УДК 517.9, 519.216.2 DOI: 10.14529/mmph220106

ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА–СИДОРОВА И КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДЗЕКЦЕРА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ВЕНТЦЕЛЯ И РОБЕНА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Г.А. Свиридюк, Н.С. Гончаров, С.А. Загребина
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: goncharovns@susu.ru

Аннотация. Рассмотрены детерминированная и стохастическая начально-краевые задачи для уравнения Дзекцера, описывающего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости, в ограниченной области и гладкой границей. На границе области заданы условия Вентцеля и Робена, в качестве начального условия берется либо условие Шоуолтера–Сидорова, либо условие Коши. Отметим, что для изучаемой модели фильтрации рассматривается условие Вентцеля, которое не является классическим. За последние годы в математической литературе краевое условие рассматривается с двух точек зрения (классическом и неоклассическом). Поскольку начальные условия Коши и Шоуолтера–Сидорова изучались ранее в различных ситуациях, в работе, в частном случае классических условий Вентцеля и Робена методами теории вырожденных голоморфных полугрупп построены точные решения, которые позволяют определять количественные прогнозы изменения геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации. В стохастическом случае использована теория производной Нельсона–Гликлиха. В частности, исследования поставленных задач в контексте краевых условий Вентцеля позволило определить процессы, протекающие на границе двух сред (в области и на ее границе).

Ключевые слова: уравнение Дзекцера; детерминированные и стохастические уравнения соболевского типа; производная Нельсона–Гликлиха; условие Вентцеля; условие Шоуолтер–Сидорова; условие Коши.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ – ограниченная связная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T \in \mathbb{R}_+$, рассмотрим линейное уравнение Дзекцера

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \alpha_0 \Delta u(x,t) - \beta_0 \Delta^2 u(x,t) - \gamma u(x,t) + f(x,t), \; (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

моделирующее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [1], решения которого должны удовлетворять краевым условиям Вентцеля

$$\Delta u(x,t) + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta_1 u(x,t) = 0, \; (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{2}$$

и Робена

$$\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta_2 u(x,t) = 0, \; (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

а также либо начальному условию Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t \to 0+} (\lambda - \Delta)\big(u(x,t) - u_0(x)\big) = 0, x \in \Omega, \tag{4}$$

или начальному условию Коши

$$\lim_{t \to 0+} \big(u(x,t) - u_0(x)\big) = 0, x \in \Omega. \tag{5}$$

Здесь параметры $\lambda \in \mathbb{R}$, α_k, β_k, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $k = 0,1$ характеризуют среду; функция $f(x,t)$ – источник жидкости, а $\nu = \nu(x)$ – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$.

Краевое условие (3), начальные условия (4) и (5) изучались ранее в различных ситуациях [2], поэтому приведем лишь краткую историю условия (2). Впервые оно возникло в [3] при построении генератора полугруппы Феллера [4] для многомерных диффузионных процессов в ограниченной области Ω. В [5] впервые было показано, что (2) естественным образом возникает в биофизике для описания диффузии внутри клетки и на ее мембране. Позже в [6] список математических моделей, где (2) описывает процессы на границе области Ω, существенно пополнился. Такой подход к изучению задач, где краевые условия трактуются не как предельные значения искомой функции и ее производных, а как описание неких процессов на границе, возможно лишь частично зависящих от процессов внутри области, привел к построению нового направления в теории потенциала [7, 8], где получены решения однофазной и двухфазной задач Вентцеля с использованием повторных потенциалов двойного и простого слоя.

Другой подход основан на идеях и методах теории полугрупп операторов. В [9] впервые показано, что оператор, включающий в себя оператор Лапласа Δ внутри области Ω и оператор Лапласа–Бельтрами Δ на ее границе $\partial\Omega$, является генератором C_0-полугруппы. В [10] этот результат был использован при решении ряда прикладных задач. Первые итоги исследований в данном направлении были подведены в [11]. Кроме того, в [12] найдены условия аналитичности разрешающих C_0-непрерывных полугрупп операторов. Наконец, в [13] рассмотрен случай, когда оператор Δ заменен на Δ^2 в области Ω, на границе же по-прежнему оператор Лапласа–Бельтрами Δ.

Наш подход к исследованию задачи (1)–(3) традиционен. Во-первых, используя классическую теорию эллиптических операторов [14, гл. 5] мы редуцируем ее к линейному уравнению соболевского типа

$$Lu = Mu + f \tag{6}$$

и показываем, что оператор M сильно $(L,0)$-секториален. Во-вторых, используя теорию вырожденных голоморфных полугрупп операторов [15, гл. 3], мы строим решение как задачи Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} P\left(u(t)-u_0\right)=0, \tag{7}$$

так и задачи Коши

$$\lim_{t\to 0+} \left(u(t)-u_0\right)=0 \tag{8}$$

для уравнения (6). Подчеркнем, что во всех этих построениях (2) понимается как краевое условие. Наконец, в-третьих, мы рассматриваем стохастическую версию задач (6), (7) и (6), (8), где вместо «обычной» производной $\dot{u}$ понимается производная Нельсона–Гликлиха $\overset{o}{u}$. Заметим, что исследования в данном направлении начаты сравнительно недавно [16–19]. Статья кроме вводной части и списка литературы содержит два параграфа: в первом рассмотрен детерминированный, а во втором – стохастический случай.

2. Детерминированный случай

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные банаховы пространства, операторы $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ (т. е. оператор L линеен и непрерывен, причем $\operatorname{dom}L=\mathfrak{U}$), $M\in Cl(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ (т.е. оператор M линеен, замкнут и плотно определен). Напомним [15, гл. 1], что множество $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F},\mathfrak{U})\}$ называется *L-резольвентным множеством оператора M*, а множество $\sigma^L(M)=\mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$ его *L-спектром*. Операторы $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$, называются *правой* и *левой L-резольвентой оператора M* соответственно. Пусть $\rho^L(M)\neq\varnothing$, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, тогда можно построить *правую и левую*

$$R^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}R^L_{\mu_k}(M) \text{ и } L^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}L^L_{\mu_k}(M)$$

(L,p)-*резольвенты* оператора M соответственно.

Определение 2.1 [15]. Оператор M называется (L,p)-*секториальным*, если

(i) существует константа $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ такая, что сектор

$$S_\theta^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \theta\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) существуют константы $K \in \mathbb{R}_+$ и $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ такие, что

$$\max\left\{\left\|R_{(\mu,p)}^L(M)\right\|_{L(\mathfrak{U})}, \left\|L_{(\mu,p)}^L(M)\right\|_{L(\mathfrak{F})}\right\} \le \frac{K}{\prod_{k=0}^{p} |\mu_k|}$$

при любых $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in \rho^L(M)$.

Лемма 2.1 [15, гл. 3]. Пусть оператор M (L,p)-секториален, тогда

(i) $\mathfrak{U}^0 \cap \mathfrak{U}^1 = \{0\}$, $\mathfrak{F}^0 \cap \mathfrak{F}^1 = \{0\}$;

(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathfrak{L}\left(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0\right)$, причем операторы $M_0^{-1}L_0 \in \mathfrak{L}\left(\mathfrak{U}^0\right)$ и $L_0 M_0^{-1} \in \mathfrak{L}\left(\mathfrak{F}^0\right)$ нильпотентны степени не больше p.

Здесь $\mathfrak{U}^0 = \ker R_{(\mu,p)}^L(M), \mathfrak{F}^0 = \ker L_{(\mu,p)}^L(M), \mathfrak{U}^1\left(\mathfrak{F}^1\right)$ – замыкание $\operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M)$ $\left(\operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M)\right)$. (Заметим, что все эти подпространства не зависят от выбора $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_p) \in (\rho^L(M))^{p+1}$). Оператор L_k (M_k) – сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\operatorname{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$), $k = 0,1$.

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{V}$ – вещественное банахово пространство. Оператор-функция $V^{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{L}(\mathfrak{V})$ называется *вырожденной голоморфной полугруппой операторов*, если

(i) $V^s V^t = V^{s+t}$ при всех s, $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $V^{\cdot}$ голоморфно продолжима в сектор, содержащий полуось $\mathbb{R}_+$;

(iii) $\ker V^t \ne \{0\}$ при некотором $t \in \mathbb{R}_+$.

Лемма 2.2 [15, гл. 3]. Пусть оператор M (L,p)-секториален. Тогда существует вырожденная голоморфная полугруппа операторов $U^{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ ($F^{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$), имеющая вид

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu \left(F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma L_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu \right),$$

где контур $\Gamma \subset S_\theta^L(M)$ такой, что $|\arg \mu| \to \theta$ при $\mu \to \infty$ и $\mu \in \gamma$.

Обе полугруппы $U^{\cdot}$ и $F^{\cdot}$ голоморфны в секторе $|\arg \mu| < \theta - \frac{\pi}{2}$, причем $\ker U^t = \mathfrak{U}^0$ и $\ker F^t = \mathfrak{F}^0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Кроме того, $\operatorname{im} U^t \subset \mathfrak{U}^1$ и $\operatorname{im} F^t \subset \mathfrak{F}^1$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2.3. Оператор M называется *сильно* (L,p)-*секториальным справа (слева)*, если он (L,p)-секториален и

$$\left\|R_{(\mu,p)}^L(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\right\|_{\mathfrak{U}} \le \frac{K}{|\lambda| \prod_{k=0}^{p} |\mu_k|}, \ \lambda, \mu_k \in S_\theta^L(M), k \in \{0,1,\ldots,p\},$$

при любом $u \in \operatorname{dom} M$ и некоторой константе $K \in \mathbb{R}_+$, зависящей от u.

(Существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что $(\lambda L - M)^{-1} f \in \operatorname{dom} M$ при всех $f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$, причем

$$\left\|M(\lambda L - M)^{-1} L_{(\mu,p)}^L(M) f\right\|_{\mathfrak{F}} \le \frac{K}{|\lambda| \prod_{k=0}^{p} |\mu_k|}, \lambda, \mu_k \in S_\theta^L(M), k \in \{0,1,\ldots,p\},$$

при любом $f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ и некоторой константе $K \in \mathbb{R}_+$, зависящей от f.)

Лемма 2.3 [15, гл. 3]. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа (слева), тогда существует проектор $P \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ ($Q \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$), имеющий вид $P = s - \lim\limits_{t\to 0+} U^t$ ($Q = s - \lim\limits_{t\to 0+} F^t$).

Значит, если оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева, то существуют расщепления пространств

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1. \tag{9}$$

Определение 2.4 [15]. Оператор M называется *сильно (L,p)-секториальным*, если он сильно (L,p)-секториален справа и

$$\left\| R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} \right\|_{\mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \le \frac{K}{|\lambda| \prod_{k=0}^{p} |\mu_k|}$$

при некоторой константе $K \in \mathbb{R}_+$ и любых, $\lambda, \mu_k \in S^L_\theta(M)$, $k \in \{0,1,...,p\}$.

Заметим, что если в определении 2.4 мы заменим слово «справа» словом «слева», то мы получим эквивалентное исходному определение.

Теорема 2.1 [15, гл. 3]. Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда

(i) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(ii) оператор $S = L_1^{-1} M_1 \in Cl\left(\mathfrak{U}^1\right)$ секториален.

Полученные в леммах 2.1–2.3 и теореме 2.1 необходимые условия сильной (L,p)-секториальности оператора M являются достаточными, т. е. справедлива

Теорема 2.2 [15, гл. 3]. *Пусть существует расщепление (9) пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Пусть существуют операторы $L_k \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^k;\mathfrak{U}^k)$ и $M_k \in Cl(\mathfrak{F}^k;\mathfrak{U}^k)$, $k = 0,1$, причем существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$. Пусть оператор $M_0^{-1} L_0$ (или $L_0 M_0^{-1}$, что эквивалентно) нильпотентен степени p, а оператор $L_1^{-1} M_1$ секториален. Тогда оператор $M_0(\mathbb{I} - P) + M_1 P$ сильно $(L_0(\mathbb{I} - P) + L_1 P, p)$-секториален.*

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа

$$Lu = Mu + f. \tag{10}$$

Пусть $\tau \in \mathbb{R}_+$, вектор-функцию $u : (0,\tau) \to \operatorname{dom} M$ назовем *решением уравнения* (10), если $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$ и $u = u(t)$ удовлетворяет уравнению (10). В дальнейшем вектор-функцию $f : (0,\tau) \to \mathfrak{F}$ удобно представить в виде $f = f^0 + f^1$, где $f^0 = (\mathbb{I} - Q) f$ и $f^1 = Qf$.

Теорема 2.3 [15, гл. 5]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда*

(i) для любой вектор-функции $f : [0,\tau] \to \mathfrak{F}$ такой, что $f^0 \in C^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$, $f^1 \in C^0\left([0,\tau];\mathfrak{F}^1\right)$, и любого вектора $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^0\left([0,\tau];\mathfrak{U}\right)$ задачи Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} P\left(u(t) - u_0\right) = 0, \tag{11}$$

для уравнения (10);

(ii) для любой вектор-функции $f : [0,\tau] \to \mathfrak{F}$ такой, что $f^0 \in C^p\left([0,\tau];\mathfrak{F}^0\right) \cap C^{p+1}\left((0,\tau);\mathfrak{F}^0\right)$, $f^1 \in C^0\left([0,\tau];\mathfrak{F}^1\right)$, и любого вектора $u_0 \in \mathfrak{U}$ такого, что

$$(\mathbb{I} - P)u_0 = \sum_{k=0}^{p} (M_0^{-1} L)^k M_0^{-1} f^{0(k)}(0),$$

существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^0\left(\left[0,\tau\right];\mathfrak{U}\right)$ задачи Коши

$$\lim_{t\to 0+}\left(u\left(t\right)-u_0\right)=0 \tag{12}$$

для уравнения (10);

(iii) решение $u=u\left(t\right)$ задач (10), (11) и (10), (12) имеет вид

$$u\left(t\right)=U^t u_0-\sum_{k=0}^{p}(M_0^{-1}L)^k M_0^{-1} f^{0(k)}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_0^t ds\int_\gamma (\mu L_1-M_1)^{-1}e^{\mu(s-t)} f^1(s)d\mu .$$

Приступим к редукции задачи (1)–(3) к уравнению (10). Поскольку в дальнейшем рассматривается стохастический случай, то мы ограничимся гильбертовыми пространствами. Именно, в качестве пространства $\mathfrak{F}$ возьмем пространство Соболева $W_2^l\left(\Omega\right)$ при некотором $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, а в качестве пространства $\mathfrak{U}$ = $\{u\in W_2^{l+2}\left(\Omega\right):\alpha_2\frac{\partial u}{\partial \nu}\left(x\right)+\beta_2 u\left(x\right)=0, x\in\partial\Omega\}$. Вложение $\mathfrak{U}\hookrightarrow\mathfrak{F}$ плотно и компактно, а лапласиан $\Delta:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ – топлинейный изоморфизм, если $|\alpha_2|+|\beta_2|>0$ [14, гл. 4 и 5]. Далее в пространстве $\mathfrak{F}$ рассмотрим билапласиан Δ^2 с областью определения $\operatorname{dom}\Delta^2=\{u\in W_2^{l+4}\left(\Omega\right):\Delta u\left(x\right)+\alpha_1\frac{\partial u}{\partial \nu}\left(x\right)+\beta_1 u\left(x\right)=0\}\cap\mathfrak{U}$. Вложение $\operatorname{dom}\Delta^2\hookrightarrow\mathfrak{F}$ плотно и компактно, а билапласиан $\Delta^2:\operatorname{dom}\Delta^2\to\mathfrak{F}$ – топлинейный изоморфизм при тех же условиях на пространство $\mathfrak{U}$, что и выше. Причем оба спектра $\sigma\left(\Delta\right)$ и $\sigma\left(\Delta^2\right)$ дискретны, конечнократны и сгущаются только к ∞.

Заметим, что в рассматриваемом случае собственные функции лапласиана Δ, вообще говоря, не являются собственными функциями билапласиана Δ^2. Это существенно усложняет наше исследование, но только технически. Ради технической простоты и идейной ясности мы упростим условия (2) и (3), заменив их на условия

$$\Delta u\left(x,t\right)=0,\ \left(x,t\right)\in\partial\Omega\times\left(0,T\right) \tag{13}$$

и

$$u\left(x,t\right)=0,\ \left(x,t\right)\in\partial\Omega\times\left(0,T\right) \tag{14}$$

соответственно.

Пространство $\mathfrak{F}$ остается тем же, что и выше, а области определения лапласиана Δ и билапласиана Δ^2 ($\mathfrak{U}$ и $\operatorname{dom}\Delta^2$ соответственно) мы будем обозначать теми же символами, но полагать, что $\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=0$ и $\beta_2=1$. Теперь пусть $\varphi\in\mathfrak{U}$ – собственная функция лапласиана Δ, тогда $\Delta\varphi=\lambda\varphi$, откуда в силу (13), (14) $\varphi\in\operatorname{dom}\Delta^2$ и $\Delta^2\varphi=\lambda^2\varphi$, т. е. φ – собственная функция билапласиана Δ^2. Итак, $\mathfrak{U}=\{\mathfrak{U};(\cdot,\cdot)\}$ и $\mathfrak{F}=\{\mathfrak{F};\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ соответственно, причем линейная оболочка собственных функций лапласиана Δ плотна как в $\mathfrak{U}$, так и в $\mathfrak{F}$. Лапласиан $\Delta:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ и билапласиан $\Delta^2:\operatorname{dom}\Delta^2\to\mathfrak{F}$ – самосопряженные операторы.

Положим, $\sigma\left(\Delta\right)=\left\{\lambda_k\right\}$, где собственные значения $\{\lambda_k\}$ занумерованы по невозрастанию с учетом их кратности. Через $\{\varphi_k\}\subset C^\infty(\Omega)$ обозначим семейство собственных функций лапласиана Δ, ортонормированных в смысле пространства $\mathfrak{F}$. Положим, $L=\lambda-\Delta$ и $M=\alpha_0\Delta-\beta_0\Delta^2-\gamma$. Тогда

$$(\mu L-M)^{-1}=\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\beta_0\lambda_k^2-\alpha_0\lambda_k+\mu(\lambda-\lambda_k)+\gamma}. \tag{15}$$

Ряд в (15) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$, не содержащем точек L-спектра $\sigma^L\left(M\right)$ оператора M

$$\mu_k = \frac{\beta_0\lambda_k^2 - \alpha_0\lambda_k + \gamma}{\lambda_k - \lambda}, k \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Если $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда из (15) получим

$$(\mu L - M)^{-1} = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\lambda - \lambda_k)(\mu - \mu_k)} + \sum_{\lambda=\lambda_k} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\beta_0\lambda^2 - \alpha_0\lambda + \gamma}, \quad (17)$$

$$R_\mu^L(M) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\mu - \mu_k)} = L_\mu^L(M), \quad (18)$$

$$(\nu L - M)^{-1} L_\mu^L(M) = {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\lambda - \lambda_k)(\mu - \mu_k)(\nu - \mu_k)}, \quad (19)$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$. Если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, то второе слагаемое в (17) и штрих у знака суммы в (17)–(19) следует убрать. Введем условие

$$\left.\begin{array}{l} \text{коэффициенты} (\alpha_0, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \text{ и } \beta_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ таковы, что ни одно собственное} \\ \text{значение } \lambda_k \in \sigma(\Delta) \text{ не является корнем уравнения } \beta_0\xi^2 - \alpha_0\xi + \gamma = 0. \end{array}\right\} \quad (*)$$

(Понятно, что корни этого уравнения могут быть комплексными, в то время как спектр $\sigma(\Delta) \subset \mathbb{R}_-$ в силу самосопряженности лапласиана $\Delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$).

Лемма 2.4 [15, гл. 7]. *Пусть выполнено условие (*), тогда оператор M сильно $(L,0)$-секториален.*

Доказательство заключается в тривиальной проверке определений 2.1–2.4.

Теорема 2.4. *Пусть $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ и выполнено условие (*). Тогда для любых $f \in C([0,\tau];\mathfrak{F})$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau];\mathfrak{U})$, $u = u(t)$ задач (1), (4), (13), (14) и (1), (5), (13), (14), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(t\mu_k)\langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda - \lambda_k)^{-1}\int_0^t ds \int_\gamma \frac{\exp(\mu(t-s))\langle f(s), \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \mu_k} d\mu.$$

Для доказательства заметим, что если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, то условия (4) и (5) совпадают. Затем сошлемся на лемму 1.4 и теорему 2.3. Заметим еще, что теорема 2.4 остается верной, если условие (*) заменить на его частный случай $\beta_0 \in \mathbb{R}_-$. Далее, пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$, введем в рассмотрение расщепление $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, где $\mathfrak{F}^0 = \mathrm{span}_{\lambda=\lambda_k}\{\varphi_k\}$, а $\mathfrak{F}^1 = (\mathfrak{F}^\circ)^\perp$. В силу теоремы 2.3 справедлива

Теорема 2.5. *Пусть $\lambda \in \sigma(\Delta)$ и выполнено условие (*). Тогда*

(i) для любых $f \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{F}^1)$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи (1), (4), (13), (14);

(ii) для любых $f \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{F}^1)$ и $u_0 \in \mathfrak{U}$ такого, что

$$\sum_{\lambda_k=\lambda} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle f(0), \varphi_k \rangle \varphi_k}{\alpha_0\lambda - \beta_0\lambda^2 - \gamma},$$

существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^0([0,\tau];\mathfrak{U})$ задачи (1), (5), (13), (14);

(iii) решение $u = u(t)$ обеих задач имеет вид

$${\sum_{k=1}^{\infty}}' \exp(t\mu_k)\langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{\lambda_k=\lambda} \frac{\langle f(t), \varphi_k \rangle \varphi_k}{\alpha_0\lambda - \beta_0\lambda^2 - \gamma} + \frac{1}{2\pi i}{\sum_{k=1}^{\infty}}'(\lambda - \lambda_k)^{-1}\int_0^t ds \int_\gamma \frac{\exp(\mu(t-s))\langle f(s), \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \mu_k} d\mu,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k такими, что $\lambda = \lambda_k$.

3. Стохастический случай

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ – полное вероятностное пространство с вероятностной мерой $\boldsymbol{P}$, ассоциированной с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, а $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин, математическое ожидание $\mathbf{E}$ которых равно нулю, а дисперсия $\mathbf{D}$ конечна, образует гильбертово пространство $\mathbf{L}_2 = \{\xi : \mathbf{E}\xi = 0, \mathbf{D}\xi < +\infty\}$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$ и нормой $\| \xi \|_{L_2}^2 = \mathbf{D}\xi$. Заметим, что в $\mathbf{L}_2$ ортогональность векторов ξ и η (т. е. $(\xi, \eta) = 0$) эквивалентна некоррелированности случайных величин ξ и η. Действительно, $0 = \operatorname{cov}(\xi, \eta) = \boldsymbol{E}\xi\eta = (\xi, \eta) = 0$.

Возьмем множество $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}$ и рассмотрим два отображения: $f : \boldsymbol{T} \to \mathbf{L}_2$, которое каждому $t \in \boldsymbol{T}$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in \mathbf{L}_2$, и $g : \mathbf{L}_2 \times \Omega \to \mathbb{R}$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$. Отображение $\eta : \boldsymbol{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$, назовем *(одномерным) стохастическим процессом*. При каждом фиксированном $t \in \boldsymbol{T}$ значение стохастического процесса $\eta = \eta(t, \cdot)$ является случайной величиной, т. е. $\eta(t, \cdot) \in \mathbf{L}_2$, которую назовем *сечением* стохастического процесса в точке $t \in \boldsymbol{T}$. При каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ называется *(выборочной) траекторией* случайного процесса, соответствующей элементарному исходу $\omega \in \Omega$. Траектории называются также *реализациями* или *выборочными функциями* случайного процесса. Обычно, когда это не приводит к неясности, зависимость $\eta(t, \omega)$ от ω не указывается и случайный процесс обозначается просто $\eta(t)$.

Считая $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}$ интервалом, назовем стохастический процесс $\eta = \eta(t)$, $t \in \boldsymbol{T}$, *непрерывным,* если п.н. (почти наверное) все его траектории непрерывны (т. е. при п. в. (почти всех) $\omega \in \mathcal{A}$ траектории $\eta(\cdot, \omega)$ являются непрерывными функциями). Множество непрерывных стохастических процессов образует банахово пространство, которое мы обозначим символом $\mathbf{C}(\boldsymbol{T}; \mathbf{L}_2)$ с нормой

$$\| \eta \|_{\mathbf{CL}_2} = \sup_{t \in I} (\mathbf{D}\eta(t, \omega))^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{A}_0$ – σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Построим подпространство $\mathbf{L}_2^0 \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}_0$. Обозначим через $\Pi : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2^0$ – ортопроектор. Пусть $\xi \in \mathbf{L}_2$, тогда $\Pi\xi$ называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается символом $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{A}_0)$. Зафиксируем $\eta \in \mathbf{C}(\boldsymbol{T}; \mathbf{L}_2)$ и $t \in \boldsymbol{T}$, через $\mathcal{N}_t^\eta$ обозначим *σ-алгебру, порожденную случайной величиной* $\eta(t)$, и обозначим $\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot \mid \mathcal{N}_t^\eta)$.

Пример 3.1. Винеровский процесс, описывающий броуновское движение в модели Энштейна–Смолуховского [18]

$$\beta(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\omega) \sin \frac{\pi}{2}(2k+1)t, \; t \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+,$$

является непрерывным стохастическим процессом. Здесь коэффициенты $\{\xi_k = \xi_k(\omega)\} \subset \mathbf{L}_2$ – попарно некоррелированные гауссовы случайные величины, такие, что $\mathbf{D}\xi_k^2 = \left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]^{-2}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Определение 3.1 [20, 21]. *Пусть* $\eta \in \mathbf{C}(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$. *Производной Нельсона–Гликлиха* $\overset{\circ}{\eta}$ *стохастического процесса* η *в точке* $t \in \boldsymbol{T}$ называется случайная величина

$$\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^{\eta}\left(\frac{\eta(t+\Delta t,\cdot) - \eta(t,\cdot)}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^{\eta}\left(\frac{\eta(t,\cdot) - \eta(t-\Delta t,\cdot)}{\Delta t} \right) \right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$.

Если производные $\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot)$ Нельсона–Гликлиха стохастического процесса $\eta(t,\cdot)$ существуют во всех (или п. в.) точках интервала $\boldsymbol{T}$, то мы говорим о существовании производной Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}(t,\cdot)$ на $\boldsymbol{T}$ (п. н. на $\boldsymbol{T}$). Множество непрерывных стохастических процессов, имеющих непрерывные производные Нельсона–Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}$, образуют банахово $\mathbf{C}^1(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$ пространство с нормой

$$\| \eta \|_{\mathbf{C}^1\mathbf{L}_2} = \sup_{t \in T}\left(\mathbf{D}\eta(t,\omega) + \mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}(t,\omega) \right)^{1/2}.$$

Определим далее по индукции банаховы пространства $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$, $l \in \mathbb{N}$, стохастических процессов, чьи траектории п. н. дифференцируемы по Нельсону–Гликлиху на T до порядка $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ включительно [22]. Нормы в них задаются формулами

$$\| \eta \|_{\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2} = \sup_{t \in T}\left(\sum_{k=0}^{l} \mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}^{(k)}(t,\omega) \right)^{1/2}.$$

Здесь будем считать производную Нельсона–Гликлиха нулевого порядка исходным случайным процессом, т. е. $\overset{\circ}{\eta}^{(0)} \equiv \eta$. Отметим еще, что пространства $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, для краткости будем называть *пространствами «шумов»* [17–19].

Пример 3.2. В [20, 22] показано, что $\beta \in \mathbf{C}^l(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, причем $\overset{\circ}{\beta}(t) = \beta(t)/2t$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Итак, построены пространства случайных величин $\mathbf{L}_2$ и пространства «шумов» $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Перейдем к построению пространства *случайных* $\boldsymbol{K}$*-величин.* Возьмем $\mathfrak{H}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$, монотонную последовательность $\boldsymbol{K} = \{\lambda_k\} \in \mathbb{R}_+$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$, а также последовательность $\{\xi_k\} = \xi_k(\omega) \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин такую, что $\| \xi_k \|_{\mathbf{L}_2} \le C$, при некоторой константе $C \in \mathbb{R}_+$ и при всех $k \in \mathbb{N}$. Построим $\mathfrak{H}$*-значную случайную* $\boldsymbol{K}$*-величину*

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k(\omega)\varphi_k.$$

Пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \xi_k \varphi_k\}$ по норме

$$\| \eta \|_{\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k \right)^{1/2}$$

называется *пространством (*$\mathfrak{H}$*-значных) случайных* $\boldsymbol{K}$*-величин* и обозначается символом $\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$. Как нетрудно видеть, пространство $\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ – гильбертово, причем построенная выше случайная $\boldsymbol{K}$-величина $\xi = \xi(\omega) \in \mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$. Аналогично банахово пространство ($\mathfrak{H}$*-значных*) $\boldsymbol{K}$*-«шумов»* $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ определим как пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \eta_k \varphi_k\}$ по норме

$$\|\eta\|_{\mathbf{C}^l\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2} = \sup_{t\in I}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\sum_{m=1}^{l}\mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}_k^{(m)}\right)^{1/2},$$

где последовательность «шумов» $\{\eta_k\}\subset\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$, $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ Как нетрудно видеть, вектор

$$\eta(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\eta_k(t,\omega)\varphi_k$$

лежит в пространстве $\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, если последовательность векторов $\{\eta_k\}\subset\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$ и все их производные Нельсона–Гликлиха до порядка $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ включительно равномерно ограничены по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2}$.

Пример 3.3. Вектор, лежащий во всех пространствах $\mathbf{C}^l(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$, $l\in\{0\}\cup\mathbb{N}$,

$$W_K(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\beta_k(t,\omega)\varphi_k,$$

где $\{\beta_k\}\subset\mathbf{C}^l(\boldsymbol{T};\mathbf{L}_2)$ – последовательность броуновских движений, называется ($\mathfrak{H}$*-значным*) *винеровским* $\boldsymbol{K}$*-процессом.*

Пусть теперь $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$ ($\{\psi_k\}$). Введем в рассмотрение монотонную последовательность $\boldsymbol{K}=\{\lambda_k\}\subset\{0\}\cup\mathbb{R}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2<+\infty$. Символом $\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ ($\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$) обозначим гильбертово пространство, являющееся пополнением линейной оболочки *случайных* $\boldsymbol{K}$*-величин*

$$\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\varphi_k,\ \xi_k\in\mathbf{L}_2,\left(\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\zeta_k\psi_k,\ \zeta_k\in\mathbf{L}_2\right)$$

по норме

$$\|\eta\|_{\mathbf{U}}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\mathbf{D}\xi_k\left(\|\omega\|_{\mathbf{F}}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2\mathbf{D}\zeta_k\right).$$

Заметим, что в разных пространствах ($\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$) последовательность $\boldsymbol{K}$ может быть разной ($\boldsymbol{K}=\{\lambda_k\}$ в $\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$ и $\boldsymbol{K}=\{\mu_k\}$ в $\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$), однако все последовательности, отмеченные символом $\boldsymbol{K}$, должны быть монотонными и суммируемыми с квадратом. Все результаты, вообще говоря, будут верны при разных последовательностях $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$, однако простоты ради мы ограничимся случаем $\lambda_k=\mu_k$.

Пусть $A:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ – линейный оператор. Формулой

$$A\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k A\varphi_k \tag{20}$$

зададим линейный оператор $A{:}\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2\to\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$, причем если ряд в правой части (20) сходится (в метрике $\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2$) то $\xi\in\operatorname{dom}A$, а если расходится, то $\xi\notin\operatorname{dom}A$. Традиционно определяются пространства линейных непрерывных операторов $\mathfrak{L}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$ и линейных замкнутых плотно определенных операторов (подробности см. в [16–19]). Справедливы

Лемма 3.1. (i) *Оператор* $A\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *точно тогда, когда* $A\in\mathfrak{L}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$.

(ii) *Оператор* $A\in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *точно тогда, когда* $A\in Cl(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$.

Лемма 3.2. *Оператор* $M\in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *сильно* p*-секториален относительно оператора* $L\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ *точно тогда, когда* $M\in Cl(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$ *сильно* p*-секториален относительно оператора* $L\in\mathfrak{L}(\mathbf{U}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2;\mathbf{F}_{\boldsymbol{K}}\mathbf{L}_2)$. *Причем относительный спектр в обоих случаях один и тот же.*

Итак, пусть операторы $L,N \in \mathfrak{L}(\mathbf{U_K L}_2;\mathbf{F_K L}_2)$, а оператор $M \in Cl(\mathbf{U_K L}_2;\mathbf{F_K L}_2)$, причем оператор M сильно (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное эволюционное стохастическое уравнение

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta + N\delta, \tag{21}$$

где $\eta = \eta(t)$ – искомый, а $\delta = \delta(t)$ – заданный стохастический $\boldsymbol{K}$-процесс, $t \in \mathbb{R}_+$. Процесс $\eta = \eta(t)$ назовем *решением уравнения (21)*, если при подстановке его в (21) он обращает уравнение (21) в тождество. Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (21) назовем *решением задачи Коши*

$$\lim_{t\to 0+}\left(\eta(t) - \eta_0\right) = 0, \tag{22}$$

если равенство (22) выполняется для некоторой случайной $\boldsymbol{K}$-величины $\eta_0 \in \mathbf{U_K L}_2$. Аналогично определяется *решение задачи Шоуолтера–Сидорова*

$$\lim_{t\to 0+} P\left(\eta(t) - \eta_0\right) = 0. \tag{23}$$

Ясности и простоты ради мы не будем исследовать задачи (21), (22) и (21), (23) столь же детально, как их детерминированные прототипы (см. теорему 2.3). Тех читателей, которые интересуются подробностями, отсылаем к [16, 19]. Мы же перейдем сразу к интерпретации задач (1)–(4) и (1)–(3), (5) в виде задач (21), (22) и (21), (23) в нашей упрощенной постановке. Итак, положим $\mathfrak{F} = L_2(\Omega), \mathfrak{U} = \{W_2^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, а оператор $L = \lambda - \Delta$, $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Оператор $M = \alpha_0\Delta - \beta_0\Delta^2 - \gamma$, $\operatorname{dom} M = \{W_2^4(\Omega) : \Delta u(x) = 0, x \in \partial\Omega\} \cap \mathfrak{U}$, $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Оператор N – это оператор вложения $N : \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$. Далее по рецептам, изложенным выше, построим пространства случайных $\boldsymbol{K}$-величин $\mathbf{U_K L}_2$ и $\boldsymbol{F}_K\boldsymbol{L}_2$. Случайная $\boldsymbol{K}$-величина $\xi \in \mathbf{U_K L}_2$ имеет вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k,$$

где $\{\varphi_k\}$ – семейство собственных функций оператора Лапласа $\Delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ из $L_2(\Omega)$. (Напомним, что $\{\varphi_k\} \subset C^\infty(\Omega)$). Рассмотрим линейное эволюционное стохастическое уравнение соболевского типа

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta + \overset{\circ}{W}_k. \tag{24}$$

Здесь операторы L и M определены выше, а $\overset{\circ}{W}_k = \overset{\circ}{W}_k(t)$ – производная Нельсона–Гликлиха винеровского $\boldsymbol{K}$-процесса, которая называется «белым $\boldsymbol{K}$-шумом». Отметим, что «белый $\boldsymbol{K}$-шум» $\overset{\circ}{W}_k$ более соответствует теории Эйнштейна–Смолуховского, нежели традиционный белый шум (см. детали в [23]).

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (*) и

(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. *Тогда для любого* $\eta_0 \in \mathbf{U_K L}_2$ *существует стохастический* $\boldsymbol{K}$*-процесс* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{U_K L}_2)$, *каждая траектория которого является единственным решением задач (23), (24) и (22), (24). Причем стохастический* $\boldsymbol{K}$*-процесс* $\eta = \eta(t)$ *имеет вид*

$$\eta(t) = U^t\eta_0 + \int_0^t U^{t-s}\overset{\circ}{W}_k(s)\,ds;$$

(ii) $\lambda \in \sigma(\Delta)$. *Тогда для любого* $\eta_0 \in \mathbf{U_K L}_2$ *существует стохастический* $\boldsymbol{K}$*-процесс* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{U_K L}_2)$, *каждая траектория которого является единственным решением задач (23), (24). Причем стохастический* $\boldsymbol{K}$*-процесс* $\eta = \eta(t)$ *имеет вид*

$$\eta(t) = -\sum_{\lambda=\nu_k} \lambda_k \overset{\circ}{\beta}_k(t) + U^t \eta_0 + \int_0^t U^{t-s} \overset{\circ}{W}_k(s) ds.$$

Для доказательства отметим эквивалентность $\overset{\circ}{\beta}_k(t) \sim t^{-1/2}$. Кстати сказать, по этой же причине ни одна траектория стохастического $\boldsymbol{K}$-процесса не может быть решением задачи Коши (22).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в Челябинской области (код проекта 20-41-740010).

Литература

1. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / Е.С. Дзекцер // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031–1033.

2. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 104–125.

3. Вентцель, А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов / А.Д. Вентцель // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – Т. 4, Вып. 2. – С. 172–185.

4. Феллер, В. Одномерные диффузионные процессы / В. Феллер // Математика. – 1958. – Т. 2, Вып. 2. – С. 119–146.

5. Luo, Y. Linear Second Order Elliptic Equations with Venttsel Boundary Conditions / Y. Luo, N.S. Trudinger // Proc. Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. – 1991. – Vol. 118, Iss. 3 – 4. – P. 193–207.

6. Goldstein, G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions / G.R. Goldstein // Advances in Differential Equations. – 2006. – Vol. 11, no. 14. – P. 457–480.

7. Апушинская, Д.Е. Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений / Д.Е. Апушинская, А.И. Назаров // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, Вып. 6. – С. 1–29.

8. Лукьянов, В.В. Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов / В.В. Лукьянов, А.И. Назаров // Зап. научн. сем. ПОМИ – 1998. – Т. 250. – С. 203–218.

9. C_0-Semigroups Generated by Second order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 128, Iss. 7. – P. 1981–1989.

10. Favini, A. The heat equation with generalized Wentzell boundary condition / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // J. Evol. Equ. – 2002. – Vol. 2, Iss. 1. – P. 1–19.

11. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis / G.M. Coclite, A. Favini, C.G. Gal *et al.* // Advances in Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2009. – Vol. 3. – P. 279–292.

12. Engel, K.-J. Analyticity of Semigroups Generated by Operators with Generalized Wentzell Boundary Conditions / K.-J. Engel, G. Fragnelli // Advances in Differential Equations. – 2005. – Vol. 10, Iss. 11. – P. 1301–1320.

13. Denk, R. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains / R. Denk, M. Kunze, D. Ploss // Integral Equations and Operator Theory. – 2021. – Vol. 93, Iss. 2. – Article number: 13. – 26 p.

14. Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир. – 1980. – 664 с.

15. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

16. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 697410.

17. Favini, A. One class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – Vol. 15, no. 1. – P. 185–196.

18. Vasyuchkova, K.V. Some Mathematical Models with a Relatively Bounded Operator and Additive “White Noise” in Spaces of Sequences / K.V. Vasyuchkova, N.A. Manakova, G.A. Sviridyuk // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2017. – Т. 10, Вып. 4. – С. 5–14.

19. Zagrebina, S. The Multipoint Initial-Final Value Problems for Linear Sobolev-Type Equations with Relatively P-sectorial Operator and Additive “Noise” / S. Zagrebina, T. Sukacheva, G. Sviridyuk // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – Vol. 5, Iss. 2. – P. 129–143.

20. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y. – 2011. – 436 p.

21. Nelson, E. Dynamical theory of Brownian motion / E. Nelson. – Princeton: Princeton University Press, 1967. – 142 p.

22. Gliklikh, Yu.E. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes / Yu.E. Gliklikh, E.Yu. Mashkov // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6, Вып. 2. – С. 25–39.

Поступила в редакцию 9 января 2022 г.

Сведения об авторах

Свиридюк Георгий Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, научно-исследовательская лаборатория неклассических уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sviridiukga@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0795-2277

Гончаров Никита Сергеевич – аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: goncharovns@susu.ru

Загребина Софья Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zagrebinasa@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2882-9032

Bulletin of the South Ural State University Series “Mathematics. Mechanics. Physics” 2022, vol. 14, no. 1, pp. 50–63

DOI: 10.14529/mmph220106

THE SHOWALTER-SIDOROV AND CAUCHY PROBLEMS FOR THE LINEAR DZEKZER EQUATION WITH WENTZELL AND ROBIN BOUNDARY CONDITIONS IN A BOUNDED DOMAIN

G.A. Sviridyuk, N.S. Goncharov, S.A. Zagrebina
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: goncharovns@susu.ru

Abstract. Deterministic and stochastic initial boundary value problems for the Dzekzer equation describing the evolution of the free surface of a filtering fluid in a bounded region with a smooth boundary are considered. Wentzell and Robin conditions are set on the boundary of the domain, and either the Showalter-Sidorov condition or the Cauchy condition is taken as the initial condition. Note that for the filtration model under study, the Wentzell condition is considered, which is not a classical condition. In recent years, the boundary condition has been considered in the mathematical literature from two points of view (classical and neoclassical). Since Cauchy and Showalter–Sidorov initial conditions have been studied earlier in various situations, in this work, in the particular case of classical Wentzell and Robin conditions, by methods of the theory of degenerate holomorphic semigroups, exact solutions have been constructed, which allow to determine quantitative predictions of changes in geochemical regime of groundwater under unpressurized filtration. Nelson–Glicklich derivative theory was used in stochastic case. In particular, the investigation of the set problems in the context of Wentzell boundary conditions allowed to determine the processes occurring at the boundary of two media (in the region and at its boundary).

Keywords: Dzekzer equation; deterministic and stochastic Sobolev–type equations; Nelson–Gliklikh derivative; Wentzell condition; Showalter–Sidorov condition; Cauchy condition.

References

1. Dzektser E.S. Obobshchenie uravneniya dvizheniya gruntovykh vod so svobodnoy poverkhnost'yu (Generalization of the Equation of Motion of Ground Waters with free Surface). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, Vol. 202, no. 5, pp. 1031–1033. (in Russ.).

2. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

3. Venttsel' A.D. On Boundary Conditions For Multidimensional Diffusion Processes. *Theory of Probability and its Applications*, 1959, Vol. 4, Iss. 2, pp. 164–177. DOI: 10.1137/1104014

4. Feller W. Diffusion Processes in One Dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1954, Vol. 77, Iss. 1, pp. 1–31.

5. Luo Y., Trudinger N.S. Linear Second Order Elliptic Equations with Venttsel Boundary Conditions. *Proc. Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 1991, Vol. 118, Iss. 3–4, pp. 193–207. DOI: 10.1017/S0308210500029048

6. Goldstein G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions. *Advances in Differential Equations*, 2006, Vol. 11, no. 14, pp. 457–480.

7. Apushkinskaya D.E.; Nazarov A.I. The Initial-Boundary Value Problem for Nondivergent Parabolic Equations with Venttsel' Boundary Condition. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1995, Vol. 6, no. 6, pp. 1127–1149.

8. Lukyanov V.V., Nazarov A.I. Solving the Venttsel Problem for the Laplace and Helmholtz Equations with the Help of Iterated Potentials. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2000, Vol. 102, Iss. 4, pp. 4265–4274. DOI: 10.1007/BF02673857

9. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. C_0-Semigroups Generated by Second order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, Vol. 128, Iss. 7, pp. 1981–1989. DOI: 10.1090/S0002-9939-00-05486-1

10. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. The Heat Equation with Generalized Wentzell Boundary Condition. *J. Evol. Equ.*, 2002, Vol. 2, Iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1007/s00028-002-8077-y

11. Coclite G.M., Favini A., Gal C.G., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Obrecht E., Romanelli S. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis. *Advances in Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, Vol. 3, pp. 279–292.

12. Engel K.-J., Fragnelli G. Analyticity of Semigroups Generated by Operators with Generalized Wentzell Boundary Conditions. *Advances in Differential Equations*, 2005, Vol. 10, Iss. 11, pp. 1301–1320.

13. Denk R., Kunze M., Ploss D. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains. *Integral Equations and Operator Theory*, 2021, Vol. 93, Iss. 2, Article number 13, 26 p. DOI: 10.1007/s00020-021-02624-w

14. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978, 528 p.

15. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

16. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "noises". *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, Article ID 697410. DOI: 10.1155/2015/697410

17. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “white noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI:10.3934/cpaa.2016.15.185

18. Vasyuchkova K.V., Manakova N.A., Sviridyuk G.A. Some Mathematical Models with a Relatively Bounded Operator and Additive “White Noise” in Spaces of Sequences. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2017, vol. 10, no. 4, pp. 5–14. DOI: 10.14529/mmp170401

19. Zagrebina S., Sukacheva T., Sviridyuk G. Value Problems for Linear Sobolev-Type Equations with Relatively P-sectorial Operator and Additive “Noise”. *Global and Stochastic Analysis*, 2018, Vol. 5, Iss. 2, pp. 129–143.

20. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011, 436 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9

21. Nelson, E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967, 142 p.

22. Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu. Stochastic Leontieff Type Equations and Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, 2013, Vol. 6, Iss. 2, pp. 25–39.

Received January 9, 2022

Information about the authors

Sviridyuk Georgiy Anatol'evich is Professor, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of Mathematical Physics Non-Classical Equations Research Laboratory, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sviridiukga@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0795-2277

Goncharov Nikita Sergeevich is Post-graduate Student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: goncharovns@susu.ru

Zagrebina Sophiya Alexandrovna is Professor, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zagrebinasa@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2882-9032