

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЕ С ЛИНЕЙНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ТОЛЩИНЫ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

А.В. Рязских

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ryazhskihav@bk.ru

Аннотация. Получено точное аналитическое решение в квадратурах начально-краевой задачи для нестационарного одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого рода для бесконечной полосы, причем одна из ее границ движется с постоянной заданной скоростью, уменьшая толщину полосы. Предварительно исходная система уравнений путем использования автомодельной замены пространственной переменной сведена к системе с неподвижной границей, к которой применен метод разделения зависимых переменных. Требование равенства нулю коэффициентов перед производной первого порядка по автомодельной производной и отдельно входящей функцией в модифицированном уравнении в частных производных параболического типа позволило определить общую структуру решения, содержащего неизвестную функцию. Эта функция представлена суперпозицией двух потенциалов, которые связаны пропорционально с помощью автомодельной переменной, что дало возможность упростить модифицированное уравнение и применить для его решения классическое интегральное синус-преобразование Фурье. Результаты расчетов продемонстрировали динамику локального профиля температуры по изменяющейся толщине полосы с постоянной скоростью, причем кинетика среднеинтегральной температуры показывает, в отличие от случая отсутствия движения границы, наличие максимума, смещающегося с ростом отношения скорости перемещения границы к скорости переноса теплоты теплопроводностью к неподвижной границе. В предположении, что толщина полосы является параметром, задача в исходной формулировке решена методом одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени.

Ключевые слова: аналитическое решение; полоса; параболическое уравнение; подвижная граница; граничные условия первого рода.

Введение. Процессы в геометрических областях с изменяющимися во времени границами реализуются в различных приложениях. В ракетно-космической и авиационной технике – это управление фронтом горения в твердотопливных двигателях и повышение эффективности абляционной защиты обтекателей летательных аппаратов в плотных слоях атмосферы [1]. В [2] отмечается необходимость учета теплопереноса при росте кристаллов в формовке заготовок их жидкого металла. В химической и пищевой промышленности с помощью таких задач оценивается усушка материалов [3]. Современное применение подобных постановок отмечается в криомедицине [4]. Кроме того, учитывая математическую аналогию между законами Фурье и Фика, большой массив задач с подвижными границами встречается при переносе массы диффузией [5].

Систематизация и формализация математических задач с движущимися границами для различных типов уравнений математической физики были выполнены в [6], где одновременно были обозначены основные подходы к решению таких задач. В [7] были представлены оригинальные методы аналитического решения широкого класса параболических уравнений с различными начальными и граничными условиями с движущимися границами. Дальнейшее развитие такого подхода представлено в [8, 9] в контексте полуограниченных областей.

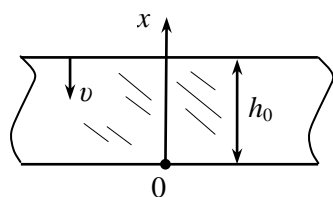


Рис. 1. Расчетная схема

В данной работе, используя идею перехода к новым координатам с Якобианом отличным от нуля, в которых исходная задача формулируется в области с фиксированными границами, рассмотрено решение нестационарного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого рода на неподвижной и движущейся к ней по нормали границе бесконечной полосы.

Постановка задачи. Рассматривается бесконечная горизонтальная полоса высотой h_0 из однородного материала с изотропной теплопроводностью a . Начало координат расположено на нижней покоящейся границе (рис. 1), поддерживаемой при температуре t_0 . В начальный момент времени (температура по высоте полосы постоянна и также равна t_0) начинает двигаться верхняя граница, имеющая постоянную температуру t_1 , по нормали в направлении неподвижной границы со скоростью $v = \text{const}$. В выбранной системе координат математическая формулировка задачи такова:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$t(x, 0) = t_0; \quad (2)$$

$$t(0, \tau) = t_0; \quad (3)$$

$$t[h(\tau), \tau] = t_1; \quad (4)$$

(для определенности пусть $t_1 > t_0$)

$$h(\tau) = h_0 - v\tau, \quad (5)$$

где τ – время; x – координата; $t(x, \tau)$ – локальная температура в полосе. После введения безразмерных зависимых и независимых переменных

$\theta = \tau a / h_0^2$, $X = x / h_0$, $T(X, \theta) = [t(x, \tau) - t_0] / (t_1 - t_0)$, $H(\theta) = h(\tau) / h_0 = 1 - A\theta$, $A = v h_0 / a$
система (1)–(5) примет вид

$$\frac{\partial T(X, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T(X, \theta)}{\partial X^2}; \quad (6)$$

$$T(X, \theta) = 0; \quad (7)$$

$$T(0, \theta) = 0; \quad (8)$$

$$T[H(\theta), \theta] = 1; \quad (9)$$

$$H(\theta) = 1 - A\theta. \quad (10)$$

Решение. Сделан переход от системы координат (X, θ) к новой автомодельной системе координат (ξ, η) по правилу

$$\xi = 1 - A\theta, \quad \eta = \theta. \quad (11)$$

Этот переход взаимнооднозначен ввиду неравенства нулю Якобиана, причем зависимая искомая функция будет

$$\Omega(\xi, \eta) = T[X(\xi, \eta), \theta(\xi, \eta)], \quad (12)$$

относительно которой система (6)–(10) запишется следующим образом:

$$(1 - A\eta)^2 \frac{\partial \Omega(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -A\xi(1 - A\eta) \frac{\partial \Omega(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Omega(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}; \quad (13)$$

$$\Omega(\xi, 0) = 0; \quad (14)$$

$$\Omega(0, \eta) = 0; \quad (15)$$

$$\Omega(1, \eta) = 1. \quad (16)$$

Представим функцию в виде произведения двух функций

$$\Omega(\xi, \eta) = q(\xi, \eta)W(\xi, \eta). \quad (17)$$

После подстановки (17) в (13) имеем

$$(1 - A\eta)^2 \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + M(\xi, \eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} + N(\xi, \eta)W(\xi, \eta), \quad (18)$$

где

$$M(\xi, \eta) = -A\xi(1 - A\eta) + \frac{2}{q(\xi, \eta)} \frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad (19)$$

$$N(\xi, \eta) = \frac{1}{q(\xi, \eta)} \left[-A\xi(1 - A\eta) \frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 q(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - (1 - A\eta)^2 \frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right]. \quad (20)$$

Выберем $q(\xi, \eta)$ так, чтобы $M(\xi, \eta) = 0$. Этому условию удовлетворяет функция

$$q(\xi, \eta) = C(\eta) \exp \left[\frac{1}{4} A\xi^2 (1 - A\eta) \right], \quad (21)$$

где $C(\eta)$ – неизвестная функция, которая определена из (20) таким образом, чтобы $N(\xi, \eta) = 0$, тогда

$$C(\eta) = 1/\sqrt{1 - A\eta}. \quad (22)$$

Таким образом, из (17) и (21), (22) следует

$$\Omega(\xi, \eta) = \frac{W(\xi, \eta)}{\sqrt{1 - A\eta}} \exp \left[\frac{1}{4} A\xi^2 (1 - A\eta) \right],$$

откуда после подстановки $\Omega(\xi, \eta)$ в (13)–(16) она трансформируется в систему для $W(\xi, \eta)$:

$$(1 - A\eta)^2 \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}; \quad (23)$$

$$W(\xi, 0) = 0; \quad (24)$$

$$W(0, \eta) = 0; \quad (25)$$

$$W(1, \eta) = \sqrt{1 - A\eta} \exp \left[-\frac{1}{4} A(1 - A\eta) \right]. \quad (26)$$

Далее введем вспомогательную функцию

$$V(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) - U(\xi, \eta), \quad (27)$$

что позволяет представить (23) как

$$(1 - A\eta)^2 \left[\frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial^2 V(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U(\xi, \eta)}{\partial \xi^2}, \quad (28)$$

а структура условий (24)–(26) определяет связь

$$U(\xi, \eta) = \xi W(1, \eta), \quad (29)$$

поэтому из (24)–(26) и (28), (29) следует система для определения $V(\xi, \eta)$

$$(1 - A\eta)^2 \frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 V(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \xi A(1 - A\eta)^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - A\eta}} + \frac{A}{2} \sqrt{1 - A\eta} \right) \exp \left[-\frac{A}{4} (1 - A\eta) \right]; \quad (30)$$

$$V(\xi, 0) = -\xi \exp \left(-\frac{A}{4} \right); \quad (31)$$

$$V(0, \eta) = 0; \quad (32)$$

$$V(1, \eta) = 0. \quad (33)$$

К системе (30)–(33) применено интегральное синус-Фурье преобразование [10] по переменной ξ

$$\Phi(\lambda_n, \eta) = \int_0^1 V(\xi, \eta) \sin(\lambda_n \xi) d\xi,$$

где $\lambda_n = \pi n$, $n = \overline{1, \infty}$, которое систему (30)–(33) переводит в задачу Коши:

$$\frac{d\Phi(\lambda_n, \eta)}{d\eta} + \frac{\lambda_n^2}{(1 - A\eta)^2} \Phi(\lambda_n, \eta) = F(\eta); \quad (34)$$

$$\Phi(\lambda_n, 0) = \frac{\cos \lambda_n}{\lambda_n} \exp\left(-\frac{A}{4}\right), \quad (35)$$

где

$$F(\eta) = \frac{A \cos \lambda_n}{2 \lambda_n} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - A\eta}} + \frac{A}{2} \sqrt{1 - A\eta} \right) \exp\left[-\frac{A}{4}(1 - A\eta)\right].$$

Решение (34)–(35) есть

$$\Phi(\lambda_n, \eta) = \exp\left[-\frac{\lambda_n^2}{A(1 - A\eta)^2}\right] \cdot \left\{ \frac{\cos \lambda_n}{\lambda_n} \exp\left(-\frac{A}{4} + \frac{\lambda_n^2}{2}\right) + \int_0^\eta F(\eta) \exp\left[\frac{\lambda_n^2}{A(1 - A\eta)^2}\right] d\eta \right\}. \quad (36)$$

Оригинал (36)

$$V(\xi, \eta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda_n, \eta) \sin(\lambda_n \xi). \quad (37)$$

Из (12), (17), (26), (27), (37) следует окончательное решение задачи (6)–(10)

$$T(X, \theta) = \left[\frac{X}{1 - A\theta} W(1, \theta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda_n, \theta) \times \sin\left(\frac{\lambda_n X}{1 - A\theta}\right) \right] \frac{1}{\sqrt{1 - A\theta}} \exp\left[\frac{1}{4} A \frac{X^2}{(1 - A\theta)}\right], \quad (38)$$

которое корректно при $\theta < 1/A$.

Анализ. Расчеты показывают, что при $A = 0$ (граница не движется) изменение профиля температуры (рис. 2) соответствует известным результатам [11]. В случае $A > 0$ (рис. 3) полученные результаты отражают физическую картину различных процессов [6], причем при изменении среднеинтегральной температуры в полосе наблюдается максимум, который с ростом A смещается к неподвижной границе (рис. 4).

В предположении, что толщина полосы является параметром, решение задачи в исходной формулировке с помощью метода одностороннего преобразования Лапласа по θ [12] представлена в виде:

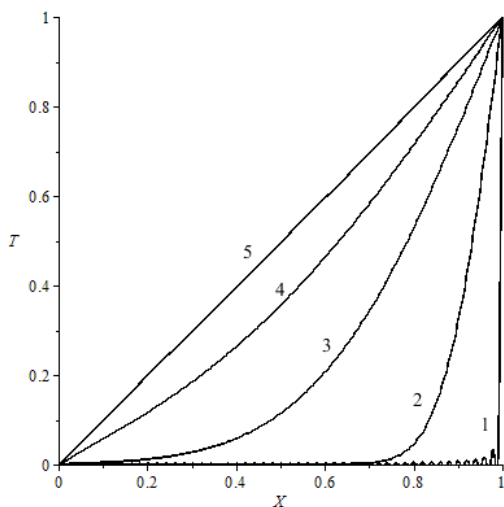


Рис. 2. Изменение локальной температуры по высоте полосы при $A = 0$ для различных θ :
1 – 10^{-5} ; 2 – 0,2; 3 – 0,4; 4 – 0,6; 5 – 0,8

$$T(X, \theta) = \frac{X}{H(\theta)} + \frac{2}{H(\theta)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n X)}{\cos[\mu_n H(\theta)]} \exp(-\mu_n^2 \theta);$$

$$H(\theta) = 1 - A\theta; \mu_n = \pi n / H(\theta), n = \overline{1, \infty},$$

$$X \leq H(\theta).$$

Правомерность такого приема показана в [13].

Заключение. Сведение задачи переноса теплоты теплопроводностью в бесконечной полосе с перемещением по нормали одной из границ к другой с постоянной скоростью к задаче с неподвижными границами с помощью автомодельного преобразования координат позволяет получить ее точное аналитическое решение в квадратурах.

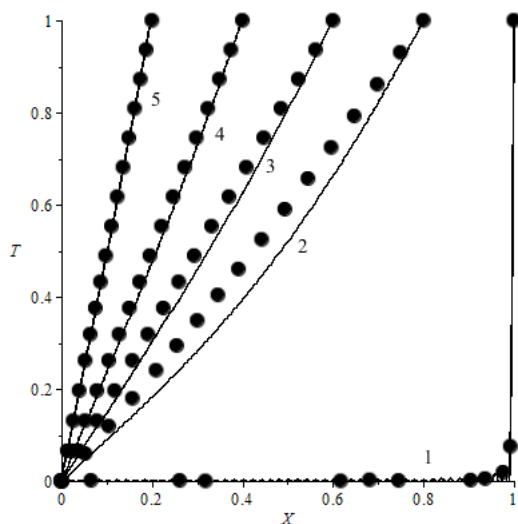


Рис. 3. Изменение профиля температуры по высоте полосы при $A=1$ при различных θ : 1 – 10^{-5} ; 2 – 0,2; 3 – 0,4; 4 – 0,6; 5 – 0,8
● – приближенное параметрическое решение

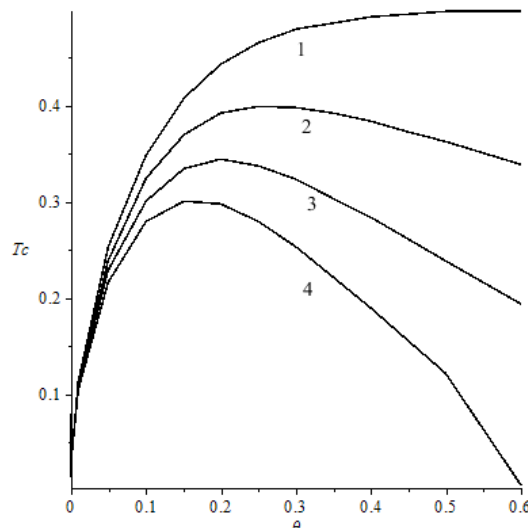


Рис. 4. Изменение среднеинтегральной температуры в полосе при различных A : 1 – 0; 2 – 0,5; 3 – 1,0; 4 – 1,5

Литература

1. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдеевский, Б.М. Галицейский, Г.А. Глебов и др. – М.: Машиностроение, 1992. – 518 с.
2. Антонов, П.В. Зависимость фронта кристаллизации и скорости роста слитка Бриджмена–Стокбаргера / П.В. Антонов, В.С. Бердников // ПМТФ. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 65–77.
3. A moving boundary model for fruit isothermal drying and shrinkage: An optimization method for water diffusivity and peel resistance estimation / D. Lentzon, A.G. Boudouvis, V.T. Karathanos, G. Xanthopoulos // J. of Food Eng. – 2019. – Vol. 263. – P. 299–310.
4. Баранов, А.Ю. Моделирование нестационарного теплообмена в криомедицине / А.Ю. Баранов, Т.А. Малышева // Вестник Международной Академии Холода. – 2000. – № 2. – С. 38–41.
5. Бекман, И.Н. Математика диффузии / И.Н. Бекман. – М.: ОнтоПринт, 2016. – 399 с.
6. Crank, J. Free and moving boundary problems / J. Crank. – Oxford: Clarendon Press, 1984. – 425 p.
7. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высш. шк., 2001. – 549 с.
8. Рубин, А.Г. Решение краевых задач нестационарной теплопроводности в области с движущейся границей при наличии источника теплоты / А.Г. Рубин // Челябинский физико-математический журнал. – 1994. – Т. 3, № 1(2). – С. 108–111.
9. Власов, П.А. Влияние равномерного движения границы на температурное поле полупространства, подверженного нагреву внешним тепловым потоком / П.А. Власов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2014. – № 8. – С. 101–109.
10. Снеддон, И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
11. Ozisik, M.N. Heat Conduction / M.N. Ozisik. – NY: John Wiley & Soons, Inc., 1993. – 692 p.
12. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
13. Ряжских, А.В. Седиментация малоконцентрированной взвеси стоксовских частиц в перемешиваемом слое с движущейся свободной границы / А.В. Ряжских // ЖТФ. – 2019. – Т. 89, Вып. 8. – С. 1150–1157.

Поступила в редакцию 18 февраля 2022 г.

Сведения об авторе

Ряжских Александр Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9823-3165>, e-mail: ryazhskihav@bk.ru

**THERMAL CONDUCTIVITY IN A HOMOGENEOUS STRIP WITH A LINEAR
CHANGE IN THICKNESS UNDER BOUNDARY CONDITIONS OF THE FIRST KIND****A.V. Ryazhskikh**

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: ryazhskihav@bk.ru

Abstract. An accurate analytical solution has been obtained in quadratures of the initial boundary value problem for one-dimensional unsteady-state heat-transfer equation with boundary conditions of the first kind for an endless strip, while one of its boundaries is moving at a constant preset speed decreasing the strip thickness. Preliminarily, through the self-similar change of the spatial variable, the initial system of equations has been reduced to a fixed boundary system, to which the method of partitioning of dependent variables has been applied. The requirement that the coefficients before the first-order derivative must be equal to zero for the self-similar derivative and separately included function in a modified equation in partial derivative of parabolic type has allowed to determine the general structure of the solution containing an unknown function. This function is presented as a superposition of two potentials, which are proportionally connected using the self-similar derivative, what has made it possible to simplify the modified equation and to apply the classical Fourier sine integral transformation for its solution. The computation results has shown the dynamics of the local temperature profile along the changing strip thickness at a constant speed, while the kinetics of the average integral temperature shows (unlike with the case of absence of boundary movement) the presence of the maximum that shifts with the growth of the ratio of the boundary movement speed to the heat transfer speed by the conductivity to the fixed boundary. This is explained by the intensive heating up of the strip material in the conditions of the decreasing of its thickness; meanwhile, with the increase in the boundary movement speed (or with the use of material with reduced thermal conductivity), it approaches the fixed boundary. By assuming that the strip thickness is a parameter, the problem in the initial wording is solved using the method of the one-sided Laplace integral time transformation. This solution, when using the linear dependence of parameter on time, correlates with the obtained accurate solution, and therefore it can be used for the preliminary evaluation of the required characteristics of a process under consideration.

Keywords: analytical solution; strip; parabolic equation; movable boundary; boundary conditions of the first kind.

References

1. Avduevskiy V.S., Galitseyskiy B.M., Glebov G.A. *Osnovy teploperedachi v avitsionnoy i raketno-kosmicheskoy tekhnike* (Fundamentals of Heat Transfer in Aviation and Rocket and Space Technology). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 518 p. (in Russ.).
2. Antonov P.V., Berdnikov V.S. Dependences of the Shape of the Crystallization Front and Growth Rate of a Silicon Ingot on the Heat Transfer Mode in the Bridgman–Stockbarger Method. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, Vol. 53, pp. 860–870. DOI: 10.1134/S0021894412060089
3. Lentzon D., Boudouvis A.G., Karathanos V.T., Xanthopoulos G. A Moving Boundary Model for Fruit Isothermal Drying and Shrinkage: An Optimization Method for Water Diffusivity and Peel Resistance Estimation. *J. of Food Eng.*, 2019, Vol. 263, pp. 299–310. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2019.07.010
4. Baranov A.Yu., Malysheva T.A. Modelirovanie nestatsionarnogo teploobmena v kriomeditsine (Modeling of Unsteady Heat Transfer in Cryomedicine). *Vestnik Mezhdunarodnoi akademii kholoda*, 2000, no. 2, pp. 38–41. (in Russ.).
5. Bekman, I.N. *Matematika diffuzii* (The Mathematics of Diffusion). Moscow, OntoPrint Publ., 2016, 399 p. (in Russ.).

6. Crank J. *Free and Moving Boundary Problems*. Oxford, Clarendon Press, 1984, 425 p.
7. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* (Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids). Moscow, Vyssh. shk. Publ., 2001, 549 p. (in Russ.).
8. Rubin A.G. Reshenie kraevykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti v oblasti s dvizhushcheyasya granitsej pri nalichii istochnika teploty (Solving Boundary Value Problems of Unsteady Thermal Conductivity in a Region with a Moving Boundary in the Presence of a Heat Source), *Vestnik Chelyabinsk. Gos. Univ.*, 1994, no. 2, pp. 108–111. (in Russ.).
9. Vlasov, P.A. Vliyanie ravnomernogo dvizheniya granitsy na temperaturnoe pole poluprostranstva, podverzhennogo nagrevu vneshnim teplovym potokom (The Effect of Uniform Boundary Motion on the Temperature Field of a Half-Space Exposed to Heating by an External Heat Flow). *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana*, 2014, no. 8, pp. 101–109. (in Russ.).
10. Sneddon I. *Preobrazovanie Fur'e* (Fourier Transform). Moscow, Izd-vo inostr. Lit. Publ., 1955, 668 p. (in Russ.).
11. Ozisik, M.N. *Heat Conduction*. NY: John Willey & Sons, Inc., 1993, 692 p.
12. Dech, G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa i Z-preobrazovaniya* (A Guide to the Practical Application of the Laplace Transform and the Z-Transform). Moscow, Nauka Publ., 1971, 288 p. (in Russ.).
13. Ryazhskikh, A.V. Sedimentation of a Low-Concentration Suspension of Stokes Particles in a Stirred Layer with a Movable Free Boundary. *Tech. Phys.*, 2019, Vol. 64, pp. 1082–1089. DOI: 10.1134/S106378421908019X

Received February 18, 2022

Information about the author

Ryazhskikh Aleksandr Viktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9823-3165>, e-mail: ryazhskihav@bk.ru