УДК 517.54 DOI: 10.14529/mmph220105

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ И РАДИУСЫ ВЫПУКЛОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ф.Ф. Майер[1], М.Г. Тастанов[1], А.А. Утемисова[1], С.А. Козловский[2]

[1] Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан

[2] АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы», г. Костанай, Республика Казахстан

E-mail: maiyer@mail.ru

Аннотация. Исследование геометрических свойств аналитических функций является одной из классических задач теории функций комплексного переменного и уже более полувека как представляет устойчивый интерес у многих математиков. При этом отдельным направлением является построение достаточных признаков однолистности, в том числе нахождение условий, обеспечивающих их простые геометрические свойства (выпуклость, звездообразность, почти выпуклость и др.).

Решение указанных задач во многих случаях связано с нахождением оценок в различных классах функций, что само по себе также является актуальной проблематикой.

Настоящая статья посвящена нахождению точных оценок аналитических функций и их производных в достаточно широких классах функций, выделяемых в виде некоторых ограничений на области, получаемых из областей значений данных функций с помощью круговой симметризации или симметризации относительно прямой. На основе данных результатов найдены точные радиусы выпуклости в некоторых классах функций.

Ключевые слова: геометрическая теория функций комплексного переменного, симметризация области, оценки аналитических функций, однолистные функции, радиусы выпуклости аналитических функций.

Введение

Методы подчиненности [1] и симметризации [2, 3] широко используются в геометрической теории комплексных функций для нахождения их точных оценок. К данному направлению тесно примыкают вопросы построения достаточных признаков однолистности по областям значений некоторых функционалов. В систематизированном виде эта проблематика и наиболее важные результаты впервые были изложены в работе [4].

Исследованию геометрических свойств функций, аналитических в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$, в том числе нахождению их радиусов выпуклости, звездообразности и почти выпуклости, посвящено достаточно большое количество работ [5–8].

В нашем исследовании используется понятие внутреннего радиуса области – одного из наиболее общих характеристик области, введенного Г. Сеге [9]. В дальнейшем его свойства изучались в работах Г. Полиа и Г. Сегё [2], В.К. Хеймана [10]. Для случая односвязных областей он хорошо известей под название радиуса конформности области [1].

Метод подчиненности в сочетании с методом симметризации и внутренним радиусом области позволяют [11] при построении достаточных признаков однолистности в качестве множества значений функционалов использовать области, существенно отличные от канонических.

Далее, говоря о функциях комплексного переменного z, мы будем считать, что они являются регулярными (аналитическими) в круге E.

Пусть функции $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ заданы в круге E и функция $\varphi_0(z)$ является однолистна в E.

Функцию $\varphi(z)$ называют подчиненной функции $\varphi_0(z)$ (и обозначают $\varphi(z)\prec\varphi_0(z)$), если $\varphi(z)=\varphi_0\left[w(z)\right]$, где $w(z)$ аналитична в E, $|w(z)|\le 1$ для всех z из E и $w(0)=0$.

Геометрически условие подчиненности означает, что $\varphi(E)\subset\varphi_0(E)$ и $\varphi(0)=\varphi_0(0)$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая

Лемма 1 [12]. *Пусть функция* $\varphi(z)$ *в круге* E *разлагается в ряд вида*

$$\varphi(z)=c_0+c_n z^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots, n\ge 1,$$

и пусть $\varphi(z)\prec\varphi_0(z)$. *Тогда справедлива оценка*

$$|\varphi'(z)|\le\frac{n|z|^{n-1}}{1-|z|^{2n}}R\left(D_0,\varphi(z)\right),$$

где $R-$ *внутренний радиус области* D *относительно точки* w *и* $D_0=\varphi_0(E)$. *Оценка точная и достигается для функции* $\varphi(z)=\varphi_0\left(\varepsilon z^n\right)$, *где* $|\varepsilon|=1$

1. Оценки модуля функции и модуля производной в некоторых классах функций

Пусть $G(\alpha,n), 0<\alpha\le 2$ – класс функций

$$w=\varphi(z)=c_n z^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots, n\ge 1,\ z\in E, \tag{1}$$

удовлетворяющих условию

$$\max_{0\le R\le\infty} mes\left\{\varphi(E)\cap|w-w_0|=\rho\right\}\le\alpha\pi, \tag{2}$$

где w_0- некоторое фиксированное комплексное число.

Данное условие означает, что радианная мера пересечения области $\varphi(E)$ с каждой окружностью $|w-w_0|=\rho$ не превосходит $\alpha\pi$. Поэтому после осуществления круговой симметризации [2–3] области $\varphi(E)$ относительно луча, исходящего из точки w_0 и проходящего через начало координат, получится область D^*, содержащаяся внутри угла D^0 с вершиной в точке w_0 раствора $\alpha\pi$.

Теорема 1. *Если* $\varphi(z)\in G(\alpha,n)$ *при некотором* $w_0\in\mathbb{C}$, *то в круге* $|z|\le r$ *имеют место следующие оценки*

$$|\varphi'(z)|\le\frac{2A\alpha n r^{n-1}}{1-r^{2n}}\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}, \tag{3}$$

$$|\varphi(z)|\le A\left[\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}-1\right], \tag{4}$$

где $A=|w_0|$. Оценки точные и достигаются для функции

$$\varphi_0(z)=A\left[\left(\frac{1+z^n}{1-z^n}\right)^{\alpha}-1\right].$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что вершиной угла D^0 раствора $\alpha\pi$ является точка $w_0=-A,\ A>0$, и биссектриса угла проходит через точку $w=0$ в положительном направлении действительной оси. Легко определить, что отображение круга E на угол D^0 имеет вид

$$\varphi_0(z)=A\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right],$$

при этом $\varphi_0(0)=0$ и $\varphi_0(-1)=-A$.

Найдем внутренний радиус области D_0 в точках w: $\Im w=0$. Так как $R\left(D,\varphi_0(z)\right)=|\varphi_0'(z)|\left|1-|z|^2\right|$, то

$$R\left(D,\varphi_0\left(z\right)\right)=\frac{2A\alpha\left(1+z\right)^{\alpha-1}}{\left(1-z\right)^{\alpha+1}}\left(1-z\right)\left(1+z\right),$$

или окончательно,

$$R\left(D,\varphi_0\left(z\right)\right)=2A\alpha\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$$

Так как $z=\pm r$, где $0<r<1$, то

$$\frac{1-r}{1+r}\le\frac{1+r}{1-r},$$

поэтому

$$R\left(D,\phi_0\left(z\right)\right)\le 2A\alpha\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}.$$

Очевидно, что

$$R\left(D,\varphi\left(z\right)\right)\le R\left(D,\varphi_0\left(z^n\right)\right)\le 2A\alpha\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}.$$

Поэтому, применяя лемму 1, окончательно получаем

$$|\varphi'(z)|\le\frac{2A\alpha nr^{n-1}}{1-r^{2n}}\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}.$$

Оценка (4) получается из оценки (3) интегрированием по r. Точность оценок (3)–(4) проверяется легко. Теорема доказана.

Конкретизация условия (2) позволяет получить целую серию результатов.

Следствие 1. *Пусть функция* $\varphi\left(z\right)$ *разлагается в ряд вида* (1) *и пусть после круговой симметризации области* $\varphi\left(E\right)$ *относительно луча* $\left[-A;+\infty\right), A>0,$ *получается область* D^*, *содержащаяся в области* $D_0=\mathbb{C}\setminus(-\infty;-A]$. *Тогда в круге* $|z|\le r$ *справедливы точные оценки*

$$|\varphi'(z)|\le\frac{4Anr^{n-1}\left(1+r^n\right)}{\left(1-r^n\right)^3},$$

$$|\varphi(z)|\le A\left[\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^2-1\right].$$

Следствие 1 вытекает из теоремы 1 при $\alpha=2$, когда область D^0 – всю плоскость комплексного переменного z с удаленным лучом $(-\infty;-A]$.

Пусть $\alpha=1$. В данном случае областью D_0 является полуплоскость с граничной прямой, удаленной от начала системы координат на расстояние $A=|w_0|$.

Следствие 2. *Пусть функция* $\varphi\left(z\right)$ *имеет разложение в ряд вида* (1) *и пусть радианная мера пересечения области* $\varphi\left(E\right)$ *с каждой окружностью* $|w-w_0|=\rho, 0<\rho<+\infty$, *где* w_0 – *некоторая фиксированная комплексная точка, не превосходит* π.

Если $A=|w_0|$, *то для всех* z, $|z|\le r$ *верны точные оценки*

$$|\varphi'(z)|\le\frac{2Anr^{n-1}}{\left(1-r^n\right)^2},$$

$$|\varphi(z)|\le\frac{2Ar^n}{1-r^n}.$$

Следствие 3. *Пусть функция* $\varphi(z)$ *разлагается в ряд вида* (1) *и пусть линейная мера пересечения области* $\varphi(E)$ *с любой прямой* $\Re w = u, -\infty < u < +\infty$ *не превосходит* $2l$.

Тогда для всех z, $|z| \le r$ *выполняются точные оценки*

$$|\varphi'(z)| \le \frac{4\ln}{\pi}\frac{r^{n-1}}{1-r^{2n}},$$

$$|\varphi(z)| \le \frac{2l}{\pi}\ln\frac{1+r^n}{1-r^n}.$$

Следствие 3 получается из теоремы 1 с помощью предельного перехода при $\alpha \to 0$. В этом случае круговая симметризация преобразуется в симметризацию относительно прямой.

2. Радиусы выпуклости в некоторых классах функций

Пусть $H = \{f(z)\}$ – произвольный класс функций $f(z)$, регулярных в круге E.

Радиусом выпуклости класса H называют число r_0 такое, что любая функция $f(z)$ из H является выпуклой в круге $E_{r_0} = \{z : |z| < r_0\}$. Наибольшее из таких чисел r_0 *называют точными радиусом выпуклости.*

Нахождению радиусов выпуклости (почти выпуклости, однолистности и т. д.) посвящен целый ряд работ (например, [5–7]). При этом основную трудность представляет построение оценок в заданном классе H, подходящих под достаточное условие, обеспечивающее необходимые свойства функции $f(z)$.

Теорема 2. *Пусть функция*

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots, n \ge 1,\ z \in E \tag{5}$$

регулярна в круге E, $\ln f'(z) \in G(\alpha, n)$ *при некотором* $w_0 \in \mathbb{C}$ *и пусть* $A = |w_0|$.

Тогда функция $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z| \le r_A$, *где* r_A *является корнем уравнения*

$$2A\alpha n r^n \left(1 + r^n\right)^{\alpha-1} - \left(1 - r^n\right)^{\alpha+1} = 0. \tag{6}$$

Данный радиус выпуклости является точным.

Доказательство. Обозначим $\varphi(z) = \ln f'(z)$. Поскольку $\varphi(z) \in G(\alpha, n)$, то в силу теоремы 1 справедлива точная оценка (3). Учитывая, что $\varphi'(z) = f''(z)/f'(z)$, из (3) получаем

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \le \frac{2A\alpha n r^n}{1-r^{2n}}\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha}.$$

Если

$$\frac{2A\alpha n r^n}{1-r^{2n}}\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{\alpha} \le 1,$$

то

$$\Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \ge -1$$

в круге $|z| \le r_A$, где r_A находится из уравнения (6). Последнее неравенство означает (например, [2]), что функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \le r_A$.

Радиус выпуклости r_A является точным, так как достигается для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \exp\left\{ -A\left[\left(\frac{1-t^n}{1+t^n} \right)^{\alpha} - 1 \right] \right\} dt.$$

Теорема доказана.

Заметим, что частным случаем условия $\ln f'(z) \in G(\alpha, n)$ является выполнение неравенства

$$\left|\arg\left(\ln f'(z) - A\right) + \gamma\right| < \frac{\alpha\pi}{2}, A > 0,\ 0 < \alpha \le 2,\ \forall z \in E. \quad (7)$$

Из теоремы 2 вытекает ряд следствий.

Следствие 4 [13]. *Пусть функция* $f(z)$ *разлагается в ряд вида* (5) *и* $\left|f'(z)\right| \le M, M > 1, \forall z \in E$. *Тогда точный радиус выпуклости равен*

$$r_M = \sqrt[n]{1 + n\ln M - \sqrt{n\ln M\left(n\ln M + 2\right)}}. \quad (8)$$

Доказательство. Перейдём от плоскости значений $f'(z)$ к плоскости значений $\ln f'(z)$. Если $\left|f'(z)\right| \le M$, то $\Re \ln f'(z) \le \ln M$. Поэтому получаем частный случай теоремы 2 в форме условия (7), где $\alpha = 1$ и $A = \ln M$.

Из уравнения (6) получаем $2\ln M \cdot n \cdot r^n - \left(1 - r^n\right)^2 = 0$ или

$$r^{2n} - \left(2 + 2n\ln M\right)r^n + 1 = 0.$$

Отсюда находим значение точного радиуса выпуклости (8). Экстремальная функция имеет вид

$$f_0(z) = \int_0^z \exp\left\{\frac{2\ln M\, t^n}{1 + t^n}\right\} dt.$$

Следствие 4 дополняет результат Ф.Г. Авхадиева [5], в котором при этих же условиях найден точный радиус однолистности класса функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left|f'(z)\right| \le M, M > 1, \forall z \in E$.

Следствие 5. *Если* $\left|f'(z)\right| \ge M$, *где* $0 < M < 1, \forall z \in E$ *и* $f(z)$ *имеет разложение вида* (5), *то функция* $f(z)$ *является выпуклой в круге* $|z| < r_M$, *где*

$$r_M = \sqrt[n]{1 + n(\ln M(- \sqrt{n(\ln M((n(\ln M(+ 2)}}.$$

Аналогично теореме 2, опираясь на следствие 3, доказывается

Теорема 3. *Пусть для функции* $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots, n \ge 1, z \in E$, *линейная мера пересечения области* $\ln f'(E)$ *с каждой прямой* $\Re w = u, -\infty < u < +\infty$, *не превосходит* $2l\,(l > 0)$. *Тогда точный радиус выпуклости этого класса функций равен*

$$r_l = \sqrt[n]{\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{4l^2n^2 + \pi^2} - 2nl\right)}.$$

Введем в рассмотрение класс $L(\gamma)$ функций $f(z)$ с разложением (5) таких, что $f'(z) - 1 \in G(\gamma, n)$ с $w_0 = 0$. То есть наибольшее значение сумм радианных мер дуг пересечения любой окружности $|w| = \rho$ с областью $f'(E)$ не превосходит $\gamma\pi$. Это означает, что после осуществления круговой симметризации области $f'(E)$ относительно положительной действительной полуоси получится область, содержащаяся внутри угла с вершиной в точке $w = 0$ раствора $\gamma\pi$, симметричного относительно данной полуоси.

Частным случаем класса $L(\gamma)$ является класс $K(\gamma)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg f'(z)\right| \le \gamma\frac{\pi}{2}, 0 < \gamma \le 1, z \in E, \quad (9)$$

который в более широкой формулировке изучался в работе Рида [14] и других авторов. Известно, что все функции данного класса являются почти выпуклыми порядка γ.

Нетрудно заметить, что из условия $f(z)\in L(\gamma)$ вытекает, что линейная мера пересечения области $\ln f'(E)$ с каждой прямой $\Re w = u, -\infty < u < +\infty$, не превосходит $\gamma\pi$. Поэтому из теоремы 3 вытекает

Следствие 6. *Если функция $f(z)\in L(\gamma)$ и имеет разложение вида (5), то $f(z)$ является выпуклой в круге $|z|\le r_\gamma$, где $r_\gamma = \sqrt[n]{\sqrt{\gamma^2 n^2 + 1} - \gamma n}$.*

Радиус выпуклости является точным и достигается для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \exp\left\{-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\alpha} - 1\right\} dt .$$

При $\gamma = n = 1$ следствие 6 дает известный результат [15] о радиусе выпуклости $r = \sqrt{2} - 1$ функций $f(z)$ с положительной действительной частью производной $\Re f'(z) > 0, z \in E$.

Литература

1. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М: Наука, 1966. – 628 с.

2. Полиа, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полиа, Г. Сеге. – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.

3. Митюк, И.П. Применение симметризационных методов в геометрической теории функций / И.П. Митюк. – Краснодар: КубГУ, 1985. – 94 с.

4. Авхадиев, Ф.Г. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций / Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев // УМН. – 1975. – Т. 30, вып. 4(184). – С. 3–60.

5. Авхадиев, Ф.Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений / Ф.Г. Авхадиев // Мат.заметки. – 1970. – Т. 7, вып. 5. – С. 581–592.

6. Engel, O. About the Radius of Convexity of some Analytic Functions / O. Engel, P.A. Kupán, Á.O. Páll-Szabo // Creat. Math. Inform. – 2015. – Vol. 24, no. 2. – pp. 155–161.

7. Кадиева, М.Р. Условие выпуклости обобщенного интеграла Бернацкого для одного подкласса звездообразных функций / М.Р. Кадиева, Ф.Ф. Майер // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». – 2021. – Т. 69, № 1. – С. 111–118. https://bulletin-phmath.kaznpu.kz/index.php/ped/article/view/214

8. Майер, Ф.Ф. Точные оценки гармонических и периодических функций и некоторые их применения / Ф.Ф. Майер, А.А. Шалагина // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». – 2019. – Т. 68, № 4. – С. 71–76.

9. Szegö, G. On the capacity of a condenser / G. Szegö // Bull. Amer. Math. Soc. – 1945. – Vol. 51. – P. 325–350.

10. Хейман, В.К. Многолистные функции / В.К. Хейман. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

11. Аксентьев, Л.А. Применение методов подчиненности и симметризации к достаточным признакам однолистности аналитических функций / Л.А. Аксентьев, Ф.Ф. Майер // Труды семинара по краевым задачам. – 1983. – Вып. 19. – С. 14–28.

12. Митюк, И.П. Оценки в некоторых классах аналитических функций / И.П. Митюк // Метрические вопросы теории функций. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 90–99.

13. Арсланов, Ф.Х. К геометрическим свойствам некоторых классов аналитических в единичном круге функций / Ф.Х. Арсланов, Ф.Ф. Майер // деп. ВИНИТИ № 5059-В88 24.06.88, 1988. – 10 с.

14. Reade, M.O. The Coefficients of Close-to-Convex Functions / M.O. Reade // Duke Math. J. – 1956. – Vol. 23, no. 3. – P. 459–462.

15. Mac-Gregor, T. Functions whosed Derivative has a Positive Real Part / T. Mac-Gregor // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 104. – P. 532–537.

Поступила в редакцию 2 ноября 2021 г.

Сведения об авторах

Майер Федор Федорович – профессор, кандидат физико-математических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, e-mail: maiyer@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Тастанов Мейрамбек Габдулиевич – профессор, кандидат физико-математических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1926-8958

Утемисова Анар Алтаевна – доцент, кандидат педагогических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, e-mail: anar_utemisova@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5143-0260

Козловский Станислав Александрович – магистр естественных наук, АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы», г. Костанай, Республика Казахстан, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3410-0088

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 1, pp. 42–49

DOI: 10.14529/mmph220105

EXACT ESTIMATES AND RADII OF CONVEXITY OF SOME CLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS

F.F. Maiyer[1], M.G. Tastanov[1], A.A. Utemissova[1], S.A. Kozlovskiy[2]
[1] Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan
[2] AOO "Nazarbayev Intellectual Schools", Kostanay, Republic of Kazakhstan
e-mail: maiyer@mail.ru

Abstract. The study of the geometric properties of analytic functions is one of the classical problems of the theory of functions of a complex variable and has been of steady interest to many mathematicians for more than half a century now. At the same time, a separate area is the building of sufficient conditions of one-leaf analytic functions, including finding the conditions for simple geometric properties of analytic functions (convex or star-shaped, almost starshaped, etc.).

The solution of these problems in many cases is associated with finding estimates in different classes of analytical functions, which in itself is also a relevant problem.

This article is devoted to finding exact estimates of analytic functions and their derivatives in fairly broad classes of functions, which are distinguished in the form of some restrictions on the domains obtained from the domains of values of these functions by circular symmetrization or symmetrization with respect to a straight line. Based on these results, the exact radii of convexity in some classes of functions are found.

Keywords: geometric theory of functions of a complex variable; domain symmetrization; estimates of analytic functions; one-leaf functions; radii of convexity of analytic functions.

References

1. Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* (Geometric theory of functions of a complex variable). Moscow, Nauka Publ., 1966, 628 p.

2. Polya G., Szegö G. *Isoperimetric inequalities in mathematical phisics (AM-27)*, Vol. 27. Princeton, Univ. press, 1951, 279 p.

3. Mityuk I.P. *Primenenie simmetrizatsionnykh metodov v geometricheskoy teorii funktsiy* (Application of Symmetrization Methods in Geometric Function Theory). Krasnodar, KubGU Publ., 1985, 94 p.

4. Avkhadiev F.G., Aksent'ev L.A. The Main Results on Sufficient Conditions for an Analytic Function to be Schlicht. *Russian Mathematical Surveys*, 1975, Vol. 30, no. 4, pp. 1–63. DOI: 10.1070/RM1975v030n04ABEH001511

5. Avkhadiev F.G. Radii of Convexity and Close-to-Convexity of Certain Integral Representations. *Mathematical Notes*, 1970, Vol. 7, Iss. 5, pp. 350–357. DOI: 10.1007/BF01123846

6. Engel O., Kupán P.A., Páll-Szabo Á.O. About the Radius of Convexity of some Analytic Functions. *Creat. Math. Inform.*, 2015, Vol. 24, no. 2, pp. 155–161.

7. Kadiyeva M.R., Maiyer F.F. Convexity Condition of the Generalized Bernatsky Integral for One Subclass of Star-Like Functions (Uslovie vypuklosti obobshchennogo integrala Bernatskogo dlya odnogo podklassa zvezdoobraznykh funktsiy). *Bulletin of the Abai KazNPU, the series of "Physical and Mathematical Sciences"*, 2021, Vol. 69, no. 1, pp. 111–118.

8. Maiyer F.F., Shalagina A.A. Tochnye otsenki garmonicheskikh i periodicheskikh funktsiy i nekotorye ikh primeneniya (Accurate Estimates of Harmonic and Periodic Functions and some of their Applications). *Bulletin of the Abai KazNPU, the series of "Physical and Mathematical Sciences"*, 2019, Vol. 68, no. 4, pp. 71–76.

9. Szegö G. On the Capacity of a Condenser. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, Vol. 51, pp. 325–350. DOI: 10.1090/S0002-9904-1945-08336-0

10. Hayman W.K. *Multivalent functions*. Cambridge, Univ. press, 1958, 168 p.

11. Aksent'ev L.A., Maiyer F.F. Primenenie metodov podchinennosti i simmetrizatsii k dostatochnym priznakam odnolistnosti analiticheskikh funktsiy (Application of Methods of Subordination and Symmetrization to Sufficient Tests of Univalence of Analytic Functions). *Trudy Sem. Kraev. Zadacham*, 1983, Iss. 19, pp. 14–28. (in Russ.).

12. Mityuk I.P. *Otsenki v nekotorykh klassakh analiticheskikh funktsiy* (Estimates in some Classes of Analytical Functions). Metricheskie voprosy teorii funktsiy (Metric Problems of the Theory of Functions), Kiev, Naukova dumka Publ., 1980, pp. 90–99. (in Russ.).

13. Arslanov F.Kh., Maiyer F.F. K geometricheskim svoystvam nekotorykh klassov analiticheskikh v edinichnom kruge funktsiy (On the Geometric Properties of some Classes of Analytic Functions in the Unit Circle). *VINITI № 5059-V88 24.06.88*, 1988, 10 p. (in Russ.).

14. Reade M.O. The Coefficients of Close-to-Convex Functions. *Duke Math. J.*, 1956, Vol. 23, no. 3, pp. 459–462. DOI: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0

15. Mac-Gregor T. Functions whosed Derivative has a Positive Real Part. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1962, Vol. 104, pp. 532–537. DOI: 10.1090/S0002-9947-1962-0140674-7

Received November 2, 2021

Information about the authors

Maiyer Fedor Fedorovich, Professor, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, e-mail: maiyer@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Tastanov Meyrambek Gabdulievich, Professor, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1926-8958

Utemissova Anar Altayevna, Associate Professor, Cand. Sc. (Pedagogical), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, e-mail: anar_utemisova@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5143-0260

Kozlovsky Stanislav Aleksandrovich, Master of Natural Sciences, AOO "Nazarbayev Intellectual Schools", Kostanay, Republic of Kazakhstan, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3410-0088