

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Д.Д. Зарипова, Ю.М. Ковалев

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: kovalevym@susu.ru*

Аннотация. Представлен способ задания начальных условий на границе тела произвольной формы на прямоугольной сетке. В качестве рассматриваемого тела выбран сферический объем сжатого газа, образовавшийся в результате взрыва над поверхностью Земли. Так как ячейки расчетной сетки прямоугольные, а контур криволинейный, то для задания условий на границе используются дробные ячейки. Давление и плотность внутри сферы известны и распределены равномерно по всему объему. Параметры на границе тела предлагается рассчитывать пропорционально объему, который занимает тело в каждой ячейке, через которую проходит контур. Такой объем может быть найден интегрированием по области, отсекаемой кривой от прямоугольной ячейки сетки. Тестирование алгоритма проводилось на численном решении задачи о разлете шара в чистом газе методом крупных частиц. Граница шара является контактным разрывом, поэтому для демонстрации работы метода приведены графики положения изолиний плотности в процессе расширения сферы. Результаты расчетов показали, что описанный механизм обеспечивает сохранение сферической границы в процессе счета: отклонение от значений, удовлетворяющих уравнению окружности, составило менее 1 %.

Ключевые слова: математическое моделирование; газодинамика; граничные условия; дробные ячейки.

Введение

В задачах газодинамики важную роль играет способ задания расчетной области, так как от этого зависит скорость и точность вычислений. Реальные задачи зачастую связаны с обтеканием тел произвольной формы, что делает процесс построения сетки нетривиальной задачей. В этом случае криволинейный контур пересекает расчетную сетку, не совпадая с границами целых ячеек, поэтому для описания начальных условий на границе вводятся дробные ячейки.

Задание граничных условий для тел произвольной формы представляет значительную сложность, поэтому исследования в данном направлении актуальны на сегодняшний день. Так, например, в некоторых работах [1, 2] приводятся расчетные формулы для дробных ячеек, но без постановки граничных условий, за исключением простого случая прямолинейной границы. В других работах [3, 4] вблизи криволинейной границы тела вводится локальная ортогональная система координат, направление осей которой не совпадает с основной прямоугольной системой координат, – такая процедура усложняет алгоритм и вызывает трудности для тел сложной конфигурации.

Подход, используемый в работе [5], не требует введения у поверхности тела какой-либо локальной системы координат, но связан с техническими сложностями построения граничных условий из-за добавления слоя фиктивных ячеек, прилегающих к дробным ячейкам, а также потерей точности при линейной аппроксимации границы тела.

В данной работе рассматривается способ задания начальных условий на границе шара, основанный на нахождении площади ячейки под кривой при помощи интегрирования. Так как для нашей задачи в качестве криволинейной границы выбрана окружность, то не представляет сложности рассчитать площадь, отсекаемую этой окружностью в прямоугольной ячейке. В этом случае существует аналитическое решение для полученного интеграла, чем достигается высокая точность расчетов. Для тела произвольной формы площадь рассчитывается численным интегрированием с кусочно-линейной аппроксимацией криволинейной границы контура.

Описание алгоритма

Рассмотрим расчетную область, содержащую некоторый сферический объем, на границе которого требуется задать начальные условия (рис. 1). Заштрихованные области вдоль криволинейного контура соответствуют дробным ячейкам. Для наглядности формулы приведены для плоского случая.

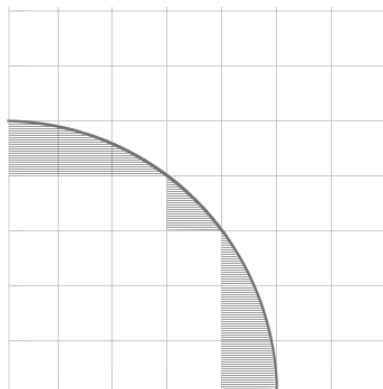


Рис. 1. Схематичное представление сетки с дробными ячейками

Таким образом, если r – радиус окружности, то интеграл может быть записан в виде

$$\int_{x_i}^{x_*} dx \int_{y_j}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy, \quad (1)$$

где x_i – горизонтальная координата левой границы ячейки, для которой происходит интегрирование в данный момент, x_* может принимать значение либо координаты правой границы ячейки, либо точки пересечения окружности с прямой y_j (вертикальная координата сетки); здесь и далее i и j – индексы ячеек, относящиеся к направлениям вдоль x и y соответственно.

При переходе к интегралу по одной переменной имеем

$$\int_{x_i}^{x_*} \sqrt{r^2 - x^2} - y_j dx. \quad (2)$$

После ряда преобразований получим точное решение для интеграла (2).

$$F(x) = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2 \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)}{2} - y_j x + C. \quad (3)$$

Ключевым моментом технической реализации метода является определение пределов интегрирования, так как вариантов пересечения окружности с ячейками сетки может быть несколько – необходимо проработать все возможные типы дробных ячеек, которых в данном случае немного. Далее, подставляя пределы интегрирования для каждой дробной ячейки, находим значение площади по формуле (3).

Параметры на границе тела рассчитываются пропорционально занятой этим телом области в ячейке. Следовательно, найденное значение площади эквивалентно некоторой доле α_1 , занимаемой газодинамическими величинами сферы в данной ячейке, соответственно, $(1 - \alpha_1)$ приходится на область, граничащую со сферой.

Итак, если плотность и внутренняя энергия в шаре ρ_1 и E_1 , во внешней среде ρ_2 и E_2 , результирующие величины параметров в такой ячейке рассчитываются как

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha_1 \rho_1 + (1 - \alpha_1) \rho_2, \\ E &= \frac{\alpha_1 \rho_1 E_1 + (1 - \alpha_1) \rho_2 E_2}{\rho}, \\ P &= f(\rho, E). \end{aligned} \quad (4)$$

После этапа задания начальных условий на границе тела расчет величин производится по формулам для целых ячеек.

Основные результаты и выводы

Рассмотрим в качестве примера задачу о разлете шара в чистом газе. Пусть в результате взрыва над поверхностью Земли образовался сферический объем сжатого газа, давление внутри объема постоянно. Центр объема находится на оси симметрии Oz цилиндрической системы координат. В начальный момент времени давление внутри шара равно $P_1 = 2500 \cdot 10^5$ Па, в невозмущенной среде $P_2 = 10^5$ Па, плотность $\rho_2 = 1,21$ кг/м³. Расчеты проводились методом крупных частиц [6] на сетке размером 330×210 узлов.

Моделирование проводилось путем численного решения нестационарной системы уравнений Эйлера, записанной в цилиндрической системе координат. Система законов сохранения и уравнение состояния в безразмерной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v r}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u r}{\partial r} + \frac{\partial \rho u v r}{\partial z} + \frac{\partial P r}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v r}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v v r}{\partial z} + \frac{\partial P r}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E r}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v E r}{\partial z} + \frac{\partial P u r}{\partial r} + \frac{\partial P v r}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$e = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)},$$

$$E = e + \frac{w^2}{2},$$

где u и v – составляющие скорости w вдоль r и z соответственно, e – внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты.

Перейдем к результатам расчетов. Представленные на рис. 2 изолинии плотности демонстрируют сохранение сферической формы контактного разрыва с течением времени. Для проверки было выбрано несколько точек на контактном разрыве, их координаты удовлетворяли уравнению окружности, отклонение составило менее 1 %.

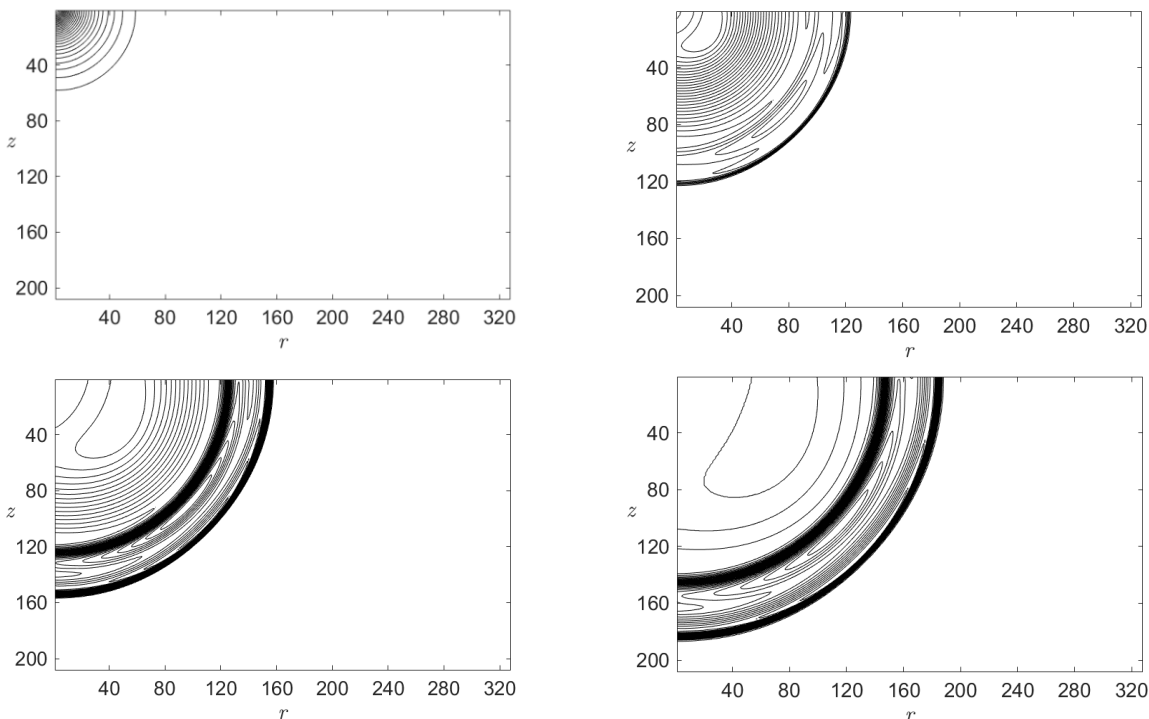


Рис. 2. Изолинии плотности при расширении шара в чистом газе.

Таким образом, введение дробных ячеек позволяет обеспечить сохранение сферической границы в процессе счета.

Выводы

Результаты расчетов распространения сферических ударных волн, приведенные на рис.и2 позволяют сделать следующие выводы:

1. Задание начальных условий на криволинейной границе с помощью дробных ячеек, в которых физические величины распределены пропорционально занятому телом объему, позволяет наиболее точно описывать расчетную область при решении задач газодинамики.
2. Преимуществами данного метода является его простота и возможность использования дробных ячеек только при задании начальных условий, проводя дальнейшие расчеты по формулам для целых ячеек.
3. Данный подход может быть распространен и на математические модели газозвеси с химическими превращениями [7].

Литература

1. Rich, M.A. A method for Eulerian fluid dynamics / M.A. Rich // Los Alamos Scientific Lab. Rept. № LAMS-2826. – 1963.
2. Jentry, R.A. An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow Problems / R.A. Jentry, R.E. Martin, B.J. Daly // Journal of Computational Physics. – 1966. – Vol. 1, no. 1. – P. 87–118.
3. Отрощенко, И.В. Разностный метод расчета течения газа в канале произвольной формы / И.В. Отрощенко, Р.П. Федоренко // Численные методы механики сплошной среды. – 1974. – № 1. – С. 98–111.
4. Magnus, R. Inviscid transonic flow over airfoil / R. Magnus, H. Yoshihara // AIAA Journal. – 1970. – Vol. 8, no. 12. – P. 2157–2162.
5. Давыдов, Ю.М. Расчет обтекания тел произвольной формы методом «крупных частиц» / Ю.М. Давыдов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1971. – Т. 11, № 4. – С. 1056–1063.
6. Белоцерковский, О.М. Метод крупных частиц в газовой динамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. – М.: Наука, 1982. – 391 с.
7. Ковалев, Ю.М. Математическая модель газозвеси с химическими превращениями в приближении парных взаимодействий / Ю.М. Ковалев, Е.Е. Пигасов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 40–49.

Поступила в редакцию 22 марта 2022 г.

Сведения об авторах

Зарипова Динара Дамировна – аспирант, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zaripovadd@gmail.com

Ковалев Юрий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kovalevym@susu.ru

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 2, pp. 59–63*

DOI: 10.14529/mmph220206

MODELING OF CURVED SURFACES IN GAS DYNAMICS PROBLEMS

D.D. Zaripova, Yu.M. Kovalev

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: kovalevym@susu.ru

Abstract. In this paper, a method for setting initial conditions on the boundary of an arbitrarily-shaped body on a rectangular grid is presented. A spherical volume of compressed gas, formed as a result of an explosion above the Earth's surface, is chosen as the body under consideration. Since the cells of the computational grid are rectangular and the contour is curvilinear, fractional cells are used to set

the conditions on the boundary. The pressure and density inside the sphere are known and distributed uniformly throughout the volume. The parameters on the boundary are proposed to be calculated in proportion to the volume that the body takes in each cell the contour crosses. Such a volume can be found by integrating over the region cut off by the curve from a rectangular grid cell. The algorithm has been tested on a numerical solution to the problem of the gas sphere expansion by the large-particle method. Since the boundary of the sphere is a contact discontinuity, graphs of the position of density isolines in the process of expansion of the sphere are presented. The calculation results have shown that the described mechanism ensures the preservation of the spherical boundary during the calculation process: the deviation from the values corresponding with the circle equation has equaled less than 1 %.

Keywords: mathematical modeling; gas dynamics; boundary conditions; fractional cells.

References

1. Rich M.A. A Method for Eulerian Fluid Dynamics. *Los Alamos Scientific Lab. Rept. no. LAMS-2826*, 1963.
2. Jentry R.A., Martin R.E., Daly B.J. An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow Problems. *J. Comput. Phys.*, 1966, Vol. 1, no. 1, pp. 87–118.
3. Otroshchenko, I.V. Raznostnyy metod rascheta techeniya gaza v kanale proizvol'noy formy (Difference method for calculating gas flow in a channel of arbitrary shape). *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoy sredy*, 1974, no. 1, pp. 98–111. (in Russ.).
4. Magnus R., Yoshihara H. Inviscid Transonic Flow over Airfoil. *AIAA Journal*, 1970, Vol. 8, no. 12, pp. 2157–2162.
5. Davydov Yu.M. Calculation by the “Coarse Particle” Method of the Flow Past a Body of Arbitrary Shape. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1971, Vol. 11, no. 4, pp. 1056–1063. DOI: 10.1016/0041-5553(71)90026-7
6. Belotserkovskiy O.M., Davydov Yu.M. *Metod krupnykh chastits v gazovoy dinamike* (The Method of Large Particles in Gas Dynamics), Moscow, Nauka Publ., 1982. – 391 p.
7. Kovalev Yu.M., Pigasov E.E. A Mathematical Model of Gas Suspension with Chemical Reactions in the Pair-Interaction Approximation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 40–49. (in Russ.).

Received March 22, 2022

Information about the authors

Zaripova Dinara Damirovna is Post-graduate Student, Computational Mechanics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zaripovadd@gmail.com

Kovalev Yuriy Mikhaylovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Computational Mechanics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kovalevym@susu.ru