Математика

УДК 517.977 DOI: 10.14529/mmph220201

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА УДЕРЖАНИЯ С ПОЛОМКОЙ

В.О. Анисов
Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: dik_gamer@mail.ru

Аннотация. Рассматривается линейная дифференциальная игра удержания с простым движением. Данная игра рассматривается со стороны первого игрока, которому необходимо удерживать состояние системы в заданном выпуклом терминальном множестве на протяжении всего времени игры, несмотря на возможную поломку и управление второго игрока. Под поломкой понимается мгновенная остановка первого игрока в заранее неизвестный момент времени, через определенное время он устранит поломку и продолжит движение. Вектограммами управлений игроков являются n-мерные выпуклые компакты, которые зависят от времени. Для построения u-стабильного моста используется второй метод Л.С. Понтрягина. Так строится многозначное отображение на основе альтернированного интеграла Л.С. Понтрягина, после чего доказывается, что построенное отображение является *u*-стабильным мостом для рассматриваемой игры, если выполняется ряд условий. В конце статьи рассматривается простой пример на плоскости, где вектограммы игроков есть круги с центром в начале координат и с постоянным радиусом, причем радиус круга первого игрока строго больше второго. В данном примере стоится u-стабильный мост по предложенному методу в статье и находится экстремальная стратегия для первого игрока на построенный u-стабильный мост.

Ключевые слова: дифференциальная игра, удержание, альтернированный интеграл, стабильный мост.

Введение

Нарушение динамики в дифференциальных играх преследования-уклонения в числе первых рассмотрел М.С. Никольский [1–4]. Так, в статье [3] используется второй метод Л.С. Понтрягина [5] для построения u-стабильного моста [6, с. 52].

В данной статье будет рассмотрено нарушение динамики в линейной дифференциальной игре удержания. Как и в статье [3], будет рассмотрена разовая поломка у первого игрока, при возникновении которой он обездвижен на некоторое время, данная поломка происходит в заранее неизвестный момент времени. Вектограммами управлений игроков являются n-мерные выпуклые компакты, которые зависят от времени. Поставленная игра удержания будет рассматриваться со стороны первого игрока, которому необходимо удерживать состояние системы в заданном выпуклом терминальном множестве на протяжении всего времени игры, несмотря на возможную поломку и управление второго игрока. Для построения u-стабильного моста используется второй метод Л.С. Понтрягина. Так строится многозначное отображение, которое равно пересечению альтернированных интегралов Л.С. Понтрягина на терминальное множество при фиксированном моменте поломки, пересечение берется по времени поломки и по верхнему пределу интегрирования альтернированного интеграла. Также приводится доказательство, что построенное отображение является u-стабильным мостом для рассматриваемой игры, если выполняется ряд условий. В подтверждение существования в конце статьи будет рассмотрен простой случай на плоскости, где вектограммами управлений игроков являются круги постоянного радиуса с центром в начале координат. В данном примере строится u-стабильный мост по предложенному методу, а также строится экстремальная стратегия [6, с. 57] на данный мост.

В первой части статьи описывается постановка рассматриваемой задачи удержания, во второй части вводится в рассмотрение используемый математический аппарат и строится u-стабильный мост, а в третьей части рассматривается простой пример.

Постановка задачи

Пусть задано выпуклое ограниченное множество $M \subset \mathbb{R}^n$, временной отрезок $[0,T]$ и начальный фазовый вектор системы $z(0)=z_0 \in M$, тогда если на протяжении $t \in [0,T]$ выполнялось включение $z(t) \in M$, то игра заканчивается и побеждает первый игрок, иначе, если в некоторый момент $t_* \in (0,T]$ данное включение нарушилось, тогда игра заканчивается и побеждает второй игрок.

Положим $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$. Для достижения своих целей игроки строят допустимые управления, с помощью которых происходит воздействие на систему. Для упрощения рассуждений вектограммы управлений игроков будут заданы выпуклыми компактами P и Q из $\mathbb{R}^n$, а множитель, зависимый от времени, будет учтен в виде коэффициента. Допустимое управление первого игрока задается функцией $u:[0,T]\times\mathbb{R}^n \to P$, коэффициент задается интегрируемой функцией $a:[0,T]\to\mathbb{R}_+$. В заранее неизвестный момент времени $\theta \in [0,T]$ может произойти поломка на время h. Для математического описания поломки введем функцию φ_θ, которая имеет вид

$$\varphi_\theta(t) = \begin{cases} 0 & t \in [\theta, \theta+h] \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Допустимое управление второго игрока задается функцией $v:[0,T]\times\mathbb{R}^n \to Q$, коэффициент задается интегрируемой функцией $b:[0,T]\to\mathbb{R}_+$.

В силу выше сказанного движение системы можно описывать линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dz}{dt} = b(t)\cdot v(t,z(t)) - a(t)\cdot\varphi_\theta(t)\cdot u(t,z(t)), \quad z(0)=z_0, \quad v(t,z(t))\in Q, \quad u(t,z(t))\in P, \quad t\in[0,T]. \quad (1)$$

Дадим определение движения системы (1), порожденного допустимыми управлениями игроков из начального положения z_0. Возьмем разбиение ω временного отрезка $[0,T]$ с диаметром $d(\omega)$ следующим образом:

$$\omega: 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m+1} = T, \quad d(\omega) = \max_{0\le i\le m}\left(t_{i+1}-t_i\right).$$

Построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \left(\int_{t_i}^{t} \varphi_\theta(r)\cdot a(r)\,dr\right)\cdot u(t_i, z_\omega(t_i)) + \left(\int_{t_i}^{t} b(r)\,dr\right)\cdot v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad (2)$$

при $z_\omega(t_0)=z_0$, $t\in\left[t_i, t_{i+1}\right]$. Семейство ломаных (2) является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным согласно [7, с. 46], а значит, удовлетворяют условию теоремы Арцела [8, с. 104]. Под движением системы (1) с допустимыми управлениями u и v и с начальным условием $z(t_0)=z_0$ понимается любой предел подпоследовательности последовательности ломаных (2), которая равномерно сходится на отрезке $[0,T]$ при $d(\omega)\to 0$.

Построение стабильного моста

Введем в рассмотрение операции Минковского [5] над множествами.

Определение 1. Алгебраической суммой непустых множеств A и B из $\mathbb{R}^n$ называется множество

$$A+B = \left\{x\in\mathbb{R}^n : x = a+b, a\in A, b\in B\right\} = \bigcup_{b\in B}(A+b).$$

Определение 2. Произведением непустого множества A из $\mathbb{R}^n$ на число β называется множество

$$\beta\cdot A = \left\{x\in\mathbb{R}^n : x = \beta\cdot a, a\in A\right\}.$$

Определение 3. Геометрической разностью непустых множеств A и B из $\mathbb{R}^n$ называется множество

$$A \dot{-} B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x + B \subset A \right\} = \bigcap_{b \in B} (A - b).$$

Введем в рассмотрение интеграл Ауманна [9, с. 326].

Определение 4. Пусть задано многозначное отображение $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, значения которого являются непустыми компактами. Интегралом Ауманна от $X(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ называется множество

$$\int_{t_1}^{t_2} X(r)dr = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x(r)dr \ : \ \text{измеримая } x(r) \in X(r) \text{ при почти всех } t_1 \le r \le t_2 \right\}.$$

Лемма 1 [3]. Пусть заданы некоторые непустые множества B, C и задано $\{A_i\}$ – семейство непустых множеств, которые зависят от параметра $i \in I$ и пусть $\exists \ j \in I : A_j = \bigcap_{i \in I} A_i$, тогда

$$\bigcap_{i \in I} \left[\left(A_i + B \right) \dot{-} C \right] = \left(\bigcap_{i \in I} A_i + B \right) \dot{-} C$$

Введем в рассмотрение *альтернированный интеграл Л.С. Понтрягина* [5] для рассматриваемой игры. Построим многозначные отображения $U_\theta(t) = \varphi_\theta(t) \cdot a(t) \cdot P$ и $V(t) = b(t) \cdot Q$ при $t \in [0, T]$. Так как значения данных отображений при $t \in [0, T]$ – это выпуклые компакты из $\mathbb{R}^n$, то данные отображения равномерно ограничены на отрезке $[0, T]$, то есть

$$\exists \, r \in R : \forall t \in [0, T] \Rightarrow U(t) \subset r \cdot S, V(t) \subset r \cdot S,$$

где S – это n-мерный шар единичного радиуса с центром в начале координат. Возьмем разбиение ω отрезка $[0, T]$:

$$\omega : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m+1} = T.$$

Положим

$$U_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} U_\theta(r)dr \quad V_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} V(r)dr \quad i = 1..m+1.$$

Положим $A_0 = M$ и определим A_{m+1} индуктивно

$$A_i = (A_{i-1} + U_i) \dot{-} V_i \quad i = 1...m+1.$$

Множество A_{m+1} называется *альтернированной суммой*, а пересечение A_{m+1} по всевозможным разбиениям ω отрезка $[0, T]$ называется *альтернированным интегралом Л.С. Понтрягина* и записывается в виде

$$W_\theta(0, T) = \int_{M,0}^{T} [U_\theta(r) \dot{-} V(r)]dr.$$

В силу определения имеем, что $\forall t \in [0, T]$ выполняется $W_\theta(t, t) = M$.

В следующей лемме представлено ключевое свойство альтернированного интеграла, которое связывает его с u-стабильным мостом.

Лемма 2 [3]. $\forall t \in [0, T]$ и $\forall \varepsilon \in [0, T - t]$ выполняется следующее включение:

$$W_\theta(t, T) \subset \left[W_\theta(t + \varepsilon, T) + \int_t^{t+\varepsilon} U_\theta(r)dr \right] \dot{-} \int_t^{t+\varepsilon} V(r)dr.$$

Из данного включения и введённых определений следует, что $\forall z(t) \in W_\theta(t, T)$, выполняется включение

$$z(t) \in \bigcap_{v \in Q} \left[\bigcup_{u \in P} \left[W_\theta(t + \varepsilon, T) + \left(\int_t^{t+\varepsilon} \varphi_\theta(r) \cdot a(r)dr \right) \cdot u \right] - \left(\int_t^{t+\varepsilon} b(r)dr \right) \cdot v \right],$$

то есть $\exists\, u_* \in P$, что $\forall v \in Q$ выполняется включение

$$z(t) - \left(\int_t^{t+\varepsilon} \varphi_\theta(r) \cdot a(r) dr \right) \cdot u_* + \left(\int_t^{t+\varepsilon} b(r) dr \right) \cdot v = z(t+\varepsilon) \in W_\theta(t+\varepsilon, T).$$

Введем в рассмотрение понятие *u*-стабильного моста [6, с. 52]. Пусть начальное состояние системы $z(0) \in W_\theta(0,T)$, тогда в силу леммы 2 существует допустимое управление первого игрока $u(t, z(t))$, что при любом допустимом управлении второго игрока $v(t, z(t))$ и любом моменте поломки $\theta \in [0,T]$ будет выполняться включение

$$z(t) \in W_\theta(t,T),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

а конечное состояние $z(T) \in W_\theta(T,T) = M$. Тогда множество $\{(t,x) : t \in [0,T], x \in W_\theta(t,T)\}$ называется *u-стабильным мостом* для дифференциальной игры преследования-уклонения, заданное дифференциальным уравнением (1) к множеству M. Однако из включения (3) не следует включение $z(t) \in M,\ t \in [0,T]$, которое требуется от первого игрока в рассматриваемой игре. Чтобы учесть требуемое включение, построим следующие множества:

$$D_\theta(t,T) = \bigcap_{s \in [t,T]} W_\theta(t,s);\ \underline{D}(t,T) = \bigcap_{\theta \in [t,T]} D_\theta(t,T);$$

$$B_\theta = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in D_\theta(t,T)\};\ \underline{B} = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in \underline{D}(t,T)\}.$$

Лемма 3. При $\forall t \in [0,T]$, если $\underline{D}(t,T) \neq \varnothing$, то выполняется включение $\underline{D}(t,T) \subset M$ и $D_\theta(t,T) \subset M$ при $\theta \in [t,T]$.

Доказательство. Пусть $t \in [0,T]$, $\underline{D}(t,T) \neq \varnothing$. Множество $\underline{D}(t,T)$ согласно определению равно

$$\underline{D}(t,T) = \bigcap_{\theta \in [t,T]} D_\theta(t,T), \tag{4}$$

а каждое $D_\theta(t,T)$ согласно определению равно

$$D_\theta(t,T) = \bigcap_{s \in [t,T]} W_\theta(t,s). \tag{5}$$

При $\forall \theta \in [t,T]$ в пересечении из (5) присутствует элемент $W_\theta(t,t) = M$, а значит, данное пересечение лежит в M или равно ему, получили, что $D_\theta(t,T) \subseteq M$. Так как при $\forall \theta \in [t,T]$ выполнено включение $D_\theta(t,T) \subseteq M$, то пересечение из (4) лежит в M или равно ему, получили, что $\underline{D}(t,T) \subseteq M$. □

Теорема 1. Пусть начальное состояние игры $z_0 \in \underline{D}(0,T)$ и $\underline{D}(t,T) \neq \varnothing$ при $t \in [0,T]$. Пусть $\forall t \in [0,T]\ \ \exists\, \theta' \in [t,T]$ такое, что имеет место равенство

$$\bigcap_{\theta \in [t,T]} D_\theta(t,T) = D_{\theta'}(t,T), \tag{6}$$

и $\forall t \in [0,T]\ \ \exists\, s' \in [t,T]$ такое, что имеет место равенство

$$\bigcap_{s \in [t,T]} W_\theta(t,s) = W_\theta(t,s'). \tag{7}$$

Тогда в рассматриваемой игре удержания первый игрок сможет победить при любом допустимом управлении второго игрока и любом моменте поломки $\theta \in [0,T]$.

Доказательство. Дано $z_0 \in \underline{D}(0,T)$ и $\underline{D}(t,T) \neq \varnothing$ при $t \in [0,T]$. Распишем множество $\underline{D}(t,T)$ по определению, получим

$$\underline{D}(t,T) = \bigcap_{\theta \in [t,T]} D_\theta(t,T). \tag{8}$$

Рассмотрим отдельно множество $D_\theta(t,T)$, распишем его по определению

$$D_\theta(t,T) = \bigcap_{s \in [t,T]} W_\theta(t,s). \tag{9}$$

Ослабим пересечение в правой части (9) следующим образом: возьмем некоторое $\varepsilon \in (0, T-t]$ и перейдем от $[t,T]$ к $[t+\varepsilon, T]$, затем используем лемму 2, получим, что правая часть (9) лежит в

$$\bigcap_{s\in[t+\varepsilon,T]}\left[\left[W_\theta(t+\varepsilon,s)+\int_t^{t+\varepsilon}U_\theta(r)\,dr\right]\dot{-}\int_t^{t+\varepsilon}V(r)\,dr\right]. \qquad (10)$$

Так как по условию теоремы выполняется равенство (7), то применим лемму 1 к (10), а полученное пересечение $\bigcap_{s\in[t+\varepsilon,T]} W_\theta(t+\varepsilon,s)$ заменим, согласно определению, на $D_\theta(t+\varepsilon,T)$, получим

$$(10) = \left[D_\theta(t+\varepsilon,T)+\int_t^{t+\varepsilon}U_\theta(r)\,dr\right]\dot{-}\int_t^{t+\varepsilon}V(r)\,dr.$$

Получили, что $\forall t\in[0,T]$ и $\forall \varepsilon\in[0,T-t]$ выполняется включение

$$D_\theta(t,T)\subset\left[D_\theta(t+\varepsilon,T)+\int_t^{t+\varepsilon}U_\theta(r)\,dr\right]\dot{-}\int_t^{t+\varepsilon}V(r)\,dr. \qquad (11)$$

Аналогично выводам из леммы 2 из включения (11) следует, что множество $B_\theta=\{(t,x):t\in[0,T],x\in D_\theta(t,T)\}$ является u-стабильным мостом к рассматриваемой игре при фиксированном моменте поломки $\theta\in[0,T]$.

Применим включение (11) к (8), получим

$$(8)\subset\bigcap_{\theta\in[t,T]}\left[D_\theta(t+\varepsilon,T)+\int_t^{t+\varepsilon}U_\theta(r)\,dr\right]\dot{-}\int_t^{t+\varepsilon}V(r)\,dr. \qquad (12)$$

Ослабим пересечение в (12) следующим образом: возьмем некоторое $\varepsilon\in(0,T-t]$ и перейдем от $[t,T]$ к $[t+\varepsilon,T]$, так как по условию теоремы выполняется равенство (6), то применим лемму 1, а полученное пересечение $\bigcap_{\theta\in[t,T]} D_\theta(t+\varepsilon,T)$ заменим, согласно определению, на $\underline{D}(t+\varepsilon,T)$, получим, что правая часть (12) лежит в

$$\left[\underline{D}(t+\varepsilon,T)+\int_t^{t+\varepsilon}U_\theta(r)\,dr\right]\dot{-}\int_t^{t+\varepsilon}V(r)\,dr.$$

В итоге получили, что $\forall t\in[0,T]$ и $\forall\varepsilon\in[0,T-t]$ выполняется включение

$$\underline{D}(t,T)\subset\left[\underline{D}(t+\varepsilon,T)+\int_t^{t+\varepsilon}U_\theta(r)\,dr\right]\dot{-}\int_t^{t+\varepsilon}V(r)\,dr. \qquad (13)$$

Аналогично из включения (13) следует, что множество $\underline{B}=\{(t,x):t\in[0,T],x\in\underline{D}(t,T)\}$ является u-стабильным мостом к рассматриваемой игре.

Теперь опишем алгоритм движения первого игрока для достижения победы. Поскольку $z_0\in\underline{D}(0,T)$, то $(0,z_0)\in\underline{B}$. Так как $\underline{B}$ – u-стабильный мост, то существует такое допустимое управление u_1, что при любом допустимом управлении второго игрока движение системы $z(t)$ удовлетворяет включению

$$z(t)\in\underline{D}(t,T),\ t\in[0,T]. \qquad (14)$$

Например, можно положить $u_1=u_1^e$ – экстремальная стратегия [6, с. 57] к $\underline{B}$, тогда в силу леммы 15.1 из [6, с. 62] включение (14) будет выполняться. Если поломка не происходит, тогда в силу леммы 3 и включения (14) выполняется включение $z(t)\in M$ при $t\in[0,T]$, то есть игра закончится в момент времени T и первый игрок победит.

Иначе, если поломка произошла в момент $\theta'\in[0,T]$, тогда первый игрок в момент времени θ' останавливается и устраняет поломку в течение времени $h'=\min(T-\theta',h)$, после чего продолжает движение. Из включения (14) следует, что в момент поломки выполняется включение

$z(\theta') \in \underline{D}(\theta', T)$, а согласно определению множества $\underline{D}(\theta', T)$ следует включение $z(\theta') \in D_{\theta'}(\theta', T)$, из которого в свою очередь следует включение $(\theta', z(\theta')) \in B_{\theta'}$. Так как $B_{\theta'}$ – u-стабильный мост, то при любом допустимом управлении первого игрока (любом, так как функция поломки $\varphi_{\theta'}(t) = 0$ при $t \in [\theta', \theta' + h']$) и любом допустимом управлении второго игрока движение системы $z(t)$ удовлетворяет включению

$$z(t) \in D_{\theta'}(t, T), \; t \in [\theta', \theta' + h']. \tag{15}$$

Тогда в силу леммы 3 и включения (15) выполняется включение $z(t) \in M$ при $t \in [\theta', \theta' + h']$, то есть пока первый игрок устраняет поломку, второму игроку никак не удастся нарушить включение $z(t) \in M$. Через время h' первый игрок продолжает движение, а фазовый вектор системы $z(\theta' + h') \in D_{\theta'}(\theta' + h', T)$, то $(\theta' + h', z(\theta' + h')) \in B_{\theta'}$. Так как $B_{\theta'}$ – u-стабильный мост, то существует такое допустимое управление u_2, что при любом допустимом управлении второго игрока, движение системы $z(t)$ удовлетворяет включению

$$z(t) \in D_{\theta'}(t, T), \; t \in [\theta' + h', T]. \tag{16}$$

Например, можно положить, $u_2 = u_2^e$ – экстремальная стратегия [6, с. 57] к $B_{\theta'}$, тогда в силу леммы 15.1 из [6, с. 62] включение (16) будет выполняться. Тогда в силу леммы 3 и включения (16) выполняется включение $z(t) \in M$ при $t \in [\theta' + h', T]$, то есть игра закончится в момент времени T и первый игрок победит, несмотря на поломку в момент времени θ'. □

Пример. Пусть задано число $m > 0$ и множество $M = m \cdot S$, положим, $a(t) \equiv a_{\max}$, $b(t) \equiv b_{\max}$ при $t \in [0, T]$, причем $a_{\max} > b_{\max}$. Альтернированный интеграл $W_\theta(t, T)$ при $t \in [0, T]$, согласно теореме из [10], равен

$$W_\theta(t,T) = S \cdot \left(m + \int_t^T \varphi_\theta(r) a_{\max} - b_{\max} dr \right) = S \cdot \begin{cases} m + a_{\max}(T - t - h) - b_{\max}(T - t) & t \le \theta \le \theta + h \le T \\ m + a_{\max}(\theta - t) - b_{\max}(T - t) & t \le \theta \le T \le \theta + h \\ m + a_{\max}(T - \theta - h) - b_{\max}(T - t) & \theta \le t \le \theta + h \le T \\ m - b_{\max}(T - t) & \theta \le t \le T \le \theta + h \\ m + a_{\max}(T - t) - b_{\max}(T - t) & \theta + h \le t \le T \end{cases},$$

причем $W_\theta(t, T) \ne \varnothing$, если выполняется следующее неравенство

$$m \ge \max_{t \le \tau \le T} \int_\tau^T \left(b_{\max} - \varphi_\theta(r) \cdot a_{\max} \right) dr .$$

Чтобы данное неравенство выполнялось для всех моментов поломки, возьмем максимум по времени поломки, получим

$$m \ge \max_{t \le \theta \le T} \max_{t \le \tau \le T} \int_\tau^T \left(b_{\max} - \varphi_\theta(r) \cdot a_{\max} \right) dr = b_{\max} h . \tag{17}$$

Отсюда множества $\underline{D}(t, T)$ и $D_\theta(t, T)$ при $t \in [0, T]$ и $\theta \in [0, T]$ равны

$$D_\theta(t,T) = S \cdot \begin{cases} m & t \le \theta - \dfrac{b_{\max} h}{a_{\max} - b_{\max}} \le \theta \le \theta + h \le T \\ m + a_{\max}(\theta - t) - b_{\max}(\theta + h - t) & \theta - \dfrac{b_{\max} h}{a_{\max} - b_{\max}} \le t \le \theta \le \theta + h \le T \\ m & t \le \theta \le T \le \theta + h \\ m - b_{\max}(\theta + h - t) & \theta \le t \le \theta + h \le T \\ m - b_{\max}(T - t) & \theta \le t \le T \le \theta + h \\ m & \theta + h \le t \le T \end{cases},$$

$$\underline{D}(t,T) = S \cdot \left(m - b_{\max} \min\left[T - t, h \right] \right).$$

Из неравенства (17) следует, что если $m \ge hb_{\max}$, тогда $D_\theta(t,T)$ и $\underline{D}(t,T)$ при $t\in[0,T]$ и $\theta\in[0,T]$ являются непустыми множествами, тогда первый игрок может построить экстремальные стратегии u_1^e, u_2^e, которые согласно [6, с. 62] равны

$$u_1^e(t,z(t)) = \begin{cases} \forall u(t)\in S & \|z(t)\| \le m - hb_{\max} \\ \dfrac{z(t)}{\|z(t)\|} & \|z(t)\| > m - hb_{\max} \end{cases}, \quad t\in[0,\theta'],$$

$$u_2^e(t,z(t)) = \begin{cases} \forall u(t)\in S & \|z(t)\| \le m \\ \dfrac{z(t)}{\|z(t)\|} & \|z(t)\| > m \end{cases}, \quad t\in[\theta'+h',T],$$

где θ' – момент поломки (если поломки не было, то $\theta'=T$), а время починки равно $h'=\min(T-\theta',h)$. При использовании пары управления $u=\left(u_1^e,u_2^e\right)$ первый игрок сможет достигнуть цели при любом допустимом управлении второго игрока и любом моменте поломки согласно теореме 1. Условия теоремы (6) и (7) очевидным образом выполняются для рассматриваемого примера, поскольку пересечение кругов с центром в начале координат равняется кругу с минимальным радиусом.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ухоботову Виктору Ивановичу, доктору физ.-мат. наук, зав. кафедрой теории управления и оптимизации ЧелГУ, за значимые замечания и важнейшие советы при проведении исследования и оформлении данной статьи.

Литература

1. Никольский, М.С. О задаче управления линейной системой с нарушениями / М.С. Никольский // Докл. АН СССР – 1986. – Т. 287, № 6. – С. 1317–1320.

2. Никольский, М.С. Об одной задаче управления с нарушениями в динамике / М.С. Никольский // Оптимальное управление и дифференциальные игры: сб. науч. работ. – Тр. МИАН СССР. – 1988. – Т. 185. – С. 181–186.

3. Никольский, М.С. Дифференциальная игра преследования с нарушением в динамике / М.С. Никольский, Чж. Пэн // Дифференциальные уравнения: сб. науч. работ. – 1994. – Т. 30, № 11. – С. 1923–1927.

4. Никольский, М.С. Управление линейными объектами с возможным нарушением в динамике / М.С. Никольский // Тр. ИММ УрО РАН: сб. науч. работ. – 1995. – Т. 3. – С. 132–146.

5. Понтрягин, Л.С. О линейных дифференциальных играх. 2 / Л.С. Понтрягин // Докл. АН СССР – 1967. – Т. 175, № 4. – С. 764–766.

6. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974 – 456 с.

7. Ухоботов, В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие / В.И. Ухоботов. – Изд-во Челябинского гос. ун-та, 2005. – 123 с.

8. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Изд-во Наука, 1976 – 543 с.

9. Aubin, J.-P. Set-valued analysis / J.-P. Aubin, H. Frankowska. – Birkhäuser, 1990 – 461 c.

10. Ухоботов, В. И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью / В.И. Ухоботов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, Вып. 5. – С. 196–204.

Поступила в редакцию 27 декабря 2021 г.

Сведения об авторе

Анисов Вадим Олегович – аспирант, математический факультет, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: dik_gamer@mail.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 2, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph220201

LINEAR DIFFERENTIAL HOLDING GAME WITH A BREAK

V.O. Anisov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: dik_gamer@mail.ru

Abstract. A linear simple motion constraint differential game is considered. This game is considered from the part of the first player, who needs to keep the state of the system in a given convex terminal set throughout the game, despite the possible glitch and control of the second player. A glitch is understood as an instantaneous stop of the first player at a previously unknown point in time; after a certain time he will eliminate the glitch and will continue his motion. The player control vectograms are n-dimensional convex compacts that depend on time. To construct a u-stable bridge, the second method of L.S. Pontryagin is used. This is how a multi-valued mapping is constructed on the basis of the alternating integral of L.S. Pontryagin. After that, it is proved that the constructed mapping is a u-stable bridge for the game under consideration if a number of conditions are satisfied. At the end of the article, a simple example on the plane is considered, where the vectors of the players are circles centered at the origin and with a constant radius, while the radius of the circle of the first player is strictly greater than the second. In this example, a u-stable bridge is built according to the method proposed in the article, and an extremal strategy is found for the first player on the constructed u-stable bridge.

Keywords: differential game, constraint, alternating integral, stable bridge.

References

1. Nikol'skij M.S. On the Problem of Control of a Linear System with Failures. *Sov. Math., Dokl*. 1986, Vol. 33, pp. 547–550.
2. Nikol'skii M.S. Ob odnoy zadache upravleniya s narusheniyami v dinamike (A Control Problem with Breakdowns in the Dynamics). *Optimal control and differential games, Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1988, Vol. 185, pp. 181–186.
3. Nikol'skii M.S., Peng Zh. A Differential Pursuit Game with a Breakdown in the Dynamics. *Differential Equations*, 1994, Vol. 30, no. 11, pp. 1775–1778.
4. Nikol'skii M.S. On Control Problems for Linear Objects with Disturbances in the Dynamics. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 1995, Vol. 3, pp. 132–146. (in Russ.).
5. Pontryagin L.S. Linear Differential Games. I, II. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1967, Vol. 175, no. 4, pp. 764–766. (in Russ.).
6. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional Differential Games). Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (in Russ.).
7. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* (The Method of One-Dimensional Design in Linear Differential Games with Integral Constraints: Textbook). Izd-vo Chelyabinskogo gos. universiteta Publ., 2005, 123 p. (in Russ.).
8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis). Moscow, Nauka Publ., 1976, 543 p. (in Russ.).
9. Aubin J.P., Frankowska H. *Set-valued analysis*. Birkhauser, Boston, 1990, 461 p.
10. Ukhobotov V.I. One Type Differential Games with Convex Goal. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2010, Vol. 16, no. 5, pp. 196–204. (in Russ.).

Received December 27, 2021

Information about the author

Anisov Vadim Olegovich is Postgraduate Student, Faculty of Mathematics, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: dik_gamer@mail.ru