}\},\ j=1,2.$

Подставляя соотношение (4) в начальное условие (2), получаем:

$$\varphi(x)=U(0,x)+V(0,x)+\Pi_1(0,\eta_1)+\Pi_2(0,\eta_2)+W_1(0,\eta_1)+W_2(0,\eta_2)\Rightarrow$$

$$V(0,x)=\varphi(x)-U(0,x), \qquad (9)$$

$$W_j(0,\eta_j)=-\Pi_j(0,\eta_j),\ \ j=1,2. \qquad (10)$$

Теперь подставляя соотношение (4) в граничные условия (3), имеем:

$$\mu_1(t)=U(t,0)+V(t\varepsilon^{-1},0)+\Pi_1(t,0)+\Pi_2(t,\lambda^{-1})+W_1(t\varepsilon^{-1},0)+W_2(t\varepsilon^{-1},\lambda^{-1})\ ,$$

учитывая, что $\Pi_2(t,\lambda^{-1})=0,\ W_2(t\varepsilon^{-1},\lambda^{-1})=0$ – условие для погранслойных функций, получаем:

$$\Pi_1(t,0)=\mu_1(t)-U(t,0), \qquad (11)$$

$$W_1(\tau,0)=-V(\tau,0), \qquad (12)$$

аналогично

$$\mu_2(t)=U(t,1)+V(t\varepsilon^{-1},1)+\Pi_2(t,0)+W_2(t\varepsilon^{-1},0)\Rightarrow$$

$$\Pi_2(t,0)=\mu_2(t)-U(t,0), \qquad (13)$$

$$W_2(\tau,0)=-V(\tau,1)\,. \qquad (14)$$

В результате мы получили шесть задач:

– из уравнения (5) методом малого параметра однозначно определяем $U(t,x)$;

– из (6) и (9) определяем $V(\tau,x)$;

– из (7), (11) и (13) определяем $\Pi_j(t,\eta_j)$, j = 1, 2;

– из (8), (10), (12) и (14) определяем $W_j(\tau,\eta_j)$, j = 1, 2.

Начнем с уравнения (5).

Лемма 1. Для решения $U(t,x)$ уравнения (5) справедливо формальное асимптотическое разложение

$$U(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(t,x)\,, \qquad (15)$$

где $u_k\in C^\infty(\bar{\Omega}),\ k=0,1,2,...$ – конкретизируются при доказательстве леммы 1.

Доказательство. Формально подставляя (15) в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем:

$$u_0(t,x)=\frac{f(t,x)}{q(t,x)}, \qquad (16)$$

$$u_k(t,x)=-\frac{1}{q(t,x)}\left(\frac{\partial u_{k-1}(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u_{k-1}(t,x)}{\partial x^2}\right)-\frac{p(t,x)}{q(t,x)}\frac{\partial u_{k-2}(t,x)}{\partial x},\ k\in N,\ u_{-1}(t,x)\equiv 0, \qquad (17)$$

заметим, что $u_k\in C^\infty(\bar{\Omega}),\ k=0,1,2,...$. Лемма 1 доказана.

Перейдем к задаче (6), (9). Пусть

$$V(\tau,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\tau,x), \tag{18}$$

где $v_k(\tau,x)$ – пока неизвестные функций.

Подставляя (18) в (6) и (9), имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\frac{\partial v_k(\tau,x)}{\partial\tau}-\varepsilon a^2\frac{\partial^2 v_k(\tau,x)}{\partial x^2}+\varepsilon^2\sum_{j=0}^{k}\tau^j p_j(x)\frac{\partial v_{k-j}(\tau,x)}{\partial x}+\sum_{j=0}^{k}\tau^j q_j(x)v_{k-j}(\tau,x)\right)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(0,x)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(0,x),$$

где $q_j(x)=\partial^j q(0,x)/\partial\tau^j$, $q_0(x)=q(0,x)$, $p_j(x)=\partial^j p(0,x)/\partial\tau^j$.

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial v_0(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_0(\tau,x)=0,\ v_0(0,x)=\varphi(x)-u_0(0,x); \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_k(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_k(\tau,x)=\\ =a^2\frac{\partial^2 v_{k-1}(\tau,x)}{\partial x^2}+\sum_{j=0}^{k}\tau^j p_j(x)\frac{\partial v_{k-j-2}(\tau,x)}{\partial x}+\sum_{j=1}^{k}\tau^j q_j(x)v_{k-j}(\tau,x),\ v_k(0,x)=-u_k(0,x),\ k\in N.\end{gathered} \tag{20}$$

Решение задачи (19) существует, единственно и представимо в виде:

$$v_0(\tau,x)=(\varphi(x)-u_0(0,x))e^{-q(x)\tau}.$$

Для $v_1(\tau,x)$ имеем:

$$\frac{\partial v_1(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)v_1(\tau,x)=a^2\frac{\partial^2 v_0(\tau,x)}{\partial x^2}+\tau q_1(x)v_0(\tau,x),\ v_1(0,x)=-u_1(0,x).$$

Справедлива

Лемма 2. Решение задачи

$$\frac{\partial\tilde v(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)+\ldots+p_n(x)\tau^n\right),\ (\tau,x)\in\Omega_1,\ \tilde v(0,x)=\tilde v^0(x),\ x\in[0,1]$$

существует, единственно и представимо в виде

$$\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\tilde v^0(x)+e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)\tau+p_1(x)\frac{\tau^2}{2}+\ldots+p_n(x)\frac{\tau^{n+1}}{n+1}\right),$$

где $q_0(x)>0\ \ x\in[0,1],\ q_0,p_j,\tilde v^0\in C^\infty[0,1]$.

Доказательство. Уравнение

$$\frac{\partial\tilde v(\tau,x)}{\partial\tau}+q_0(x)\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\left(p_0(x)+p_1(x)\tau+\ldots+p_n(x)\tau^n\right),\ (\tau,x)\in\Omega_1,$$

запишем в виде

$$\left(\tilde v(\tau,x)e^{q_0(x)\tau}\right)'_\tau=\left(p_0(x)+p_1(x)\tau+\ldots+p_n(x)\tau^n\right),$$

полученное выражение интегрируем по τ, учитывая начальное условие:

$$\tilde v(\tau,x)e^{q_0(x)\tau}-\tilde v^0(x)=\int_0^\tau(p_0(x)+\ldots+p_n(x)s^n)ds\quad\Rightarrow\tilde v(\tau,x)=e^{-q_0(x)\tau}\tilde v^0(x)+P_{n+1,\tau}(\tau,x)e^{-q_0(x)\tau},$$

где $P_{n+1,\tau}(\tau,x)=p_0(x)\tau+p_1(x)\dfrac{\tau^2}{2}+\ldots+p_n(x)\tau^{n+1}/n+1$. Лемма 2 доказана.

С помощью леммы 2 доказывается существование и единственность решений задач (20). Кроме этого, из леммы 2 следует, что эти решения экспоненциально стремятся к нулю при стремлении τ к бесконечности, т. е.:

$$v_k(\tau,x)=O\left(e^{-q_0(x)\tau}\right),\ \tau\to\infty,\ q_0(x)>0:\ x\in[0,1],\ k=0,1,2,...$$

Перейдем к задачам (7), (11) и (13). Здесь две задачи относительно функций $\Pi_1(t,\eta_1)$ и $\Pi_2(t,\eta_2)$ – аналогичные, поэтому достаточно рассмотреть одну. Мы рассмотрим задачу относительно функций $\Pi_1(t,\eta_1)$:

$$a^2\frac{\partial^2\Pi_1(t,\eta_j)}{\partial\eta_1^2}-q(t,\eta_1)\Pi_1(t,\eta_1)=\lambda^2\frac{\partial\Pi_1(t,\eta_1)}{\partial t}+\lambda^4 p(t,\eta_1)\frac{\partial\Pi_1(t,\eta_1)}{\partial x},\quad (t,\eta_1)\in\Omega_{21},\tag{21}$$

$$\Pi_1(t,0)=\mu_1(t)-U(t,0),\ t\in[0,T].\tag{22}$$

Пусть

$$\Pi_1(t,\eta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\pi_{1,k}(t,\eta_1),\tag{23}$$

где $\pi_{1,k}(t,\eta_1)$ – пока неизвестные функций, причем $\lim\limits_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,k}(t,\eta_1)=0,\ t\in[0,T]$.

Подставляя (23) в (21) и (22), имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\left(a^2\frac{\partial^2\pi_{1,k}(t,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}-\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j q_j(t)\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+2}\left(\frac{\partial\pi_{1,k}(t,\eta_1)}{\partial t}+\lambda^2\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j p_j(t)\frac{\partial\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)}{\partial x}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\pi_{1,k}(t,0)=\mu_1(t)-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k}u_k(t,0),\ t\in[0,T],$$

где $q_j(t)=\dfrac{\partial^j q(t,0)}{\partial\eta_1^j},\ p_j(t)=\dfrac{\partial^j p(t,0)}{\partial\eta_1^j},\ q_0(t)=q(t,0)$.

Отсюда для $\pi_{1,0}(t,\eta_1)$ имеем:

$$a^2\frac{\partial^2\pi_{1,0}}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi_{1,0}=0,\ \ (t,\eta_1)\in\Omega_{21},\ \pi_{1,0}(t,0)=\mu_1(t)-u_0(t,0),\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,0}(t,\eta_1)=0,\ t\in[0,T].$$

Решение этой задачи можно представить в виде

$$\pi_{1,0}(t,\eta_1)=\left(\mu_1(t)-u_0(t,0)\right)e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}.$$

Для $\pi_{1,k}(t,\eta_1),\ k\in N$ имеем:

$$a^2\frac{\partial^2\pi_{1,k}}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi_{1,k}=\sum_{j=1}^{k}\eta_1^j q_j(t)\pi_{1,k-j}(t,\eta_1)+\sum_{j=0}^{k}\eta_1^j p_j(t)\frac{\partial\pi_{1,k-j-2}(t,\eta_1)}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{1,k-2}(t,\eta_1)}{\partial t},(t,\eta_1)\in\Omega_{21},$$

$$\pi_{1,2k}(t,0)=-u_k(t,0),\ \pi_{1,2k-1}(t,0)=0,\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi_{1,k}(t,\eta_1)=0,\ \ t\in[0,T].\tag{24}$$

Справедлива

Лемма 3. Решение задачи

$$a^2\frac{\partial^2\pi}{\partial\eta_1^2}-q_0(t)\pi=e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\left(p_1(t)\eta_1+...+p_n(t)\eta_1^n\right),\ \ (t,\eta_1)\in\Omega_{21},$$

$$\pi(t,0)=\pi^0(t),\ \lim_{\eta_1\to\infty}\pi(t,\eta_1)=0,\ \ t\in[0,T],$$

существует, единственно и представимо в виде

$$\pi(t,\eta_1)=e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\pi^0(t)+e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\eta_1\left(\tilde p_1(t)\eta_1+...+\tilde p_n(t)\eta_1^n\right),$$

где $q_0(t)>0\ \ t\in[0,T],\ q_0,\tilde p_j,\pi^0\in C^\infty[0,T]$.

Лемма 3 доказывается прямым интегрированием, как и лемма 2.

С помощью леммы 3 доказывается существование, единственность решений задач (24). Для решений задач (24) справедливы оценки:

$$\pi(t,\eta_1)=O\left(e^{-\frac{\sqrt{q_0(t)}}{a}\eta_1}\right),\ \eta_1\to\infty,\ t\in[0,T],\ 0<a,\ 0<q_0(t).$$

Перейдем к задачам (8), (10), (12) и (14) для определения угловых погранслойных функций $W_j(\tau,\eta_j)$, j = 1, 2.

Здесь тоже достаточно рассмотреть одну из них, либо задачу для $W_1(\tau,\eta_1)$, либо для $W_2(\tau,\eta_2)$, второе исследуется аналогично. Рассмотрим задачу для $W_1(\tau,\eta_1)$:

$$\frac{\partial W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}+q(\tau,\eta_1)W_1(\tau,\eta_1)+\lambda^3p(\tau,\eta_1)\frac{\partial W_1(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1}=0,\quad(\tau,\eta_1)\in\Omega_{31},\tag{25}$$

$$W_1(0,\eta_1)=-\Pi_1(0,\eta_1),\quad W_1(\tau,0)=-V(\tau,0).\tag{26}$$

Пусть

$$W_1(\tau,\eta_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w_{1,k}(\tau,\eta_1),\tag{27}$$

где $w_{1,k}(\tau,\eta_1)$ – пока неизвестные функций.

Подставляя (27) в (25) и (26), получаем:

$$\frac{\partial w_{1,j}}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 w_{1,j}}{\partial\eta_1^2}+q_0w_{1,j}=0,\quad(\tau,\eta_1)\in\Omega_{31},\ j=0,1;$$

$$\frac{\partial w_{1,k}}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 w_{1,k}}{\partial\eta_1^2}+q_0w_{1,k}=\Phi_k(w_{1,k-1},w_{1,k-2},...,w_{1,0},\tau,\eta_1),\quad(\tau,\eta_1)\in\Omega_{31},\ k=2,3,...$$

$$w_{1,k}(0,\eta_1)=-\pi_{1,k}(0,\eta_1),w_{1,2k}(\tau,0)=-v_k(\tau,0),\ w_{1,2k+1}(\tau,0)=0,\ k=0,1,...,$$

где $q_{n,m}=\dfrac{\partial^{n+m}q(0,0)}{\partial\tau^n\partial\eta_1^m}$, $0<q_0=q(0,0)$, Φ_k – линейно зависят от предыдущих $w_{1,j}$ ($j<k$) и их производных от η_1, полиномиально зависят от τ, и η_1.

Если ввести обозначение $w_{1,k}(\tau,\eta_1)=e^{-q_0\tau}y_k(\tau,\eta_1)$, то

$$\frac{\partial w_{1,k}(\tau,\eta_1)}{\partial\tau}=-q_0e^{-q_0\tau}y_k(\tau,\eta_1)+e^{-q_0\tau}\frac{\partial y_k(\tau,\eta_1)}{\partial\tau};\ \frac{\partial^2 w_{1,k}(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}=e^{-q_0\tau}\frac{\partial^2 y_k(\tau,\eta_1)}{\partial\eta_1^2},$$

и рассматриваемая задача примет вид:

$$\frac{\partial y_k}{\partial\tau}-a^2\frac{\partial^2 y_k}{\partial\eta_1^2}=\Phi_k(y_{1,k-1},y_{1,k-2},...,y_{1,0},\tau,\eta_1),\quad(\tau,\eta_1)\in\Omega_{31},\ k=0,1,...\tag{28}$$

$$y_k(0,\eta_1)=-\pi_{1,k}(0,\eta_1),y_{2k}(\tau,0)=-e^{q_0\tau}v_k(\tau,0),\ y_{2k+1}(\tau,0)=0,\ k=0,1,...\tag{29}$$

где $\Phi_j\equiv0,\ j=0,1.$

Решения задач (28), (29) существуют, единственны и представимы в виде [6]:

$$y_k(\tau,\eta_1)=-\int_0^\infty\pi_{1,k}(0,\xi)G(\tau,\xi,\eta_1)d\xi+\int_0^\tau\psi_k(t)H(\eta_1,\tau-t)dt+\int_0^\tau\int_0^\infty\Phi_k(t,x)G(\eta_1,x,\tau-t)dxdt,$$

где

$$H(\eta_1,\tau)=\frac{\eta_1}{2a\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}e^{-\frac{\eta_1^2}{4a\tau}},\ G(\tau,x,\eta_1)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi\tau}}\left(\exp\left(-\frac{(\eta_1-x)^2}{4a^2\tau}\right)-\exp\left(-\frac{(\eta_1+x)^2}{4a^2\tau}\right)\right),$$

$$\psi_{2k}(\tau)=-e^{q_0\tau}v_k(\tau,0),\psi_{2k-1}(\tau)\equiv0,\ \Phi_k(\tau,\eta_1)=\Phi_k(y_{1,k-1},y_{1,k-2},...,y_{1,0},\tau,\eta_1).$$

Отсюда следует, что функции $w_{1,k}(\tau,\eta_1)$ экспоненциально убывают при $\tau+\eta_1\to\infty$.

Таким образом, нами построены все функции, входящие в правую часть равенства (4).

Обоснование. Оценим остаточный член разложения (4).

Пусть $z(t,x)=z_n(t,x)+R(t,x)$, где $R(t,x)$ – остаточный член разложения,

$$z_n(t,x)=U_n(t,x)+V_n(\tau,x)+\Pi_{1,2n+1}(t,\eta_1)+\Pi_{2,2n+1}(t,\eta_2)+W_{1,2n+1}(\xi,\eta_1)+W_{2,2n+1}(\xi,\eta_2),$$

$$U_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(t,x), V_n(\tau,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(\tau,x),\ \Pi_{j,2n+1}(t,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k\pi_{j,k}(t,\eta_j),$$

$$W_{j,2n+1}(\tau,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k w_{\mathrm{j},k}(\tau,\eta_j).$$

Тогда для остаточного члена получим следующую задачу:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial R(t,x)}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 R(t,x)}{\partial x^2}\right)+\varepsilon^2 p(t,x)\frac{\partial R(t,x)}{\partial x}+q(t,x)R(t,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad (t,x)\in\Omega, \tag{31}$$

$$R(0,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad x\in[0,1],\ z(t,0)=z(t,1)=O(\varepsilon^{n+1}),\ t\in[0,T],\ \varepsilon\to 0. \tag{32}$$

Применяя принцип максимума [7], получаем:

$$|R(t,x)|\le \max_{\substack{(t,x)\in\bar\Omega\\ 0<\varepsilon<<1}}\left\{q^{-1}(t,x)O(\varepsilon^{n+1}),\ O(\varepsilon^{n+1})\right\}.$$

Отсюда имеем:

$$R(t,x)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad (t,x)\in\bar\Omega,\ \ \varepsilon\to 0.$$

Теорема. Для решения задачи (1)–(3) при стремлении малого параметра к нулю в области $\bar\Omega$ справедливо асимптотическое разложение

$$z(t,x)=U_n(t,x)+V_n(\tau,x)+\Pi_{1,2n+1}(t,\eta_1)+\Pi_{2,2n+1}(t,\eta_2)+W_{1,2n+1}(\xi,\eta_1)+W_{2,2n+1}(\xi,\eta_2)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где функции $U_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(t,x), V_n(\tau,x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(\tau,x),\ \Pi_{j,2n+1}(t,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k\pi_{j,k}(t,\eta_j),$ $W_{j,2n+1}(\tau,\eta_j)=\sum_{k=0}^{2n+1}\lambda^k w_{j,k}(\tau,\eta_j)$ определены выше.

Заключение. Нами построено полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными параболического типа. Доказано, что полученное разложение действительно является асимптотическим решением поставленной задачи на всем прямоугольнике. Данная работа для нас является началом исследования бисингулярно возмущенных задач параболического типа, в следующих работах, ссылаясь на эту статью, мы будем исследовать только бисингулярные случаи.

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

2. Zauderer, E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics / E. Zauderer. – New York etc.: John Wiley & Sons, Inc. – 891 p.

3. Алымкулов, К. Об одном методе построения асимптотических разложений бисингулярно возмущенных задач / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 12. – С. 3–11.

4. Вишик, М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН. – Т. 12, вып. 5(77). – С. 3–122.

5. Треногин, В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Вишика / В.А. Треногин // УМН. – 1970, Т. 25, вып. 4(154). – С. 123–156.

6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физ.-мат. лит., 2001. – 575 с.

7. Protter, M.H. Maximum Principles in Differential Equations / M.H. Protter, H.F. Weinberger. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967, 261 p.

Поступила в редакцию 27 декабря 2021 г.

Сведения об авторах

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич – доктор физико-математических наук, ректор Ошского государственного университета, г. Ош, Кыргызская Республика, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0856-5113

Шооруков Асылбек Абдибахапович – аспирант, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика, ORCID iD: https://orcid.org/ 0000-0002-9550-090X

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович – доктор физико-математических наук, директор ВШМОП, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызская Республика, e-mail: dtursunov@oshsu.kg, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6990-1742

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 1, pp. 27–34

DOI: 10.14529/mmph220103

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE SECOND ORDER OF PARABOLIC TYPE

K.G. Kozhobekov, A.A. Shoorukov, D.A. Tursunov
Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic
E-mail: dtursunov@oshu.kg

Abstract. The article constructs a complete uniform asymptotic expansion in a small parameter of the solution of the first boundary value problem. The first boundary value problem is posed for a singularly perturbed linear inhomogeneous second-order partial differential equation with two independent variables of parabolic type. The problem is investigated on a rectangle. The peculiarities of the problem are the presence of a small parameter in front of the heat conduction operator, the existence of corner boundary layers at the lower corners of the rectangle. It is required to construct a uniform asymptotic expansion of the solution of the first boundary value problem on a rectangle, with any degree of accuracy, as the small parameter tends to zero. The asymptotic expansion of the solution in terms of a small parameter is constructed by the Vishik–Lyusternik method. When solving the problem, we use: methods of integration of ordinary differential equations, the classical method of a small parameter, the Vishik–Lyusternik boundary function method, and the maximum principle. As usual, the problem is solved in two stages: in the first stage, a formal expansion of the solution of the first boundary value problem is constructed; and in the second stage, the remainder of the resulting expansion is estimated and this proves that the resulting expansion is indeed asymptotic over the entire rectangle. In the first stage, a formal asymptotic solution is sought in the form of a sum of six functions (solutions): an external solution defined on the entire rectangle; boundary layer solution in a small neighborhood of the lower side of the rectangle; two lateral boundary layer solutions in a small neighborhood of the lateral sides of the rectangle and two corner boundary layer solutions in the neighborhood of the lower vertices of the rectangle. All these boundary layer solutions exponentially decrease outside the boundary layers.

Keywords: asymptotic solution; small parameter; singularly perturbed problem; first boundary value problem; heat equation; boundary layer solution.

References

1. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of mathematical physics). Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (in Russ.).

2. Zauderer E. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York etc.: John Wiley & Sons, Inc., 891 p.

3. Alymkulov K., Tursunov D.A. On a method of construction of asymptotic decompositions of bisingular perturbed problems. *Russian Mathematics*, 2016, Vol. 60, no. 12, pp. 1–8. DOI: 10.3103/S1066369X1612001X

4. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, Vol. 12, Iss. 5(77), pp. 3–122. (in Russ.).

5. Trenogin V.A. The development and applications of the asymptotic method of Lyusternik and Vishik. *Russian Mathematical Surveys*, 1970, Vol. 25, Iss. 4, pp. 119–156. DOI: 10.1070/RM1970v025n04ABEH001262

6. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* (A Handbook of Linear Equations in Mathematical Physics), Moscow, Fiz.-mat. lit. Publ., 2001, 575 p. (in Russ.).

7. Protter M.H., Weinberger H.F. *Maximum Principles in Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967, 261 p. DOI:10.1007/978-1-4612-5282-5

Received December 27, 2021

Information about the authors

Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Rector of Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0856-5113

Shoorukov Asylbek Abdibahapovich is Post-graduate Student, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9550-090X

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Director of the HSIEP, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: dtursunov@oshsu.kg, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6990-1742