УДК 519.834 DOI: 10.14529/mmph220202

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

В.И. Жуковский[1], Л.В. Жуковская[2], К.Н. Кудрявцев[3], В.Э. Романова[1]
[1] *МГУ им. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*
[2] *Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Российская Федерация*
[3] *Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
Email: kudriavtcevkn@susu.ru

Аннотация. К концу прошлого века в математической теории дифференциальных позиционных игр (ДПИ) утвердились четыре направления: бескоалиционный вариант ДПИ, кооперативный, иерархический и, наконец, наименее изученный коалиционный вариант ДПИ. В свою очередь, внутри коалиционного обычно выделяются игры с трансферабельными выигрышами (с побочными платежами, когда игроки в течение игры могут делиться своими выигрышами) и нетрансферабельными выигрышами (игры с побочными платежами, когда такие перераспределения отсутствуют по тем или иным причинам). Исследования коалиционных игр с побочными платежами сосредоточены и активно ведутся на факультетах прикладной математики и процессов управления Санкт-Петербургского госуниверситета и института математики и информационных технологий Петрозаводского госуниверситета (профессора Л.А. Петросян, В.В. Мазалов, Е.М. Парилина, А.Н. Реттиева и их многочисленные ученики). Однако побочные платежи не всегда присутствуют даже в экономических взаимодействиях, более того, побочные платежи могут быть вообще запрещены законодательно. Предпринятые нами в последние годы исследования равновесия угроз и контругроз (санкций и контрсанкций) в бескоалиционных дифференциальных играх позволяют, на наш взгляд, охватить и некоторые аспекты нетрансферабельного варианта коалиционных игр. Как раз вопросам внутренней и внешней устойчивости коалиций в классе ДПИ и посвящена настоящая статья. В ней выявлены коэффициентные ограничения в математической модели дифференциальной позиционной линейно-квадратичной игре шести лиц с двухкоалиционной структурой, при которых эта коалиционная структура внутренне и внешне устойчива.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу; равновесие угроз и контругроз; оптимальность по Парето; коалиция.

Введение

Как уже было упомянуто в аннотации, к концу прошлого века в теории позиционных дифференциальных игр (ПДИ) сформировались четыре направления исследований: бескоалиционный, кооперативный, иерархический и коалиционный варианты игры. Последний в свою очередь подразделяется на игры с побочными и без побочных платежей (трансферабельными и нетрансферабельными выигрышами). Изучение первого из них в России возглавляется известной санкт-петербургской научной школой по математической теории игр [1–4]; теория коалиционных ПДИ без побочных платежей только начинает своё становление на базе равновесия угроз и контругроз и группируется вокруг кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ [5–8]. В настоящей статье эти исследования продолжаются для ДПИ шести лиц с двухкоалиционной структурой $\{K_1=\{1,2,3\}, K_2=\{4,5,6\}\}$.

Одновременно мы также предлагаем аналогичный поход к построению оптимальных (в формализованном далее смысле!) решений в коалиционных ДПИ, базирующийся на идеях принципа равновесности по Нэшу и метода динамического программирования Беллмана.

Напомним, что в 1949 году двадцатиоднолетний аспирант Принстонского университета Джон Форбс Нэш (мл) предложил в докторской диссертации понятие решения бескоалиционной игры, в последующем названного *равновесием по Нэшу (РН).* Оно, во-первых, сыграло неоценимую роль в становлении математической экономики, социологии, системного анализа, военных науках; во-вторых, ровно через 45 лет (1994 г.) Джону Нэшу (совместно с Харшаньи и Зельтоном) присуждена Нобелевская премия «за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр»; в-третьих, открывая сейчас почти любой современный журнал по теории игр, исследованию операций, системному анализу и по математической экономике, почти наверняка мы встретимся с работами, затрагивающими те или иные вопросы, связанные с равновесием по Нэшу (РН). Однако «there are spots on the sun». Сюда относятся внутренняя и внешняя неустойчивость множества РН, неустойчивость к отклонению от него двух и более игроков (РН устойчиво к отклонению только одного), РН может не существовать, «улучшаемость», отсутствие эквивалентности и взаимозаменяемости и т.д. В этих случаях авторы видят [9] два выхода. Во-первых, ограничиться лишь математическими моделями, свободными от некоторых из перечисленных (и не перечисленных!) негативных свойств. Во-вторых, вводить новые понятия равновесия, отличные от РН. Здесь, по нашему мнению, перспективными являются равновесие угроз и контругроз [5, 6] и равновесие по Бержу [7, 8]. Ещё раз подчеркнём, что в настоящей статье мы не стремимся подвергнуть РН критике, но используем идею Джона Нэша уже для формализации паретовского решения *коалиционных* ДПИ.

Рассмотрим бескоалиционную игру в нормальной форме, заданную упорядоченной тройкой:

$$\Gamma = \left\langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle.$$

Здесь $\mathbb{N} = \{1,...,N\}$ – множество порядковых номеров игроков, множество $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ стратегий x_i игроков. Выбор $x_i \in X_i$ происходит одновременно всеми игроками, в результате образуется *ситуация* $x = (x_1,...,x_N) \in X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Сами интересы (цели) игроков определяются значениями (*выигрышами*) заданных функций выигрыша $f_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$. При этом каждый из игроков стремится возможно *увеличить* свой выигрыш.

Определение 1.1 Пара $(x^e, f^e = f(x^e)) \in X \times \mathbb{R}^N$ называется *равновесием по Нэшу* игры *Γ*, если имеет место *N* равенств

$$\max_{x_i\in X_i} f_i(x^e \,\|\, x_i) = f_i(x^e) \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

где использованы общепринятые в теории игр обозначения $(x^e \,\|\, x_i) = (x_1^e,...,x_{i-i}^e, x_i, x_{i+1}^e,...,x_N^e)$.

Из (1) сразу следуют три важнейших свойства РН: *во-первых, РН устойчиво* к отклонению отдельного игрока, *во-вторых*, РН присуще свойство *индивидуальной рациональности*, т.е.

$$f_i(x^e) \ge \max_{x_i\in X_i} \min_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) \quad (i \in N),$$

(здесь уже $-i \in \mathbb{N} \setminus \{i\} = \{1,...,i-1,i+1,...,N\}$), *в-третьих*, x^e совпадает с *седловой точкой* $(x_1^e, x_2^e) \in X_1 \times X_2$ в случае антагонистического варианта *Γ*, (где уже $\mathbb{N} = \{1,2\}$ и $f_1(x) = -f_2(x) = f(x)$), именно $\max_{x_1\in X_1} f(x_1, x_2^e) = f_1(x_1^e, x_2^e) = \min_{x_2\in X_2} f(x_1^e, x_2)$. Кроме того, определение 1.1 сразу отвечает на два вопроса: как каждому игроку $i \in \mathbb{N}$ поступать в игре *Γ* (ответ: следовать $x_i^e \in X_i$) и какого выигрыша он добивается (ответ: $f_i(x^e)$).

Теперь игре *Γ* поставим в соответствие *N-критериальную задачу*

$$\Gamma_\upsilon = \left\langle X, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle.$$

Здесь уже множество X *альтернатив* x совпадает с множеством ситуаций *игры Γ, а критерий* $f_i(x)$ – со скалярной функцией выигрыша $f_i(x)$ игрока $i \in \mathbb{N}$.

В 1909 г. итальянский социолог, экономист (а также богатый наследник) Вильфредо Парето предложил в качестве оптимального решения задачи Γ_υ использовать максимальную (впоследствии названную «по Парето») альтернативу $x^p \in X$.

Определение 1.2 [9–11]. Альтернатива $x^p \in X$ называется *максимальной по Парето* в задаче Γ_υ, если при любой альтернативе $x \in X$ несовместна система N неравенств $f_i(x) \ge f_i(x^p)$ □□ $(i \in \mathbb{N})$, из которых хотя бы одно строгое; при этом пару

$(x^p, f^p = f(x^p)\ i \in \mathbb{N}) \in X \times \mathbb{R}^N$ *называют максимумом по Парето* в задаче Γ_υ; напомним, что $f = (f_1,..., f_N) \in \mathbb{R}^N$.

Из определения 1.2 сразу следует, что при отходе от альтернативы x^p нельзя одновременно увеличить компоненты всех критериев $f_i(x^p)$ $(i \in \mathbb{N})$, а также увеличение хотя бы одной компоненты $f_i(x^p)$ вектора $f(x^p)$ неизбежно влечёт уменьшение хотя бы одной из оставшихся. Очевидна, наконец, лемма Карлина [12]:

Свойство 1.1. Если при каких-либо постоянных $\alpha_i > 0$ $(i \in \mathbb{N})$ справедливо равенство

$$\max_{x \in X} \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i f_i(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i f_i(x^p), \tag{2}$$

то альтернатива x^p – максимальна по Парето в задаче Γ_υ.

Далее операцию (построения максимума по Парето), диктуемую (2), будем обозначать

$$\underset{x \in X}{MAX}{}^p\ f(x) = f(x^p) = f^p, \text{ т. е.}$$

$$\underset{x \in X}{\mathrm{MAX}}{}^p\ f(x) = \max_{x \in X} \alpha' f(x) = \alpha' f(x^p) \tag{3}$$

для какого-либо постоянного *N*-вектора $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_N)$, $\alpha_i > 0$ $(i \in \mathbb{N})$; напоминаем, что штрих сверху означает операцию транспонирования (α' – *N*-вектор-строка).

2. Основные понятия теории коалиционных игр

Перейдем к возможному коалиционному варианту игры *Г*. Здесь прежде всего предполагаем, что на множестве $\mathbb{N}$ задана *коалиционная структура*, т. е. разбиение $\mathbb{N}$ на попарно непересекающиеся подмножества (коалиции). Для Г мы ограничивались двумя коалициями $K_1 = \{1,2,3\}$ и $K_2 = \{4,5,6\}$; коалиционная структура удовлетворяет условиям:

$$\mathbb{N} = K_1 \cup K_2 \text{ и } K_1 \cap K_2 = \varnothing.$$

При этом отдельные коалиции K_l $(l = 1,2)$ имеют возможность на «коалиционных совещаниях» сообща выбирать свою стратегию $x_{K_l} = \{x_i \mid i \in K_l\} \in X_{K_l} = \prod_{i \in K_l} X_i$ (всё множество таких стратегий x_{K_l} обозначим X_{K_l}). Тогда любая ситуация $x \in X$ в игре *Г* представима $x = (x_{K_1}, x_{K_2})$, векторную функцию выигрыша коалиции K_l обозначаем $f_{K_l}(x_{K_1}, x_{K_2}) = (f_m(x_{K_1}, x_{K_2}) \mid m \in K_l)$ $(l = 1,2)$, поэтому *N* вектор-функции выигрыша игроков (векторный критерий задачи Γ_υ) будет $f(x) = f(x_{K_1}, x_{K_2}) = (f_{K_1}(x_{K_1}, x_{K_2}), f_{K_2}(x_{K_1}, x_{K_2}))$.

В результате переходим от исходного бескоалиционного варианта игры *Г* к игре коалиционной

$$G = \left\langle \mathbb{N} = \{K_1 \cup K_2\} \{K_l\}_{l=1,2}, \left\{X_{K_l}\right\}_{l=1,2}, \left\{f_{K_l}(x_{K_1}, x_{K_2})\right\}_{l=1,2} \right\rangle.$$

Как уже упоминалось, игроки отдельной коалиции на своём «коалиционном совещании» совместно выбирают стратегию коалиции, выполняя два требования: индивидуальной и коллективной рациональности.

Обратимся к требованию *индивидуальной рациональности*, т. е. чтобы достигаемый в игре *G* выигрыш *i*-го игрока в выбранной ситуации x^P был бы не меньше его максиминного, именно,

$$f_i(x^P) \geq \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) = \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i^g, x_{-i}) = f_i^g \leq f_i(x_i^g, x_{-i}) \quad \forall x_{-i} \in X_{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

где, напомним, $-i = \mathbb{N} \setminus i = \{1,...,i-1,i+1,...,N\}$, $x_{-i} = (x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_N) \in X_{-i} \in \prod_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} X_j$.

Заметим, что для рассматриваемых в настоящей статье играх такие максимины не существуют [6] и поэтому условия индивидуальной рациональности мы не учитываем.

Перейдем к требованию *коллективной рациональности*. Для членов коалиций K_l оно сводится к максимальности по Парето (по отношению к остальным партнёрам по коалиции K_l), именно,

$$\underset{x_{K_l}\in X_{K_l}}{\mathrm{MAX}}{}^{P}\, f_{K_l}(x_{K_1},x_{K_2}^P)=f_{K_l}(x_{K_1}^P,x_{K_2}^P)\ \ (l=1,2).$$

Таким образом, приходим к следующему понятию.

Определение 2.1. Набор стратегий $x^P=(x_{K_1}^P,x_{K_2}^P)\in X=X_{K_1}\times X_{K_2}$ назовём *коалиционно Парето-оптимальным* (КПО) для игры *G*, если

$$\begin{cases}\underset{x_{K_1}\in X_{K_1}}{\mathrm{MAX}}{}^{P}\, f_{K_1}(x_{K_1},x_{K_2}^P)=f_{K_1}(x_{K_1}^P,x_{K_2}^P),\\ \underset{x_{K_2}\in X_{K_2}}{\mathrm{MAX}}{}^{P}\, f_{K_2}(x_{K_1}^P,x_{K_2})=f_{K_2}(x_{K_1}^P,x_{K_2}^P).\end{cases}\tag{4}$$

Нетрудно видеть, что (4) является модификацией (1) для случая одноэлементных коалиций в *Г* (операция $\max\limits_{x_i\in X_i}$ из (1) заменена на максимизацию по Парето $\underset{x_{K_i}\in X_{K_i}}{\mathrm{MAX}}{}^{P}$ из (3)), а сами равенства (4) поэтому являются модификацией РН (чем и вызвано название настоящей статьи). Естественно тогда, что перечисленные выше «пятна на солнце», характерные для РН, присущи и КПО.

Вспоминая о бурном потоке публикаций (во второй половине прошлого века) по РН, вызванных докторской диссертацией Джона Нэша и последующим звездопадом Нобелевских премий по экономике (но базирующихся на проблемах математической теории игр), по нашему мнению, определение 2.1 не менее перспективно для изучения, чем определение 1.1. Однако далее мы сконцентрируемся на вопросах внутренней и внешней устойчивости коалиций в ПДИ.

3. Внутренняя и внешняя устойчивость коалиции

Здесь считается, что в коалиционной игре *Г* найдена определённая в (4) коалиционно Парето-оптимальная (КПО) ситуация $(x_{K_1}^P,x_{K_2}^P)=x^P$ и именно эта ситуация выбрана игроками для практического использования. Обоснованием такого выбора, например, для коалиции K_1 является, во первых, *максимальность по Парето* $x_{K_1}^P$ в задаче $G_1=\left\langle X_{K_1},f_{K_1}(x_{K_1},x_{K_2}^P)\right\rangle$ из (4) (ведь игроки из K_1 стремятся к возможно большим выигрышам для каждого, а в многокритериальной задаче G_1 именно $x_{K_1}^P$ доставляет максимум по Парето для $f_{K_1}(x_{K_1},x_{K_2}^P)$).

Во-вторых, требование *внутренней устойчивости* K_1: будем считать, что коалиция K_1 внутренне устойчива, если ни у одного из её игроков *не возникает желание покинуть* K_1: *либо перейти в коалицию* K_2, либо образовать новую третью коалицию, состоящую лишь из одного «перебежчика». «Обнуление» такого «предательства» достигается, если хотя бы для одного из оставшихся в K_1 игрока появляется возможность «наказать перебежчика». Формально определим процесс наказания следующим образом.

Будем считать, что игрок 1 обладает *угрозой на внутреннюю устойчивость* K_1, если у него имеется стратегия $x_1^T\in X_1$ такая, что

$$f_1(x_1^T,x_2^P,x_3^P,x_4^P)>f_1(x_{K_1}^P,x_{K_2}^P).\tag{5}$$

В ответ на такую угрозу (см. (5)) у одного из оставшихся в K_1, например, у игрока 2 имеется *контругроза*, если у него существует стратегия $x_2^C\in X_2$, для которой сразу выполнены два строгих неравенства:

$$f_1(x_1^T,x_2^C,x_3^P,x_4^P)<f_1(x_1^P,x_2^P),\tag{6}$$

$$f_2(x_1^T,x_2^C,x_3^P,x_4^P)>\max_{x_1\in X_1}f_1(x_1,x_2^P).\tag{7}$$

Первое из них (именно (6)) «обнуляет» действие угрозы – сводит выигрыш «угрожающего» к меньшему, чем был первоначально $f_1(x^P) = f_1(x^P_{K_1}, x^P_{K_2})$. Второе неравенство (см. (7)) даже «подталкивает» второго на использование x_2^C, ибо в результате игрок 2 достигает самого большего выигрыша, о котором он может только мечтать. Аналогично определяется контругроза игрока 3 в ответ на угрозу первого на внутреннюю устойчивую K_1, а также реакция двух оставшихся игроков на желание одного из коалиции K_1 покинуть эту коалицию.

Определение 3.1. Коалицию *K* называем *внутренне устойчивой*, если в ответ на возможность любого члена коалиции *K* покинуть *K*, у хотя бы одного из оставшихся имеется контругроза (вида (6) и (7)).

Заметим, отсутствие угроз приводит, естественно, к ненужности и контругроз.

Перейдём к *внешней устойчивости коалиции* (например, K_1 в игре *Г*). Будем считать, что нежелание какого-либо игрока из K_2 выйти из коалиции K_2 и присоединиться в K_1 характеризует внешнюю устойчивость K_1. Очевидно также, что внутренняя устойчивость K_2 «обеспечивает» внешнюю устойчивость K_1 и обратно.

Таким образом, внутренняя устойчивость каждой коалиции в коалиционной структуре гарантирует внутреннюю и внешнюю устойчивость, что в свою очередь приводит к устойчивости самой коалиционной структуры, т.е. к нежеланию нарушать сложившееся разбиение игроков на попарно непересекающиеся подмножества.

Наконец, заметим, что неравенств вида (6) и (7) для рассматриваемой далее в разделе 4 ПДИ мы добиваемся специальными коэффициентными ограничениями на функции выигрыша игроков из K_1.

Дальнейший материал статьи посвящён построению явного вида выделенных (определением 2.1) КПО для достаточно общего класса ПДИ.

4. Дифференциальная линейно-квадратичная игра шести лиц

Как принято в теории игр, такая математическая модель может задаваться упорядоченной пятёркой.

$$\varGamma_D = \left\langle \mathbb{N}, \left\{K_1 = \{1,2,3\}, K_2 = \{4,5,6\}\right\}, \Sigma_x, \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{I_i(U,t_0,x_0)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle, \qquad (8)$$

где $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6\}$ – множество порядковых номеров игроков, задана коалиционная структура (напоминаем, за счёт разбиения $\mathbb{N}$ на попарно непересекающиеся подмножества: $\mathbb{N} = K_1 \cup K_2 \wedge K_1 \cap K_2 = \varnothing$); управляемая динамическая система $\sum_x$ линейна (по x и $u_i (i\in\mathbb{N})$):

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i, \; x(t_0) = x_0$$

причём момент окончания игры $\vartheta > 0$ «заморожен» априори; тогда *время продолжительности* игры $t\in[t_0,\vartheta]$, здесь $0 \le t_0 \le t \le \vartheta$; $A(t)$ – непрерывная на $[0,\vartheta]$ $n\times n$-матрица (обозначим этот факт $A(\cdot)\in C_{n\times n}[0,\vartheta]$); $x\in\mathbb{R}^n$ – фазовый *n*-вектор; пары $(t,x)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n$ – позиция игры, начальная позиция (t_0,x_0); управляющее воздействие *i*-го игрока $u_i\in\mathbb{R}^n (i\in\mathbb{N})$, так как $u = (u_1,...,u_N)\in\mathbb{R}^{Nn}$, то управляющие воздействия коалиций $u_{K_1} = (u_1,u_2,u_3)$ и $u_{K_2} = (u_4,u_5,u_6)$, поэтому $u = (u_{K_1}, u_{K_2})$; множество стратегий игрока $i\in\mathbb{N}$, кроме того, согласно [13],

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x \mid \forall Q_i(\cdot)\in C_{n\times n}[0,\vartheta]\},$$

ситуация $U = (U_1,...,U_6)\in\mathfrak{A} = \prod_{i\in\mathbb{N}}\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_{K_l} = \prod_{j\in K_j}\mathfrak{A}_j \; (l=1,2)$; динамика игры (8) проявляется в том, что каждый игрок, исходя из собственных интересов (см. ниже (9)), выбирает свою стратегию $U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x$ (т. е. использует «свою» матрицу $Q_i(\cdot)\in C_{n\times n}[t_0,\vartheta]$); затем игроки совместно определяют решение $x(t)$, $t\in\left[t_0,\vartheta\right]$, системы линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными по t коэффициентами

$$\dot{x}(t) = [A(t) + \sum_{i\in\mathbb{N}} Q_i(t)]x \quad x(t_0) = x_0.$$

Потом формируют *реализации* выбранных ими стратегий $u_i[t] = u_i(t, x(t)) = Q(t)x(t)$ $(i \in \mathbb{N})$; заметим, что тогда *n*-вектора $u_i[t]$ непрерывны на $[t_0, \vartheta]$. На непрерывных парах $(x(t), u[t]) = (u_1[t], ..., u_6[t])$ априори задана *функция выигрыша* *i*-го игрока в виде квадратичного функционала

$$I_i(U, t_0, x_0) = x'(\vartheta)\overline{C_i}x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} u'_j[t]\overline{D_{ij}}u_j[t]\right)dt \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{9}$$

причем штрих сверху означает операцию транспонирования; не ограничивая общности, считаем априори заданные постоянные $n\times n$-матрицы $\overline{C_i}$, $\overline{D_{ij}}$ симметричными. Заметим, что первые слагаемые в (9) называют *терминальными*, вторые – *интегральными*, а значение (9) – *выигрышем* игрока *i* в игре Γ_D. *На содержательном уровне* игроки, каждый на своем «коалиционном совещании», выбирают коллегиально свои стратегии; чтобы компоненты их трехкоординатных выигрышей $I_{K_l} = (I_r \mid r \in K_l)$ $(l = 1,2)$ были возможно больше (и удовлетворяли условию индивидуальной рациональности). При выборе оптимального решения базируемся на определении 2.1, т. е. на коалиционной Парето-максимальной ситуации.

Предварительно упростим управляемую систему из Γ_D с помощью замены $y = X^{-1}(t)x$, где $X(t)$ – фундаментальная $n\times n$-матрица решений системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ X(\vartheta) = E_n$ (E_n – единичная $n\times n$-матрица). В результате система $\sum_x$ переходит в $\sum_y$:

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i\,, \quad y(t_0) = X^{-1}(t_0)x_0,$$

множество стратегий *i*-го игрока $\overline{\mathfrak{A}_i}$ в

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t, y) = Q_i(t)y \mid \forall Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0, \vartheta]\},$$

функция выигрыша *i*-го игрока $I_i(U, t_0, y_0)$ в

$$\mathcal{I}_i(U_i, t_0, y_0) = y'(\vartheta)C_i y(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} u'_j[t]D_{ij}u_j[t]\right)dt\,, \tag{10}$$

где постоянные $n\times n$-матрицы C_i, D_{ij} симметричны.

В результате исходная игра (8) приводится к виду

$$\Gamma_d = \left\langle \mathbb{N}, \{K_1, K_2\}, \Sigma_y, \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\mathcal{I}_i(U, t_0, y_0)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle. \tag{11}$$

Возможная *экономическая интерпретация* (11). Предположим, что существует промышленный кластер, состоящий из шести предприятий, входящих, помимо того, в два объединения (или группы). Как правило, цель предприятия (или организации) – одновременное уменьшение расходов (затрат на выпуск продукции) (при $C_i < 0$), а также увеличение внутренних инвестиций (при $D_{ii} > 0$) в собственное производство. Дополнительным условием являются противоположные интересы остальных участников кластера (если $D_{ij} < 0$ $(i \neq j)$).

В связи с этим далее предполагается, что

$$C_i < 0,\ \ D_{ii} > 0,\ \ D_{ij} < 0 \quad (i, j \in \mathbb{N};\ j \neq i). \tag{12}$$

Перейдём к использованию определения 2.1, но уже для дифференциальной игры (11). Именно, введём для каждой коалиции K_1 и K_2 множество её стратегий $U_{K_l} \in \mathfrak{A}_{K_l} = \prod_{r\in K_l} \mathfrak{A}_r$ $(l = 1,2)$, кроме того, используем трёхмерный функционал её выигрышей, который с учётом $U = (U_{K_1}, U_{K_2})$ представим в виде $\mathcal{I}_{K_l}(\mathcal{I}_j \mid j \in K_l)$ $(l = 1,2)$. Тогда

$$\mathcal{I}_{K_1}(U,t_0,y_0)=(\mathcal{I}_1(U_{K_1},U_{K_2},t_0,y_0),\mathcal{I}_2(U_{K_1},U_{K_2},t_0,y_0),\mathcal{I}_3(U_{K_1},U_{K_2},t_0,y_0))$$

и

$$\mathcal{I}_{K_2}(U,t_0,y_0)=(\mathcal{I}_4(U_{K_1},U_{K_2},t_0,y_0),\mathcal{I}_5(U_{K_1},U_{K_2},t_0,y_0),\mathcal{I}_6(U_{K_1},U_{K_2},t_0,y_0)).$$

Определение 4.1. Пару $(U^P,\mathcal{I}^P)=\left(U_{K_1}^P,U_{K_2}^P;\mathcal{I}_{K_1}(U^P,t_0,y_0),\mathcal{I}_{K_2}(U^P,t_0,y_0)\right)\in\mathfrak{A}\times\mathbb{R}^6$ назовём *коалиционно Парето-оптимальным решением* (КПО) игры Γ_d, если *при любых начальных позициях* $(t_0,y_0)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$, $y_0\neq 0_n$,

$$\begin{cases}\underset{U_{K_1}\in\mathfrak{A}_{K_1}}{\mathrm{MAX}}{}^P\,\mathcal{I}_{K_1}(U_{K_1},U_{K_2}^P,t_0,y_0)=\mathcal{I}_{K_1}(U^P,t_0,y_0),\\ \underset{U_{K_2}\in\mathfrak{A}_{K_2}}{\mathrm{MAX}}{}^P\,\mathcal{I}_{K_2}(U_{K_1}^P,U_{K_2},t_0,y_0)=\mathcal{I}_{K_2}(U^P,t_0,y_0),\end{cases}$$

где, например, $\underset{U_{K_1}\in\mathfrak{A}_{K_1}}{\mathrm{MAX}}{}^P\,\mathcal{I}_{K_1}(U_{K_1},U_{K_2}^P,t_0,y_0)$ означает максимальность по Парето на множестве $\mathfrak{A}_{K_1}$ трёхмерного функционала $\mathcal{I}_{K_1}(U_{K_1},U_{K_2}^P,t_0,y_0)$. В этой статье максимум (по Парето) будем реализовывать, следуя свойству 1.1 (с нахождением скалярного максимума линейной свёртки трёх компонент $\mathcal{I}_{K_1}(U_{K_1},U_{K_2}^P,t_0,y_0)$ с положительными коэффициентами).

5. Вспомогательные сведения из теории матриц и квадратичных форм

Далее для постоянной симметричной $n\times n$-матрицы $D>0\ (<0)$ означает определённую положительность (отрицательность) квадратичной формы $x'Dx$, где $x\in\mathbb{R}^n$.

Утверждение 5.1. [14, с. 108]. Имеют место две цепочки импликаций:

а) $D>0\Rightarrow 0\le\lambda x'x\le x'Dx\le\Lambda x'x \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$, b) $D<0\Rightarrow-\Lambda x'x\le x'Dx\le-\lambda x'x \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$,

здесь уже $\lambda\left(-\Lambda\right)$ – наименьший и $\Lambda\left(-\lambda\right)$ – наибольший корни уравнения $\det[D-\lambda E_n]=0$; причем $0<\lambda\le\Lambda$, E_n – единичная $n\times n$-матрица.

Замечание 5.1. Неоднократно используем управляющее воздействие вида $u_i=\alpha e_n'x$, e_n – n-вектор-столбец со всеми компонентами, равными плюс единице, тогда $e_n'e_n=n$, число $\alpha=\mathrm{const}>0$.

Утверждение 5.2. Если $D>0$, то для Λ – наибольшего из корней $\det[D-\lambda E_n]=0$ будет:

a) [14]: $\Lambda<nM$ – где M максимум модулей элементов d_{ij} матрицы $D=(d_{ij})$;

b) [15]: $\Lambda<\min\limits_{i=1,\dots,n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|d_{ij}\right|$.

Утверждение 5.3. Справедлива эквиваленция $D<0\Leftrightarrow(-1)D=-D>0$ (т. е. умножаем все элементы постоянной симметричной $n\times n$-матрицы D на минус единицу) и тогда $-\Lambda>0$, наибольший из корней уравнения $\det[-D-\lambda E_n]=0$, совпадает с наименьшим из корней уравнения $\det[D-\lambda E_n]=0$.

Замечание 5.2. Согласно утверждению 5.3 для оценки наименьшего из корней $\det[D-\lambda E_n]=0$ достаточно оценить наибольший из корней характеристического уравнения $\det[-D-\lambda E_n]=0$.

Утверждение 5.4. (аналог лемм 4.1 и 4.2 из [7]) Справедливы импликации: где $i,j\in\mathbb{N},\ \ j\neq i$ и

а) $D_{ii}>0\Rightarrow$ для каждого $U_{-i}^*\in\mathfrak{A}_{-i}$ и $U_i^*\in\mathfrak{A}_i$ существует «своя» постоянная $\alpha_i^*(U_i^*,U_{-i}^*,t_0,y_0)>0,$ при которой для всех постоянных $\alpha>\alpha_i^*(U_{-i}^*,U_i^*)$ при стратегии $\overline{U_i}\div\alpha e_n'y$ выполняется строгое неравенство

$$\mathcal{I}_i\left(\overline{U_i},U_{-i}^*,t_0,y_0\right)>\mathcal{I}_i\left(U_i^*,U_{-i}^*,t_0,y_0\right).$$

Напомним, что функция выигрыша $\mathcal{I}_i$ определена в (10), а $-i = \mathbb{N} \setminus \{i\} = \{1, 2, ..., i-1, i+1, ..., N\}$;

b) $D_{ij} < 0$ $(j \neq i) \Rightarrow$ при любых $U_j^* \in \mathfrak{A}_j$ и $U_{-j}^* \in \mathfrak{A}_{-j}$ существует «своя» постоянная $\alpha_j^*\left(U_j^*, U_{-j}^*, t_0, y_0\right) > 0$ такая, что $\forall \alpha > \alpha_j^*\left(U_j^*, U_{-j}^*\right)$ при стратегии $\overline{U_j} \div \alpha e_n' y$ будет

$$\mathcal{I}_j\left(\overline{U_j}, U_{-j}^*, t_0, y_0\right) < \mathcal{I}_j\left(U_j^*, U_{-j}^*, t_0, y_0\right).$$

Наконец, в [5, 6] установлена справедливость следующих утверждений.

Теорема 5.1. В игре Γ_d при выполнении (12):

a) не существует равновесия по Нэшу;

b) не существует $\min\limits_{U_i \in \mathfrak{A}_i} \mathcal{I}_i\left(U_i, U_{-i}, t_0, y_0\right)$, и как раз поэтому условие индивидуальной рациональности в игре Γ_d можно не учитывать (в определении оптимального решения);

c) если кроме (12) выполняются ограничения на корни соответствующих характеристических уравнений $\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}$, то в игре (11) существует [5] паретовское равновесие угроз и контругроз.

В заключение перейдём к центральному результату настоящей статьи: построению явного вида КПО-решения для коалиционной игры (11). При этом будем основываться на свойстве 1.1 и методе динамического программирования Беллмана. Понадобится также дополнительно решить одну статическую *N*-критериальную задачу, с которой начинается следующий параграф.

6. Максимальные по Парето ситуации и паретовские выигрыши

Прежде всего приведем вспомогательные утверждения (см. далее лемму 6.1).

Рассмотрим 6-критериальную *статическую* задачу

$$\Gamma_6 = \left\langle \mathbb{R}^{6n}, \{f_i(u) = u_1' D_{i1} u_1 + ... + u_6' D_{i6} u_6\}_{i=1,...,6} \right\rangle,$$

в которой ЛПР выбирает альтернативу $u = (u_1, ..., u_6) \in \mathbb{R}^{6n}$ с целью достичь одновременно возможно больших значений всех 6 компонент векторного критерия $f(u) = \left(f_1(u), ..., f_6(u)\right)$. Аналогом определения 1.2 здесь будет: альтернатива u^P *максимальна по Парето* в Γ_6, если при $\forall u \in \mathbb{R}^{6n}$ несовместна система неравенств $f_i(u) \geq f_i(u^P)$ $(i = 1, ..., 6)$, из которых хотя бы одно строгое.

Ниже используем аналог свойства 1.1.

Лемма 6.1. Если в задаче Γ_6 симметричны постоянные $n \times n$-матрицы D_{ij}, а положительные числа Λ_{ii}, Λ_{ij} $(i, j = 1, ..., 6, i \neq j)$ таковы, что

$$D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0 \text{ (при } i \neq j\text{)},\ \Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21},\ \Lambda_{44}\Lambda_{55} < \Lambda_{45}\Lambda_{54},$$

то при постоянных α_i^* $(i \in \mathbb{N})$ таких, что

$$\alpha_1^* = 1,\ \alpha_2^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right),\ \alpha_3^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{13} + \alpha_2^*\Lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right),$$

$$\alpha_4^* = 1,\ \alpha_5^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{44}}{\Lambda_{54}} + \frac{\Lambda_{45}}{\Lambda_{55}}\right),\ \alpha_6^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{46} + \alpha_5^*\Lambda_{45}}{\Lambda_{66}}\right), \tag{13}$$

квадратичные формы

$$f(u) = \alpha_1^* f_1(u) + \alpha_2^* f_2(u) + \alpha_3^* f_3(u) + \alpha_4^* f_4(u) + \alpha_5^* f_5(u) + \alpha_6^* f_6(u) = u_1' D_1(\alpha^*) u_1 + ... + u_6' D_6(\alpha^*) u_6$$

становятся определённо отрицательными; здесь

$$D_i(\alpha^*) = \alpha_1^* D_{1i} + \alpha_2^* D_{2i} + \alpha_3^* D_{3i} + \alpha_4^* D_{4i} + \alpha_5^* D_{5i} + \alpha_6^* D_{6i},$$

кроме того, $\Lambda_{ii} > 0$ – наибольший корень характеристического уравнения $\Delta_{ii}(\Lambda) = \det\left[D_{ii} - \Lambda E_n\right] = 0$, соответственно, $-\Lambda_{ij} < 0$ – наибольший (по абсолютной величине) корень уравнения $\delta_{ij}(\Lambda) = \det\left[D_{ij} - \Lambda E_n\right] = 0$ ($i, j \in \{1,...,6\}$, $j \neq i$), также напомним, что E_n – единичная 6×6-матрица.

Доказательство. В силу симметричности $n \times n$-матриц $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ ($i, j \in \mathbb{N}$; $j \neq i$), используемых в задаче Γ_6, корни характеристических уравнений $\Delta_{ii}(\Lambda) = 0$ и $\delta_{ij}(\Lambda) = 0$ вещественны, кроме того, $\Lambda_{ii} > 0$, $-\Lambda_{ij} < 0$ ($i, j \in \mathbb{N}$, $j \neq i$). Так как выполнены оценки $u_i' D_{ii} u_i \leq \Lambda_{ii} u_i' u_i$ и $u_j D_{ij} u_j' \leq -\Lambda_{ij} u_j' u_j$ (утверждение 5.1), то с учётом (см. ниже) табл. 6.1

$$f(u) = \alpha_1^* f_1(u) + \alpha_2^* f_2(u) + ... + \alpha_6^* f_6(u) =$$
$$= u_1' \left[\alpha_1^* D_{11} + \alpha_2^* D_{21} + ... + \alpha_6^* D_{61}\right] u_1 + ... + u_6' \left[\alpha_1^* D_{16} + \alpha_2^* D_{26} + ... + \alpha_6^* D_{66}\right] u_6 \leq$$
$$\leq \left[\alpha_1^* \Lambda_{11} + \alpha_2^* (-\Lambda_{21}) + ... + \alpha_6^* (-\Lambda_{61})\right] u_1' u_1 + ... + \left[\alpha_1^* (-\Lambda_{16}) + \alpha_2^* (-\Lambda_{26}) + ... + \alpha_6^* \Lambda_{66}\right] u_6' u_6 .$$

Заметим, что для проверки приведённых ниже формул удобнее воспользоваться следующими табл. 6.1 и 6.2.

Таблица 6.1

α_1^*	$\mathcal{I}_1$	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}
α_2^*	$\mathcal{I}_2$	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}
α_3^*	$\mathcal{I}_3$	D_{31}	D_{32}	D_{33}	D_{34}	D_{35}	D_{36}
α_4^*	$\mathcal{I}_4$	D_{41}	D_{42}	D_{43}	D_{44}	D_{45}	D_{46}
α_5^*	$\mathcal{I}_5$	D_{51}	D_{52}	D_{53}	D_{54}	D_{55}	D_{56}
α_6^*	$\mathcal{I}_6$	D_{61}	D_{62}	D_{63}	D_{64}	D_{65}	D_{66}

Здесь и далее компоненты вектор-столбца $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*, \alpha_5^*, \alpha_6^*)$, где α_i^* заданы в (13).

В связи с тем, что $u_i' D_{ii} u_i \leq \Lambda_{ii} u_i' u_i$ и $u_j' D_{ij} u_j \leq -\Lambda_{ij} \left\|u_j\right\|^2$, а также с учётом табл. 6.2 скалярная функция $f(u) < 0$ $\forall u \in \mathbb{R}^{6n}$, $u \neq 0_{6n}$, если выполнены все неравенства из табл. 6.2.

Таблица 6.2

$\Lambda_{11}\alpha_1^* - \Lambda_{21}\alpha_2^* - \Lambda_{31}\alpha_3^* - \Lambda_{41}\alpha_4^* - \Lambda_{51}\alpha_5^* - \Lambda_{61}\alpha_6^* < 0$
$-\Lambda_{12}\alpha_1^* + \Lambda_{22}\alpha_2^* - \Lambda_{32}\alpha_3^* - \Lambda_{42}\alpha_4^* - \Lambda_{52}\alpha_5^* - \Lambda_{62}\alpha_6^* < 0$
$-\Lambda_{13}\alpha_1^* - \Lambda_{23}\alpha_2^* + \Lambda_{33}\alpha_3^* - \Lambda_{43}\alpha_4^* - \Lambda_{53}\alpha_5^* - \Lambda_{63}\alpha_6^* < 0$
$-\Lambda_{14}\alpha_1^* - \Lambda_{24}\alpha_2^* - \Lambda_{34}\alpha_3^* + \Lambda_{44}\alpha_4^* - \Lambda_{54}\alpha_5^* - \Lambda_{64}\alpha_6^* < 0$
$-\Lambda_{15}\alpha_1^* - \Lambda_{25}\alpha_2^* - \Lambda_{35}\alpha_3^* - \Lambda_{45}\alpha_4^* + \Lambda_{55}\alpha_5^* - \Lambda_{65}\alpha_6^* < 0$
$-\Lambda_{16}\alpha_1^* - \Lambda_{26}\alpha_2^* - \Lambda_{36}\alpha_3^* - \Lambda_{46}\alpha_4^* - \Lambda_{56}\alpha_5^* - \Lambda_{66}\alpha_6^* < 0$

Более того, из табл. 6.1 получаем, что при

$$\begin{cases} \Lambda_{11}\alpha_1^* - \Lambda_{21}\alpha_2^* - \Lambda_{31}\alpha_3^* < 0, \\ -\Lambda_{12}\alpha_1^* + \Lambda_{22}\alpha_2^* - \Lambda_{32}\alpha_3^* < 0, \\ -\Lambda_{13}\alpha_1^* - \Lambda_{23}\alpha_2^* + \Lambda_{33}\alpha_3^* < 0, \end{cases} \tag{14}$$

а также при

$$\begin{cases} \Lambda_{44}\alpha_4^* - \Lambda_{54}\alpha_5^* - \Lambda_{64}\alpha_6^* < 0, \\ -\Lambda_{45}\alpha_4^* + \Lambda_{55}\alpha_5^* - \Lambda_{65}\alpha_6^* < 0, \\ -\Lambda_{46}\alpha_4^* - \Lambda_{56}\alpha_5^* - \Lambda_{66}\alpha_6^* < 0, \end{cases} \tag{15}$$

все 6 строгих неравенств из табл. 6.2 имеют место, ибо (кроме (14) и (15)) все остальные слагаемые отрицательны (так как $-\Lambda_{ij} < 0$, $\alpha_i^* > 0$, $i \neq j$).

Установим, что при $\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}$ и $\Lambda_{44}\Lambda_{55} < \Lambda_{45}\Lambda_{54}$ первые два неравенства из табл. 6.2 выполняются. Действительно, если $\alpha_3^* > 0$, то первые два строгих неравенства (14) имеют место, если $0 < \frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} < \alpha_2^* < \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}$, что сразу следует из $\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}$. Наконец, выполнено третье неравенство в (14) для $0 < \alpha_3^* \leq \frac{1}{2}\frac{\Lambda_{13} + \Lambda_{23}\alpha_2^*}{\Lambda_{33}}$, где $\alpha_2^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)$. Аналогично, для справедливости (15) достаточно, чтобы $\alpha_4^* = 1$, $\alpha_5^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{44}}{\Lambda_{54}} + \frac{\Lambda_{45}}{\Lambda_{55}}\right)$, $\alpha_6^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{46} + \alpha_5^*\Lambda_{45}}{\Lambda_{66}}\right)$. □

Утверждение 6.1. Если в дифференциальной игре $\varGamma_6$

$$D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0,\ C_i < 0\ (i, j = 1,...,6;\ i \neq j),\ \Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21},\ \Lambda_{44}\Lambda_{55} < \Lambda_{45}\Lambda_{54}, \tag{16}$$

то максимальная по Парето ситуация U^P в 6-критериальной задаче $\varGamma_\upsilon$ будет

$$\begin{aligned} U^P &= \left(U_1^P, U_2^P, ..., U_6^P\right) \div \left(u_1^P(t,y), u_2^P(t,y), ..., u_6^P(t,y)\right) = u^P(t,y) = \\ &= \left(Q_1^P(t)y, Q_2^P(t)y, ..., Q_6^P(t)y\right) = \\ &= \left(-D_1^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)y, -D_2^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)y, ..., -D_6^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)y\right), \end{aligned} \tag{17}$$

где $\Theta^P(\cdot)$ – симметричная, непрерывная на $[0, \vartheta]$ $n \times n$-матрица

$$\Theta^P(t) = \left\{C^{-1}(\alpha^*) + \int_t^\vartheta \left[D_1^{-1}(\alpha^*) + D_2^{-1}(\alpha^*) + ... + D_6^{-1}(\alpha^*)\right] d\tau\right\}^{-1} \tag{18}$$

и постоянные симметричные $n \times n$-матрицы

$$D_i(\alpha^*) = D_{1i} + \alpha_2^* D_{2i} + ... + \alpha_6^* D_{6i}\quad (i = 1,...,6); \tag{19}$$

положительные числа $\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_6^*$ определены рекуррентным образом в лемме 6.1.

Доказательство. Найдем максимальную по Парето ситуацию U^P, применяя лемму 6.1 (конкретно, табл. 6.2 и метод динамического программирования (МДП) из [10, с. 112]. Само применение МДП здесь сведётся к осуществлению двух этапов. *На первом* для задачи $\varGamma_6$ нужно найти 6 положительных чисел $\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_6^*$, а также непрерывно дифференцируемую скалярную функцию $V(t,y) = y'\Theta(t)y$, $\Theta(t) = \Theta'(t)$ $\forall t \in [0, \vartheta]$ и n-вектор-функции $u_i(t,y,V)$ $(i \in \mathbb{N})$ такие, что $\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$V(\vartheta, y) = y'C(\alpha^*)y,\ \ C(\alpha^*) = C_1 + \alpha_2^* C_2 + ... + \alpha_6^* C_6;$$

затем с помощью скалярной функции

$$W(t,y,u_1,...,u_6,V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\frac{\partial V}{\partial y}\right]'\left(u_1 + ... + u_6\right) + \alpha_1^* u_1' D_1(\alpha^*)u_1 + ... + \alpha_6^* u_6' D_6(\alpha^*)u_6$$

определить n-вектор-функции $u_i(t,y,V)$ $(i \in \mathbb{N})$, исходя из $\left(\frac{\partial V}{\partial y} = grad_y V\right)$,

$$\max_{u_1,...,u_6} W(t,y,u_1,...,u_6,V) = \mathrm{Idem}\{u_i \to u_i(t,y,V)\ (i = 1,...,6)\} \tag{20}$$

при любых $(t,y,V) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^{n+1}$. Достаточные условия существования $u(t,y,V)$ в (20) сводятся к выполнению требований: при $\forall (t,y) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$ чтобы выполнялись 12 тождеств

$$\left.\frac{\partial W}{\partial u_i}\right|_{u(t,y,V)} = \frac{\partial V}{\partial y} + 2D_i(\alpha^*)u_i(t,y,V) = 0_n \quad (i=1,...,6),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2} = 2D_i(\alpha^*) < 0 \quad (i=1,...,6), \qquad (21)$$

где $D_i(\alpha^*) < 0$ в силу леммы 6.1.

Из (21) получаем

$$u_i(t,y,V) = -\frac{1}{2}D_i^{-1}(\alpha^*)\frac{\partial V}{\partial y} \quad (i=1,...,6). \qquad (22)$$

Тогда

$$W(t,y,u(t,y,V),V) = W\left[t,y,V\right] = \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial V}{\partial y}\right]'\left(D_1^{-1}(\alpha^*) + ... + D_6^{-1}(\alpha^*)\right)\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Второй этап. Найдем решение первого уравнения из (21) вида $V = V^P(t,y) = y'\Theta^P(t)y$, $\Theta^P(t) = \left[\Theta^P(t)\right]'$ дифференциального уравнения с частными производными

$$W(t,y,V) = 0$$

с граничным условием $\left(C(\alpha^*) = C_1 + \alpha_2^* C_2 + ... + \alpha_6^* C_6\right)$. Так как

$$V(\vartheta,y) = y'C(\alpha^*)y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

то при $\forall t \in \left[0,\vartheta\right]$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ должно иметь место

$$W\left[t,y,V(t,y) = y'\Theta^P y\right] = 0, \quad V(\vartheta,y) = y'C(\alpha^*)y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Оба эти требования выполнены, если симметричная $n\times n$-матрица $\Theta^P(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению типа Риккати ($0_{n\times n}$ – нулевая $n\times n$-матрица):

$$\dot\Theta^P(t) - \Theta^P(t)\left(D_1^{-1}(\alpha^*) + ... + D_6^{-1}(\alpha^*)\right)\Theta^P(t) = 0_{n\times n},$$

$$\Theta^P(\vartheta) = C(\alpha^*) = \alpha_1^* C_1 + \alpha_2^* C_2 + ... + \alpha_6^* C_6;$$

решение Θ^P полученного матричного уравнения имеет [10, с. 65] вид (18). Здесь учтена импликация

$$C_i < 0 \ (i=1,...,6) \Rightarrow C(\alpha^*) = \alpha_1^* C_1 + \alpha_2^* C_2 + ... + \alpha_6^* C_6 < 0.$$

Наконец, из (22) приходим к справедливости (17). Таким образом, максимальная по Парето ситуация U^P в задаче Γ_6 имеет вид (17)–(19). □

Перейдем к построению максимальных по Парето выигрышей $J^P = \left(J_1^P,...,J_6^P\right) = \left(J_1\left(U^P,t_0,y_0\right),...,J_6\left(U^P,t_0,y_0\right)\right)$ опять таки с помощью метода динамического программирования [10].

Утверждение 6.2. Пусть выполнены требования (16) (из утверждения 6.1) и для дифференциальной игры Γ_6 удалось найти 6 скалярных непрерывно дифференцируемых функций вида $V_i(t,y) = y'\Theta_i(t)y$ $(i=1,...,N)$ таких, что

1) $V_i(\vartheta,y) = y'C_i y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$;
2) система из шести уравнений с частными производными

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial y}\right]' N(t)y + y'\Theta^P(t)M_i(t)\Theta^P(t)y = 0,$$

$$V_i(\vartheta,y) = y'C_i y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (i=1,...,6) \qquad (23)$$

имеет решение вида $V_i(t,y) = y'\Theta_i(t)y$, $\left[\Theta_i(t)\right]' = \Theta_i(t)$ $(i=1,...,6)$.

Тогда при любой начальной позиции $(t_0, y_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $y_0 \neq 0_n$ имеет место

$$J_i^P = J_i\left(U^P, t_0, y_0\right) = y_0'\Theta_i(t_0)y_0 \quad (i = 1,...,6).$$

В (23) непрерывные $n \times n$-матрицы

$$N(t) = -\left(D_1^{-1}(\alpha^*) + ... + D_6^{-1}(\alpha^*)\right)\Theta^P(t),$$

$$M_i(t) = \Theta^P(t)\left[D_1^{-1}(\alpha^*)D_{i1}D_1^{-1}(\alpha^*) + ... + D_6^{-1}(\alpha^*)D_{i6}D_6^{-1}(\alpha^*)\right]\Theta^P(t) \quad (i = 1,...,6),$$

$n \times n$-матрицы $\Theta^P(t)$ и $D_i(\alpha^*)$ приведены в (18) и (19), а симметричные $n \times n$-матрицы

$$\Theta_i(t) = \left[Y^{-1}(t)\right]'\left\{C_i - \int_t^{\vartheta} Y'(\tau)\Theta^P(\tau)M_i(\tau)\Theta^P(\tau)Y(\tau)d\tau\right\}Y^{-1}(t) \quad (i = 1,...,6), \tag{24}$$

Наконец $Y(t)$ – фундаментальная матрица решения однородной системы $\dot{y} = N(t)y$, $Y(\vartheta) = E_n$.

Доказательство. Составим скалярные функции

$$W_i\left[t, y, V_i\right] = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial y}\right]' N(t)y + \left[u_1^P(t,y)\right]' D_{i1}u_1^P(t,y) + ... +$$

$$+\left[u_6^P(t,y)\right]' D_{i6}u_6^P(t,y) \quad (i = 1,...,6), \tag{25}$$

причем $u_i^P(t,y)$ – n-вектор-функции, определенные в (17).

Ищем решение $V_i(t,y)$ $(i = 1,...,6)$ системы из 6 уравнений с частными производными

$$W_i\left[t, y, V_i\right] = 0, \quad V_i(\vartheta, y) = y'C_i y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (i = 1,...,6) \tag{26}$$

в виде квадратичной формы $V_i(t,y) = y'\Theta_i(t)y$, $\left[\Theta_i(t)\right]' = \Theta_i(t)$ $(i = 1,...,6)$.

Установим два факта.

Во-первых, решению системы (25), (26) присуще свойство

$$V_i(t_0, y_0) = J_i(U^P, t_0, y_0) \quad (i = 1,...,6), \tag{27}$$

где ситуация $U^P = (U_1^P, ..., U_6^P)$ имеет вид (17). Действительно, если U^P – ситуация из (16)–(19), то согласно (25) и (26) для решения $y^P(t)$ системы $\dot{y} = N(t)y$, $y(t_0) = y_0 \neq 0_n$ при $y = y^P(t)$ будет

$$0 = W_i\left[t, y^P(t), V_i(t, y^P(t))\right] = \frac{\partial V_i(t, y^P(t))}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i(t, y^P(t))}{\partial y}\right]' N(t)y^P(t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{6}\left[u_j^P(t, y^P(t))\right]' D_{ij}u_j^P(t, y^P(t)) = W_i[t] \quad \forall t \in \left[t_0, \vartheta\right] \quad (i = 1,...,6).$$

Интегрируя обе части этого тождества в пределах от t_0 до ϑ с учетом граничных условий из (26), приходим к

$$0 = \int_{t_0}^{\vartheta} W_i[t]dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_i(t, y^p(t))}{dt}dt + \int_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j=1}^{6}\left[u_j^P(t, y^P(t))\right]' D_{ij}u_j^P(t, y^P(t))dt =$$

$$= V_i(\vartheta, y^P(\vartheta)) - V_i(t_0, y^P(t_0)) + \int_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j=1}^{6}\left[u_j^P(t, y^P(t))\right]' D_{ij}u_j^P(t, y^P(t))dt =$$

$$= y'(\vartheta)C_i y(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j=1}^{6}\left[u_j^P(t, y^P(t))\right]' D_{ij}u_j^P(t, y^P(t))dt - V_i(t_0, y^P(t_0)) =$$

$$= J_i(U^P, t_0, y_0) - V_i(t_0, y^P(t_0)) \quad (i = 1,...,6),$$

отсюда сразу следует справедливость равенства (27).

Во-вторых, установим, что решение $V_i(t,y)$ $(i \in \mathbb{N})$ системы (26) имеет вид $V_i(t,y) = y'\Theta_i(t)y$, где симметричная $n \times n$-матрица $\Theta_i(t)$ представима в виде (24). В самом деле, подставив $V_i(t,y) = y'\Theta_i(t)y$ в (26), получаем справедливость (24), если только $\Theta_i(t)$ $(i = 1,...,6)$ является решением матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\dot{\Theta}_i + \Theta_i N + N\Theta_i + \Theta^P(t) M_i \Theta^P(t) = 0_{n\times n}, \quad \Theta_i(\vartheta) = C_i \quad (i = 1,...,6). \qquad (28)$$

Подстановкой $\Theta_i(t)$ из (24) убедимся, что симметричная $n \times n$-матрица $\Theta_i(t)$ из (24) в самом деле является решением (28), что и завершает доказательство утверждения 6.2. □

Замечание 6.1. Объединение утверждений 6.1 и 6.2 приводит к следующему итоговому результату, касающемуся явного вида максимального по Парето решения $(U^P, J^P) \in \mathfrak{A} \times \mathbb{R}^6$ игры Γ_6.

Пусть для дифференциальной игры Γ_6:

1) постоянные симметричные $n \times n$-матрицы

$$D_{ii} > 0, \quad D_{ij} < 0, \quad C_i < 0, \quad (i, j = 1,...,6;\ i \neq j);$$

2) $$[\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21}], \quad [\Lambda_{44}\Lambda_{55} < \Lambda_{45}\Lambda_{54}].$$

Тогда при $\forall (t_0, y_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$, $y_0 \neq 0_n$ будет

$$U^P \div u^P(t,y) = (-D_1^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)y, -D_2^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)y, ..., -D_6^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t)y),$$

$$J^P = (J_1^P, J_2^P, ..., J_6^P), \quad J_i^P = y_0{}'\Theta_i(t_0)y_0 \quad (i = 1,...,6),$$

а симметричные $n \times n$-матрицы $\Theta^P(t)$ и $\Theta_i(t)$ имеют вид:

$$\Theta^P(t) = \left\{ C^{-1}(\alpha^*) + \int_t^{\vartheta} \left[D_1^{-1}(\alpha^*) + D_2^{-1}(\alpha^*) + ... + D_6^{-1}(\alpha^*) \right] d\tau \right\}^{-1},$$

$$\Theta_i(t) = \left[Y^{-1}(t) \right]' \left\{ C_i - \int_t^{\vartheta} Y'(\tau)\Theta^P(\tau)M_i(\tau)\Theta^P(\tau)Y(\tau)d\tau \right\} Y^{-1}(t) \quad (i = 1,...,6),$$

$n \times n$-матрица $Y(t)$ – фундаментальная матрица решения системы $\dot{y} = N(t)y$, $Y(\vartheta) = E_n$, симметричные матрицы

$$C(\alpha^*) = C_1 + \alpha_2^* C_2 + ... + \alpha_6^* C_6, \quad D_i(\alpha^*) = \alpha_1^* D_{1i} + \alpha_2^* D_{2i} + ... + \alpha_6^* D_{6i},$$

$$N(t) = -\left(D_1^{-1}(\alpha^*) + ... + D_6^{-1}(\alpha^*) \right)\Theta^P(t),$$

$$M_i(t) = \Theta^P(t)\left[D_1^{-1}(\alpha^*)D_{i1}D_1^{-1}(\alpha^*) + ... + D_6^{-1}(\alpha^*)D_{i6}D_6^{-1}(\alpha^*) \right]\Theta^P(t),$$

положительные числа $\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_6^*$ определены рекуррентным образом

$$\alpha_1^* = 1,\ \alpha_2^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}} \right),\ \alpha_3^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{13} + \alpha_2^*\Lambda_{23}}{\Lambda_{33}} \right),$$

$$\alpha_4^* = 1,\ \alpha_5^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{44}}{\Lambda_{54}} + \frac{\Lambda_{45}}{\Lambda_{55}} \right),\ \alpha_6^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{46} + \alpha_5^*\Lambda_{45}}{\Lambda_{66}} \right),$$

величина Λ_{ii} $(-\Lambda_{ij})$ – наибольший (наименьший) корень характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$ (соответственно, $\det[D_{ij} - \Lambda E_n] = 0$) $(i, j \in \{1,...,6\},\ j \neq i)$.

7. Явный вид КПО

Перейдём к центральной части статьи – построению явного вида КПО (коалиционного Парето-оптимального решения) игры Γ, формализованного определением 2.1: при выполнении ограничения (16) для игры Γ_d, справедливы равенства

$$\begin{cases} \underset{U_{K_1}\in\mathfrak{A}_{K_1}}{\mathrm{MAX}}\ \mathcal{I}_{K_1}(U_{K_1},U_{K_2}^P,t_0,y_0)=\mathcal{I}_{K_1}(U^P,t_0,y_0), \\ \underset{U_{K_2}\in\mathfrak{A}_{K_2}}{\mathrm{MAX}}\ \mathcal{I}_{K_2}(U_{K_1}^P,U_{K_2},t_0,y_0)=\mathcal{I}_{K_2}(U^P,t_0,y_0), \end{cases}$$

что, в свою очередь, будет следовать из

$$\begin{cases} \max\limits_{U_{K_1}\in\mathfrak{A}_{K_1}}\left[\alpha_1^*\mathcal{I}_1(U_{K_1},U_{K_2}^P,t_0,y_0)+\alpha_2^*\mathcal{I}_2(U_{K_1},U_{K_2}^P,t_0,y_0)+\alpha_3^*\mathcal{I}_3(U_{K_1},U_{K_2}^P,t_0,y_0)\right]= \\ \qquad =\sum\limits_{j=1}^{3}\alpha_j^*\mathcal{I}_j(U^P,t_0,y_0), \qquad (29) \\ \max\limits_{U_{K_2}\in\mathfrak{A}_{K_2}}\left[\alpha_4^*\mathcal{I}_4(U_{K_1}^P,U_{K_2},t_0,y_0)+\alpha_5^*\mathcal{I}_5(U_{K_1}^P,U_{K_2},t_0,y_0)+\alpha_6^*\mathcal{I}_6(U_{K_1}^P,U_{K_2},t_0,y_0)\right]= \\ \qquad =\sum\limits_{m=4}^{6}\alpha_m^*\mathcal{I}_m(U^P,t_0,y_0), \qquad (30) \end{cases}$$

при $\forall(t_0,y_0)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$, где постоянные

$$\alpha_1^*=1,\ \alpha_2^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}}+\frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right),\ \alpha_3^*=\frac{1}{2\Lambda_{33}}\left(\Lambda_{13}+\alpha_2^*\Lambda_{23}\right),$$

$$\alpha_4^*=1,\ \alpha_5^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{44}}{\Lambda_{54}}+\frac{\Lambda_{45}}{\Lambda_{55}}\right),\ \alpha_6^*=\frac{1}{2\Lambda_{66}}\left(\Lambda_{46}+\alpha_5^*\Lambda_{45}\right),$$

$\Lambda_{ii}>0$ – наибольший корень $\Delta(\Lambda)=\det\left[D_{ii}-\Lambda E_n\right]=0$, $-\Lambda_{ij}<0$ – наименьший корень уравнения $\delta_{ij}(\Lambda)=\det\left[D_{ij}-\Lambda E_n\right]=0$ ($i,j\in\{1,...,6\}$, $j\neq i$), $\Lambda_{ij}>0$; ситуация $U^P==(U_1^P,...,U_6^P)\div\left(-D_1^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t)y,...,-D_6^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t)y\right)$. Итак, покажем, что найденная в предыдущем разделе настоящей статьи ситуация $U^P\in\mathfrak{A}$ как раз и представляет собой объединение $(U_{K_1}^P,U_{K_2}^P)=U^P$, где $U_{K_1}^P=\left(U_1^P,U_2^P,U_3^P\right)$ и $U_{K_2}^P=\left(U_4^P,U_5^P,U_6^P\right)$, которые найдены в (17)–(19). Однако именно доказательство справедливости (29) и является содержанием статьи [5] для игры Γ_d, где «заморожены» стратегии $U_{K_2}^P=\left(U_4^P,U_5^P,U_6^P\right)\in\mathfrak{A}_{K_2}$ (см. утверждение 3.1 из [5] при $\alpha_1^*=1,\ \beta=\alpha_2^*,\ \gamma=\alpha_3^*$); более того, эти самые $\left(U_1^P,U_2^P,U_3^P\right)=U_{K_1}^P$ как раз и реализуют $\max\limits_{U_{K_1}^P\in\mathfrak{A}_{K_1}}$ в (29), что, в свою очередь, и по свойству 1.1 влечёт их максимальность по Парето в трехкритериальной задаче $\left\langle \dot{y}=u_1+u_2+u_3, y(t_0)=y_0,\mathfrak{A}_{K_1},\left\{\mathcal{I}_i(U_1,U_2,U_3,U_{K_2}^P,t_0,y_0)\right\}_{i=1,2,3}\right\rangle$. Отсюда, как следствие, явный вид $U_{K_1}^P=(U_1^P,U_2^P,U_3^P)\div\left(-D_1^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t)y,-D_2^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t)y,-D_3^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t)y\right)$ и соответствующие выигрыши в такой ситуации $U_{K_1}^P\in\mathfrak{A}_{K_1}$. Аналогично установим справедливость $U_{K_2}^P=(U_4^P,U_5^P,U_6^P)\div\left(-D_4^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t)y,-D_5^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t)y,-D_6^{-1}(\alpha^*))\Theta^P(t)y\right)$ и явный вид выигрышей в ситуации $U_{K_2}^P=\left(U_4^P,U_5^P,U_6^P\right)$. Итак, приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 7.1. Пусть для коалиционной дифференциальной игры с нетрансферабельными выигрышами

$$\Gamma_d=\left\langle\left\{K_1=\{1,2,3\},K_2=\{4,5,6\}\right\},\Sigma_y,\left\{\mathfrak{A}_{K_l}\right\}_{l=1,2},\{\mathcal{I}_{K_l}(U_{K_1},U_{K_2},t_0,x_0)\}_{l=1,2}\right\rangle,$$

выполнены ограничения

$$D_{ii}>0,\ D_{ij}<0,\ C_i<0,\ (i,j=1,...,6;\ i\neq j);\ \Lambda_{11}\Lambda_{22}<\Lambda_{12}\Lambda_{21},\ \Lambda_{44}\Lambda_{55}<\Lambda_{45}\Lambda_{54}.$$

Тогда коалиционно Парето-оптимальное решение игры Γ_d образует четвёрка

$$\left(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}; \mathcal{I}_{K_1}(U^P_{K_1}, U^P_2, t_0, x_0), \mathcal{I}_{K_2}(U^P_1, U^P_{K_2}, t_0, x_0)\right) \in \mathfrak{A}_{K_1} \times \mathfrak{A}_{K_2} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

где $U^P_{K_1} = \left(U^P_1, U^P_2, U^P_3\right) \in \mathfrak{A}_{K_1}$, $U^P_{K_2} = \left(U^P_4, U^P_5, U^P_6\right) \in \mathfrak{A}_{K_2}$, $U^P_i \div -D_i(\alpha^*)\Theta^P(t)y \quad (i = 1,\ldots,6)$ симметричные постоянные $n \times n$-матрицы,

$$D_i(\alpha^*) = \alpha^*_1 D_{i1}(\alpha^*) + \alpha^*_2 D_{i2}(\alpha^*) + \alpha^*_3 D_{i3}(\alpha^*) + \alpha^*_4 D_{i4}(\alpha^*) + \alpha^*_5 D_{i5}(\alpha^*) + \alpha^*_6 D_{i6}(\alpha^*) \quad (i = 1,\ldots,6),$$

$$\alpha^*_1 = 1,\ \alpha^*_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} + \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right),\ \alpha^*_3 = \frac{1}{2\Lambda_{33}}\left(\Lambda_{13} + \alpha^*_2 \Lambda_{23}\right),$$

$$\alpha^*_4 = 1,\ \alpha^*_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{44}}{\Lambda_{54}} + \frac{\Lambda_{45}}{\Lambda_{55}}\right),\ \alpha^*_6 = \frac{1}{2\Lambda_{66}}\left(\Lambda_{46} + \alpha^*_5 \Lambda_{45}\right),$$

непрерывная симметричная $n \times n$-матрица

$$\Theta^P(t) = \left\{C^{-1}(\alpha^*) + \int_t^{\vartheta}\left[\sum_{i=1}^{6} D_i^{-1}(\alpha^*)\right]d\tau\right\}^{-1},$$

$$\mathcal{I}^P_{K_1}[t_0, y_0] = \mathcal{I}_{K_1}(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0) = \left(\mathcal{I}_1(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0), \mathcal{I}_2(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0), \mathcal{I}_3(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0)\right),$$

$$\mathcal{I}^P_{K_2}[t_0, y_0] = \mathcal{I}_{K_2}(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0) = \left(\mathcal{I}_4(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0), \mathcal{I}_5(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0), \mathcal{I}_6(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0)\right),$$

$$\mathcal{I}^P_{K_1} = \left(y_0'\Theta_1(t_0)y_0,\ y_0'\Theta_2(t_0)y_0,\ y_0'\Theta_3(t_0)y_0\right),$$

$$\mathcal{I}^P_{K_2} = \left(y_0'\Theta_4(t_0)y_0,\ y_0'\Theta_5(t_0)y_0,\ y_0'\Theta_6(t_0)y_0\right),$$

$$C(\alpha^*) = \sum_{i=1}^{6} \alpha^*_i C_i,$$

$$\Theta_i(t) = \left[Y^{-1}(t)\right]'\left[C_i - \int_t^{\vartheta} Y'(t)\Theta^P(\tau)M_i(\tau)\Theta^P(\tau)d\tau\right] \cdot Y^{-1}(t),$$

$Y(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{y} = N(t)y$, $Y(\vartheta) = E_n$,

$$N(t) = -\sum_{i=1}^{6} D_i^{-1}(\alpha^*)\Theta^P(t),\ M_i(t) = \Theta^P(t)\left[\sum_{j=1}^{6} D_j^{-1}(\alpha^*)D_{ij}D_j^{-1}(\alpha^*)\right],$$

где $\Lambda_{ii} > 0$ – наибольший корень $\Delta(\Lambda) = \det\left[D_{ii} - \Lambda E_n\right] = 0$, $-\Lambda_{ij} < 0$ – наименьший корень уравнения $\delta_{ij}(\Lambda) = \det\left[D_{ij} - \Lambda E_n\right] = 0$ ($i, j \in \{1,\ldots,6\}$, $j \neq i$).

При этом обе коалиции внутренне и внешне устойчивы.

Доказательство. В [5] установлено, что согласно $D_{11} > 0$ в игре Γ_d не существует равновесия по Нэшу, но по утверждению 5.1 из [5] может существовать угроза на внутреннюю устойчивость коалиции K_1 (т. е. $\exists U^T_1 \div \alpha e_n y$ и $\alpha^* = \text{const} > 0$ такие, что при $\forall \alpha > \alpha^*$ (e_n – n-вектор с единичными компонентами) будет $\mathcal{I}_1(U^T_1, U^P_2, U^P_3, U^P_{K_2}, t_0, y_0) > \mathcal{I}_1(U^P, t_0, y_0)$).

В ответ на такую угрозу и согласно $D_{12} < 0$ у игрока 2 из коалиции K_1 (по утверждению 5.4 из [5]) существует $\overline{\alpha_1} > 0$ и такое, что при $\forall \alpha > \overline{\alpha_1}$ будет для $U^C_2 \div \alpha e_n y$

$$\mathcal{I}_1(U^T_1, U^C_2, U^P_3, U^P_{K_2}, t_0, y_0) < \mathcal{I}_1(U^P, t_0, y_0),$$

аналогично, согласно $D_{22} > 0$ $\exists$ число $\overline{\alpha_2} > 0$, для которого при $\forall \alpha > \overline{\alpha_2}$ будет

$$\mathcal{I}_2(U^T_1, U^C_2, U^P_3, U^P_{K_2}, t_0, y_0) > \max_{U_{K_1} \in \mathfrak{A}_{K_1}} \mathcal{I}(U_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, y_0).$$

Но тогда для стратегии U_2^C при $\alpha > \max\{\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}\}$ два последних строгих неравенства «объединяются» в контругрозу на внутреннюю устойчивость коалиции K_1 со стороны игрока 1.

Таким образом, устанавливается внутренняя устойчивость K_1 и аналогичными рассуждениями внутренняя устойчивость K_2.

Заключение

Итак, при выполнении ограничений (16) в игре Γ существует КПО решение (его явный вид можно найти в теореме 7.1). В конце статьи хотелось бы упомянуть о возможности предложенным здесь приёмом решать вопросы об устойчивости более сложных коалиционных структур.

Литература

1. Парилина, Е.М. Новый подход к определению характеристической функции в стохастических играх / Е.М. Парилина, Л.А. Петросян // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика НН Красовского, (Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.). Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. – 2019. – С. 243–247.

2. Parilina, E. On a Simplified Method of Defining Characteristic Function in Stochastic Games / E. Parilina, L. Petrosyan // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, Iss. 7. – P. 1135.

3. Mazalov, V.V. Fish wars and cooperation maintenance / V.V. Mazalov, A.N. Rettieva // Ecological Modelling. – 2010. – Vol. 221, Iss. 12. – P. 1545–1553.

4. Mazalov, V. The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics / V. Mazalov, E. Parilina // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, Iss. 3. – P. 355.

5. Жуковский, В.И. Паретовское равновесие угроз и контругроз в одной дифференциальной игре трех лиц / В.И. Жуковский, Ю.Н. Житенева, Ю.А. Бельских // Математическая теория игр и её приложения. – 2019. – Т. 11, № 1. – С. 39–72.

6. Жуковский, В.И. К индивидуальной устойчивости паретовского равновесия угроз и контругроз в одной коалиционной дифференциальной игре с нетрансферабельными выигрышами / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев, Л.В. Жуковская, И.С. Стабулит // Математическая теория игр и ее приложения. – 2021. – Т. 13, № 1. – С. 89–101.

7. Salukvadze, M.E. The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics / M.E. Salukvadze, V.I. Zhukovskii. – Birkhäuser Basel, 2020. – 272 p.

8. Zhukovskiy,V.I. The Golden Rule of Ethics: A Dynamic Game-Theoretic Framework Based on Berge Equilibrium / V.I. Zhukovskiy, M.E. Salukvadze, A.Yu. Mazurov. – London, New York: Taylor and Francis, 2021. – 324 p.

9. Жуковский, В.И. Равновесные управления многокритериальных динамических систем / В.И. Жуковский, Н.Т. Тынянский. – М.: МГУ, 1984. – 224 с.

10. Жуковский, В.И. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры: учебное пособие для вузов / В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Из-во Юрайт, 2020. – 322 с.

11. Подиновский, В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: Физматлит, 2007. – 255 с.

12. Карлин, С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / С. Карлин. – М.: Мир, 1964. – 838 с.

13. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

14. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

15. Parker, W.V. The characteristic roots of a matrix / W.V. Parker // Duke Math. J. – 1937. – Vol. 3, no. 3. – P. 484–487. DOI: 10.1215/S0012-7094-37-00338-7

Поступила в редакцию 22 февраля 2022 г.

Сведения об авторах

Жуковский Владислав Иосифович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра оптимального управления факультета ВМиК, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: zhkvlad@yandex.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9594-0115

Жуковская Лидия Владиславовна – доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4152-3161

Кудрявцев Константин Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kudriavtcevkn@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9279-4490

Романова Виолетта Эдуардовна – МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: vilca2001@mail.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2022, vol. 14, no. 2, pp. 13–30

DOI: 10.14529/mmph220202

ON ONE MODIFICATION OF NASH EQUILIBRIUM

V.I. Zhukovskiy[1], L.V. Zhukovskaya[2], K.N. Kudryavtsev[3], V.E. Romanova[1]
[1] Moscow State University, Moscow, Russian Federation
[2] Central Economic and Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
[3] South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
Email: kudriavtcevkn@susu.ru

Absract. By the end of the last century there were four areas in the mathematical theory of positional differential games: non-coalitional positional differential games, cooperative, hierarchical and, finally, the least-understood coalitional positional differential games. In their turn, coalitional games are divided into games with transferable payoffs (games with side payments when players can split profits in the course of the game) and with non-transferable payoffs (games with side payments when there are no such distributions for this or that reason). The coalitional games with side payments are being extensively explored at the Faculties of Applied Mathematics and Management Processes of St. Petersburg University and the Institute of Mathematics and Information Technologies of Petrozavodsk State University (by Professors L.A. Petrosyan, V.V. Mozalov, E.M. Parilina, A.N. Rettieva and their numerous students). However, side payments are not always present even in economic cooperation; moreover, side payments can be legislated against.

We believe that the research of the equilibrium of threats and counter-threats (sanctions and counter-sanctions) in non-coalitional differential games that we have carried out over the last years allows to also cover some aspects of non-transferable payoff coalitional games. The article considers the issues of namely the internal and external stability of coalitions in the class of positional differential games. The coefficient constraints were identified for the mathematical model of a linear-quadratic differential positional game with twin-coalitional structure for six persons where this coalitional structure is internally and externally stable.

Keywords: Nash equilibrium, equilibrium of threats and counter-threats, Pareto optimality, coalition.

References

1. Parilina E.M., Petrosyan L.A. New Approach to Define Characteristic Function in Stochastic Games (New Approach to Defining Characteristic Function in Stochastic Games). *Stability, Control,*

Differential Games (SCDG2019): Proceedings of the International Conference devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019, Yekaterinburg, IMM UB RAS, 2019, pp. 243–247. (in Russ.).

2. Parilina E., Petrosyan L. On a Simplified Method of Defining Characteristic Function in Stochastic Games. *Mathematics,* 2020, Vol. 8, no. 7, p. 1135. DOI: 10.3390/math8071135

3. Mazalov V.V., Rettieva A.N. Fish Wars and Cooperation Maintenance. *Ecological Modelling*, 2010, Vol. 221, no. 12, pp. 1545–1553. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2010.03.011

4. Mazalov V., Parilina E. The Euler-Equation Approach in Average-Oriented Opinion Dynamics. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, no. 3, p. 355. DOI: 10.3390/math8030355

5. Zhukovskii V.I., Zhiteneva J.N., Belskikh J.A. Pareto Equilibrium of Objections and Counterobjections in a Differential Game of Three Persons. *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2019, Vol. 11, Iss. 1, pp. 39–72. (in Russ.).

6. Zhukovskiy V.I., Kudryavtsev K.N., Zhukovskaya L.V., Stabulit I.S. K individual'noj ustoichivosti paretovskogo ravnovesiya ugroz i kontrugroz v odnoi koalicionnoi differencial'noi igre s netransferabel'nymi vyigryshami (To the Individual Stability of Pareto Equilibrium of Objections and Counterobjections in a Coalition Differential Positional 3-Person Game without Side Payments). *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2021, Vol. 13, Iss. 1, pp. 89–101. (in Russ.).

7. Salukvadze M.E., Zhukovskii V.I. *The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics*. Basel, Birkhäuser, 2020, 272 p. DOI: 10.1007/978-3-030-25546-6

8. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Mazurov A.Yu. *The Golden Rule of Ethics: A Dynamic Game-Theoretic Framework Based on Berge Equilibrium*. London, Taylor and Francis, 2021, 324 p. DOI: 10.1201/9781003134541

9. Zhukovskii V.I., Tynianskii N.T. *Ravnovesnye upravleniya mnogokriterial'nyh dinamicheskih system*. (Equilibrium Controls of Multicriteria Dynamical Systems). Moscow, MSU Publ., 1984, 224 p. (in Russ.).

10. Zhukovskii V.I., Chikrii A.A. *Differencial'nye uravneniya. Lineino-kvadratichnye differencial'nye igry*. (Differential Equations. Linear-Quadratic Differential Games). Moscow, Urait Publ., 2019, 322 p. (in Russ.).

11. Podinovskii V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nyh zadach*. (Pareto-Optimal Solutions of Multicriteria Problems). Moscow, Fizmatlit, 2007, 255 p. (in Russ.).

12. Karlin S. *Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovanii i ekonomike*. (Mathematical Methods in Game Theory, Programming, and Economics). Moscow, Mir Publ., 1964, 838 p. (in Russ.).

13. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry*. (Positional Differential Games). Moscow, Nauka, 1974, 456 p. (in Russ.).

14. Voevodin V.V., Kuznecov Yu.A. *Matricy i vychisleniya* (Matrices and Calculations). Moscow, Nauka, 1984, 318 p. (in Russ.).

15. Parker W.V. The characteristic roots of a matrix. *Duke Math. J.*, 1937, Vol. 3, no. 3. pp. 484–487. DOI: 10.1215/S0012-7094-37-00338-7

Received February 22, 2022

Information about the authors

Zhukovsky Vladislav Iosifovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Optimal Control, Faculty of VMiK, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, e-mail: zhkvlad@yandex.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9594-0115

Zhukovskaya Lidiya Vladislavovna is Dr. Sc. (Economics), Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Central Economic and Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4152-3161

Kudryavtsev Konstantin Nikolaevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kudriavtcevkn@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9279-4490

Romanova Violetta Eduardovna, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, e-mail: vilca2001@mail.ru