Математика

УДК 512.62, 517.5 **DOI: 10.14529/mmph220301**

О РЕШЕНИИ В КВАДРАТНЫХ РАДИКАЛАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ СТЕПЕНЕЙ

Н.С. Астапов[1,2]
[1] *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация*
[2] *Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация*
E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Аннотация. Посвящена поиску конструктивных аналитических выражений корней алгебраических уравнений третьей–шестой степени через коэффициенты уравнений. Получены соотношения для коэффициентов, при которых корни уравнений представляются наиболее просто, например, рационально. Даны рациональные выражения для кратных корней. Найдено условие, при котором полином шестой степени в каноническом виде представим произведением полиномов третьей степени в каноническом виде. Особое внимание уделялось символьному выражению корней уравнений через квадратные радикалы из коэффициентов. Предложен способ решения уравнений с помощью определяющих (порождающих, связанных с исходным) уравнений. Все представленные разложения справедливы для полиномов с произвольными комплексными коэффициентами.

Ключевые слова: решение в радикалах; формулы Кардано; корни полиномов; возвратные уравнения; определяющие уравнения.

Введение

В математических журналах регулярно появляются публикации новых способов символьного решения алгебраических уравнений [1–10]. В [5] с помощью групп Галуа получены примеры уравнений сколь угодно большой степени, разрешимых в радикалах. В [6] дан способ выражения корней произвольного алгебраического уравнения, использующий интегральную формулу Меллина. В [7] представлен способ поиска корней уравнений в поле алгебраических чисел. В [8] приводятся аналитические выражения для представления всех корней произвольного алгебраического уравнения в виде отношения бесконечных определителей. Поэтому в результате значения корней выражаются в конечном виде численно и приближенно. Несмотря на то, что предлагаемые в работах [6–8] способы пригодны для решения уравнений произвольных степеней, однако реализующие их алгоритмы оказываются трудоемкими даже для уравнений невысоких степеней, либо, например, из-за ограничений на коэффициенты уравнений, позволяют получить значения корней не в символьном виде. К проблеме представления полиномов в виде произведения полиномов более низких степеней приводят, например, задачи символьного интегрирования рациональных функций [11], задачи решения характеристических уравнений, связанных с дифференциальными уравнениями. Простые алгоритмы для символьного исследования алгебраических уравнений малых степеней востребованы в задачах механики [12–18]. Так, например, для проверки свойства сильной эллиптичности уравнений равновесия, которое имеет большое значение в теории упругости, необходимо символьное исследование алгебраических уравнений четвертой, шестой и двенадцатой степеней (см. [12, стр. 690–692, 695, 696]). В [12] даны критерии положительности полиномов четвертой и шестой степеней (теоремы 2, 3) и приведены доказанные авторами теоремы 6 и 7 о вещественных нулях полиномов третьей и четвертой степени. В [13, 14] ключевым является символьное исследование характеристического уравнения четвертой степени с комплексными коэффициентами для нахождения неизвестных значений комплексного волнового параметра. В [15] решение кубического уравнения при кубической аппроксимации Эрмита позволило найти точное аналитическое решение эволюционного уравнения. В работах [16–18] рассмотрены некоторые частные случаи алгебраических уравнений третьей–восьмой степеней, для решения которых привлекаются формулы Кардано и отмечаются вычислительные трудности в общем случае.

В частных случаях, когда коэффициенты полиномов связаны дополнительными соотношениями, иногда удается получить достаточно простые разложения на множители, что показывается приведенными ниже разложениями.

Настоящая работа является естественным продолжением работы [19].

Кубическое уравнение

Формулы Ферро–Тартальи–Эйлера (Кардано) для приведенного уравнения третьей степени $x^3+px+q=0$ с произвольными буквенными коэффициентами не являются конструктивными, так как не существует алгоритма извлечения кубического корня из произвольного комплексного числа. Даже в случае двукратного корня этот корень выражается с помощью кубического корня из комплексного числа, хотя двукратный корень равен одному из двух значений $\pm\sqrt{-p/3}$ [19]. Однако так как кратный корень полинома является корнем производной полинома, этот корень проще выразить следующим образом.

1. Уравнение $x^3+px+q=0$ при условии $4p^3+27q^2=0$ имеет двукратный корень $x_{1,2}=-3q/(2p)$. Поэтому имеем разложение на линейные множители

$$x^3+px+q=\left(x+3q/(2p)\right)^2\left(x-3q/p\right). \tag{1}$$

2. Если для комплексных коэффициентов $p\neq 0$, q выполняется равенство $2p^3+27q^2=0$, то справедливо разложение

$$x^3+px+q=\left(x+\frac{3q}{p}\right)\left(x-\frac{3q}{2p}\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\frac{3q}{2p}\left(1-\sqrt{3}\right)\right). \tag{2}$$

Это решение можно получить из формул Ф. Клейна для «уравнения диэдра» [19].

3. Если для комплексных коэффициентов p и q выполняется равенство $q^2=-(p/3)^3\left(2\pm\sqrt{2}\right)$, то справедливо разложение

$$x^3+px+q=\left(x-3p^2q\Big/\left(p^3+27q^2\right)\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right), \tag{3}$$

где $x_{2,3}=\pm 6p^2q\Big/\left(2p^3\left(\sqrt{3}\mp 2\right)+27q^2\left(\sqrt{3}\mp 1\right)\right)$.

Разложения (1)–(3) кубического полинома на линейные множители не используют операции извлечения корней из коэффициентов и справедливы для полиномов с произвольными комплексными коэффициентами. Приведем еще несколько уравнений специального вида, разрешимых в квадратных радикалах.

4. Для произвольных комплексных чисел p и q справедливо разложение

$$x^3+\left(2p^3+27q^2\right)\Big/(9pq)\,x^2+px+q=\left(x+3q/p\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right), \tag{4}$$

где $x_{2,3}=\pm\dfrac{3q}{p}\cdot\dfrac{\sqrt{k+1}\pm 1}{k}$, $k=-\dfrac{27q^2}{p^3}$. Заметим, что при $k=2$ из разложения (4) следует разложение (2). Уравнение $x^3+\left(2p^3+27q^2\right)\Big/(9pq)\,x^2+px+q=0$ при $p^3=27q^2$ имеет трехкратный корень, который равен $\sqrt{p/3}$ или $-\sqrt{p/3}$. Этот трехкратный корень можно записать проще, без операции извлечения корней, воспользовавшись разложением (4): при $k=-1$ получим $x_{1,2,3}=-3q/p$.

5. Кубическое уравнение

$$x^3+px\pm 5p\sqrt{6p}\Big/9=0, \tag{5}$$

где p – произвольное комплексное число, имеет корни $x_1=-2\sqrt{p/6}$, $x_{2,3}=\sqrt{p/6}\pm 3\sqrt{-p/6}$, если в уравнении (5) выбран знак «+»; и имеет корни $x_1=2\sqrt{p/6}$, $x_{2,3}=-\sqrt{p/6}\pm 3\sqrt{-p/6}$, если в уравнении (5) выбран знак «$-$».

6. Для любых комплексных w, p и n уравнение третьей степени $x^3+wx^2+px+q=0$ имеет корень $x=nw$ при $q=-nw\left(n^2w^2+nw^2+p\right)$ и имеет корень $x=np$ при $q=-np\left(n^2p^2+nwp+p\right)$.

7. Для любых комплексных a и b справедливо разложение

$$x^3-3a^2bx\pm a^3\left(b^3+1\right)=\left[x\pm a(b+1)\right]\left[x^2\mp a(b+1)x+a^2\left(b^2-b+1\right)\right]. \qquad (6)$$

Отсюда при $b=1$ получим разложение $x^3-3a^2x\pm 2a^3=(x\pm 2a)(x\mp a)^2$, а при $a=\sqrt{-p/\sqrt[3]{54}}$, $b=\sqrt[3]{2}$ получим разложение на множители многочлена $x^3+px\pm\sqrt{-p^3/6}$.

Ещё несколько разрешимых в квадратных радикалах кубических уравнений специального вида можно найти в [19].

В [10] для трёхчленного алгебраического уравнения $x^n+px^m+q=0$, $n>m$ с действительными коэффициентами $p\neq 0$, $q\neq 0$, имеющего комплексный корень $x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, найдены соотношения $p=-r^{n-m}\sin(n\varphi)/\sin(m\varphi)$ и $q=r^n\sin((n-m)\varphi)/\sin(m\varphi)$. Следовательно, для кубического уравнения $x^3+px+q=0$ имеем равенства $p=-r^2\sin(3\varphi)/\sin\varphi=r^2\left(4\sin^2\varphi-3\right)$ и $q=2r^3\cos\varphi$. Пользуясь тождеством $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, получим уравнение $r^6-pr^4-q^2=0$. После подстановок $y=r^2$, $y=z+p/3$ приходим к сопряженному уравнению $z^3-p^2z/3-2p^3/27-q^2=0$, которое иногда удается решить в квадратных радикалах. Так, для уравнения $x^3+\sqrt{3}x+\sqrt{6-2\sqrt{3}/9}=0$ строим сопряженное уравнение $z^3-z-6=0$, которое имеет целый корень $z=2$. Затем последовательно находим $y=2+\sqrt{3}/3$, $r=\sqrt{2+\sqrt{3}/3}$, $\cos\varphi=q/(2r^3)=\sqrt{\left(7-3\sqrt{3}\right)/22}$, $\sin\varphi=\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\pm\sqrt{\left(15+3\sqrt{3}\right)/22}$, $x_{2,3}=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)/6}\pm i\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)/2}$, $x_1=-\sqrt{2-2\sqrt{3}/3}$, то есть решение исходного уравнения выражено в квадратных радикалах.

Способ решения исходного уравнения сведением с помощью замен переменных к решению сопряженного (связанного) уравнения широко использован в [10, 19]. Ниже приведены новые теоремы для построения сопряженных уравнений.

Теорема 1. *Если уравнение* $x^3+wx^2+px+q=0$ *имеет корни* a, b, c, *то уравнение* $z^3-pz^2+qwz-q^2=0$ *имеет корни* ab, bc, ac.

Заметим, что в предыдущем абзаце из уравнения $x^3+px+q=0$ получено уравнение $r^6-pr^4-q^2=0$ с помощью тригонометрических подстановок. А из теоремы 1 это следует сразу при $w=0$.

Теорема 2. *Уравнение* $x^3+wx^2+px+q=0$ *имеет корни* a, b, c, *тогда и только тогда, когда уравнение* $z^3+2wz^2+\left(p+w^2\right)z+pw-q=0$ *имеет корни* $a+b$, $b+c$, $a+c$.

Теорема 3. *Если уравнение* $x^3+wx^2+px+q=0$ *имеет корни* a, b, c, *то уравнение* $z^3+\left(2p-w^2\right)z^2+\left(p^2-2qw\right)z-q^2=0$ *имеет корни* a^2, b^2, c^2.

Теорема 4. *Если уравнение* $x^3+wx^2+px+q=0$ *имеет корни* a, b, c, *то уравнение* $z^3+\left(w^3-3pw+3q\right)z^2+\left(p^3-3pqw+3q^2\right)z+q^3=0$ *имеет корни* a^3, b^3, c^3.

Пользуясь теоремами 1–4 легко построить много других уравнений, связанных с исходным уравнением. Например, последовательно применяя теоремы 2 и 3, получим следующую теорему.

Теорема 5. *Если* $x^3+wx^2+px+q=0$ *имеет корни* a, b, c, *то уравнение* $z^3+2\left(2p-w^2\right)z^2+\left(5p^2-4pw^2-2qw+w^4\right)z+2p^3-p^2w^2-4pqw+q^2+2qw^3=0$ *имеет корни* a^2+b^2, b^2+c^2, a^2+c^2.

Отсюда при $w=0$ получим уравнение $z^3+4pz^2+5p^2z+2p^3+q^2=0$, которое при $q^2=-2p^3$ имеет корни $z_1=0$, $z_{2,3}=-p(2\pm i)$. Следовательно, один из корней уравнения $x^3+px\pm\sqrt{-2p^3}=0$ равен $\pm\sqrt{-2p}$ и это уравнение разрешимо в квадратных радикалах. Интересно отметить, что пакет прикладных программ *Mathematica* генерирует для корней этого уравнения громоздкие выражения с использованием кубических радикалов.

Теорема 6. *Если уравнение* $x^3+wx^2+px+q=0$ *имеет корни* a, b, c, *то уравнение* $z^3-2pz^2+\left(p^2+qw\right)z+q(q-pw)=0$ *имеет корни* $a(b+c)$, $b(a+c)$, $c(a+b)$.

Теорема 7. *Если уравнение* $x^3+wx^2+px+q=0$ *имеет корни* a, b, c, *то уравнение* $z^3+(w-p)z^2+(-pw+p+3q+qw)z+q\left(1-2p-q+w^2\right)-p^2+2qw=0$ *имеет корни* $ab+c$, $bc+a$, $ac+b$.

Уравнение четвертой степени

Решение уравнения четвертой степени $M_4=x^4+px^2+qx+r=0$ в общем виде приводит к необходимости решения кубического уравнения (резольвенты). Так, алгоритм Декарта $(q\neq 0)$ можно записать в виде

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+kx+(t-q/k)/2\right)\left(x^2-kx+(t+q/k)/2\right), \tag{7}$$

где $k=\sqrt{t-p}$, а t – любой корень кубического уравнения (резольвенты)

$$t^3-pt^2-4rt+4pr-q^2=0. \tag{8}$$

1. Если $4pr-q^2=0$, то $t_1=0$ и из равенства (7) получим разложение

$$x^4+px^2+qx+\frac{q^2}{4p}=\left(x^2+\sqrt{-p}x-\frac{q}{2\sqrt{-p}}\right)\left(x^2-\sqrt{-p}x+\frac{q}{2\sqrt{-p}}\right),$$

где $p\neq 0$ и q – произвольные комплексные числа. В этом случае разложение можно записать так: $x^4+px^2\pm 2\sqrt{pr}x+r=\left(x^2+\sqrt{-p}x\mp\sqrt{-r}\right)\left(x^2-\sqrt{-p}x\pm\sqrt{-r}\right)$, где p и r – произвольные комплексные числа.

2. Если $r=\left(2p^3+27q^2\right)/(72p)$, то при $p\neq 0$ справедливо разложение $M_4=x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\dfrac{m}{3}x+\dfrac{p}{6}-\dfrac{3q}{2m}\right)\left(x^2-\dfrac{m}{3}x+\dfrac{p}{6}+\dfrac{3q}{2m}\right)$, где $m=\sqrt{-6p}$.

3. Если $r=\left((p+q)^2-q\right)/4$, то справедливо разложение

$$M_4=\left(x^2+mx+(p+q-m)/2\right)\left(x^2-mx+(p+q+m)/2\right),\text{ где } m=\sqrt{q}.$$

4. Если $r=\left(\left(p^2+q\right)/(2p)\right)^2-pq/4$, то справедливо разложение

$$M_4=\left(x^2+mx+\left(p^2+q\right)/(2p)-pm/2\right)\left(x^2-mx+\left(p^2+q\right)/(2p)+pm/2\right),\ m=\sqrt{q/p}.$$

5. $x^4+ax^3+bx^2+cx+c(ab-c)/a^2=\left(x^2+c/a\right)\left(x^2+ax+(ab-c)/a\right)$.

6. $x^4+ax^3+bx^2+cx+(c/a)^2=\left(x^2-t_1x+c/a\right)\left(x^2-t_2x+c/a\right)$, где t_1 и t_2 – корни квадратного уравнения $t^2+at+b-2c/a=0$.

7. Если $r=q^2\left(1+1/(p-q)\right)/4$, то справедливо разложение

$$M_4=\left(x^2+mx+\frac{q}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right)\left(x^2-mx+\frac{q}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right),\text{ где } m=\sqrt{q-p}.$$

8. Если $r=\left(p(q+1)/(2q)\right)^2-q^3/(4p)$, то справедливо разложение

$$M_4=\left(x^2+mx-\frac{q^2m}{2p}+n\right)\left(x^2-mx+\frac{q^2m}{2p}+n\right),\text{ где } n=p(q+1)/(2q),\ m=\sqrt{p/q}.$$

9. Если $r=\left(p(q+1)/2\right)^2-q/(4p)$, то справедливо разложение

$$M_4=\left(x^2+mx-\frac{m}{2p}+n\right)\left(x^2-mx+\frac{m}{2p}+n\right),\text{ где } n=p(q+1)/2,\ m=\sqrt{pq}.$$

10. Если $r=pq^2\Big/\left(4\left(p^2-q\right)\right)+\left(q/(2p)\right)^2$, то справедливо разложение

$$M_4=\left(x^2+mx+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{m}\right)\right)\left(x^2-mx+\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{m}\right)\right),\text{ где } m=\sqrt{q/p-p}.$$

11. Если $r=\left(\left(p^2-3q\right)\Big/(2p)\right)^2+pq/12$, то справедливо разложение

$$M_4=\left(x^2+mx+\frac{p}{2}\left(1+\frac{m}{3}\right)+\frac{m^2}{2}\right)\left(x^2-mx+\frac{p}{2}\left(1-\frac{m}{3}\right)+\frac{m^2}{2}\right),\text{ где } m=\sqrt{-3q/p}.$$

Так как в равенстве (7) $t=p+k^2$, то разложение (7) можно записать без радикалов следующим образом

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+kx+\left(p+k^2-q/k\right)\Big/2\right)\left(x^2-kx+\left(p+k^2+q/k\right)\Big/2\right), \qquad (9)$$

где k – любой корень бикубической относительно k резольвенты (8), которую можно представить в виде

$$r=\left(\left(p+k^2\right)\Big/2\right)^2-\left(q/(2k)\right)^2. \qquad (10)$$

Итак, для представления любого полинома четвертой степени с произвольными комплексными коэффициентами p, q и r в виде произведения квадратичных множителей (9) достаточно найти один корень k уравнения (10). И, наоборот, для произвольных комплексных значений параметров p, q и k получим разложение (9) полинома специального вида x^4+px^2+qx+r, где коэффициенты p, q произвольны, а коэффициент r определяется равенством (10). Ниже даны примеры разложений частного вида, полученных из (9), (10) для некоторых конкретных значений k.

12. Полагая $k=1$, находим $r=\left((p+1)^2-q^2\right)\Big/4$ и получим разложение

$$M_4=\left(x^2+x+(p-q+1)/2\right)\left(x^2-x+(p+q+1)/2\right).$$

13. Полагая $k=q$, находим $r=\left(\left(p+q^2\right)^2-1\right)\Big/4$ и получим разложение

$$M_4=\left(x^2+qx+\left(p+q^2-1\right)\Big/2\right)\left(x^2-qx+\left(p+q^2+1\right)\Big/2\right).$$

14. Полагая $k=\sqrt{p}$, находим $r=p^2-q^2/(4p)$ и получим разложение

$$M_4=\left(x^2+kx+p-q/(2k)\right)\left(x^2-kx+p+q/(2k)\right).$$

15. Для любых комплексных m и n справедливо разложение

$$x^4+2mx^2+n\sqrt{\pm n}x\pm nm+m^2=\left(x^2\pm\sqrt{\pm n}x+m\right)\left(x^2\mp\sqrt{\pm n}x\pm n+m\right).$$

16. Уравнение $z^4+az^3+bz^2+\left(a^3-4ab\right)z/8+d=0$, где коэффициенты a, b и d произвольные комплексные числа, подстановкой $z=x-a/4$ приводится к биквадратному уравнению $x^4-\left(3a^2-8b\right)x^2/8+\left(5a^4-16a^2b+256d\right)/256=0$ и, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах.

17. Кратные корни. Если полином M_4 имеет корень кратности 2, 3 или 4, то его коэффициенты удовлетворяют условию Ф. Клейна [20, с. 143]

$$\left(\left(p^2+12r\right)/12\right)^3-27\left(\left(2p^3-72pr+27q^2\right)/216\right)^2/4=0. \tag{11}$$

Если выполняются равенства $r=p^2/4$ и $27q^2=32p^3$, $p\neq 0$, то полином M_4 имеет ровно один двукратный корень $x_{1,2}=q\left(p^2+12r\right)/\left(2p^3-8pr+9q^2\right)$.

Полином x^4+px^2+qx+r имеет два двукратных корня только в случае, когда $q=0$ и $r=p^2/4$: $x^4+px^2+p^2/4=\left(x^2+p/2\right)^2$. Если выполняются равенства $p^2+12r=0$ и $8p^3+27q^2=0$, которое следует из условия (11) при $r=-p^2/12$, то полином x^4+px^2+qx+r имеет трехкратный корень $x_{1,2,3}=2p^2/(9q)=-8r/(3q)$.

Полином x^4+px^2+qx+r имеет четырехкратный корень только при $p=q=r=0$.

Теорема 8. *Если уравнение* $x^4+wx^3+px^2+qx+r=0$ *имеет корни* a, b, c, d, *то уравнение* $z^4+qz^3+prz^2+wr^2z+r^3=0$ *имеет корни* abc, abd, acd, bcd.

Уравнение пятой степени

О кратных корнях. Выражение для двукратного корня полинома пятой степени в каноническом виде $M_5=x^5+bx^3+cx^2+dx+e$ слишком громоздко и здесь не приводится, однако если $b=0$, то двукратный корень равен $x_{1,2}=-\left(27c^3d+375ce^2-400d^2e\right)/\left(2\left(27c^4+300cde-160d^3\right)\right)$, при условии, что такой корень один. Если полином M_5 имеет два двукратных корня, то они являются корнями квадратного уравнения

$$\left(12b^3-40bd+45c^2\right)x^2+2\left(4b^2c-25be+30cd\right)x+4b^2d+75ce=0$$

и уравнение $M_5=0$ разрешимо в квадратных радикалах.

Если полином M_5 имеет трехкратный корень, то он так же, как и двукратный корень, выражается через коэффициенты в рациональном виде. Если $c=0$ этот корень имеет вид $k_{1,2,3}=100e/\left(21b^2-100d\right)$ и при $21b^2-100d\neq 0$ уравнение $M_5=0$ разрешимо в квадратных радикалах. Если $21b^2-100d=0$ и $c=0$, то полином M_5 не имеет трехкратных и четырехкратных корней [9, 10].

Разложения на множители полиномов пятой степени специального вида можно получить из разложений полиномов шестой степени, которые даны ниже. Здесь приведем лишь три разложения:

$$x^5+cx^3+dx^2+ex+\frac{d(c\pm w)}{2}=\left(x^2+\frac{c\pm w}{2}\right)\left(x^3+\frac{c\mp w}{2}x+d\right), \text{ где } w=\sqrt{c^2-4e},$$

$$x^5+bx^3+cx^2+b^2x/4+bc/2=\left(x^2+b/2\right)\left(x^3+bx/2+c\right),$$

$$x^5+bx^4+cx^3+dx^2+bdx+cd=\left(x^3+d\right)\left(x^2+bx+c\right).$$

Уравнение шестой степени

О кратных корнях. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы полином $x^6+cx^4+ex^2+g$ имел ровно два двукратных корня, является равенство $4c^3g-c^2e^2-18ceg+4e^3+27g^2=0$ при условии, что $c^2\neq 3e$. В этом случае получим разложение $x^6+cx^4+ex^2+g=\left(x^2-k\right)^2\left(x^2-m\right)$, где k и m можно найти по формулам $k=(9g-ce)\big/\left(2c^2-6e\right)$, $m=g\left(c^2-3e\right)\big/\left(3cg-e^2\right)$. Если $c^2=3e$ и $g=c^3/27$, то полином $x^6+cx^4+ex^2+g$ имеет два трехкратных корня равных $\pm\sqrt{-c/3}$, которые будут действительными числами лишь для действительных $c\le 0$ [9, 10].

Найдем условия, при которых полином шестой степени в каноническом виде можно представить произведением полиномов третьей степени в каноническом виде

$$x^6+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g=\left(x^3+px+q\right)\left(x^3+rx+k\right), \tag{12}$$

где коэффициенты c, d, e, f, g – произвольные комплексные числа.

Теорема 9. *Для того чтобы выполнялось равенство (12) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$g\left(c^2-4e\right)-cdf+d^2e+f^2=0. \tag{13}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполняется равенство (13). Рассмотрим два возможных случая. Если $c^2-4e=0$, то из равенства (13) найдем $f=cd/2$. В этом случае разложение (12) имеет вид

$$x^6+cx^4+dx^3+\frac{c^2}{4}x^2+\frac{cd}{2}x+g=\left(x^3+\frac{c}{2}x+\frac{d+v}{2}\right)\left(x^3+\frac{c}{2}x+\frac{d-v}{2}\right), \tag{14}$$

где $v=\sqrt{d^2-4g}$. Если $c^2-4e\neq 0$, то, выражая g из равенства (13), получим

$$x^6+cx^4+dx^3+ex^2+fx+\frac{cdf-d^2e-f^2}{c^2-4e}=$$
$$=\left(x^3+\frac{c+w}{2}x+\frac{d}{2}+\frac{cd-2f}{2w}\right)\left(x^3+\frac{c-w}{2}x+\frac{d}{2}-\frac{cd-2f}{2w}\right), \tag{15}$$

где $w=\sqrt{c^2-4e}$.

Необходимость. Пусть выполняется равенство (12). Следовательно, выполняются пять равенств: $c=p+r$, $e=pr$, $d=q+k$, $g=qk$, $f=pk+qr$. Из первых двух равенств находим $p_{1,2}=\left(c\pm\sqrt{c^2-4e}\right)\big/2$, $r_{1,2}=\left(c\mp\sqrt{c^2-4e}\right)\big/2$. Из следующих двух равенств имеем $q_{1,2}=\left(d\pm\sqrt{d^2-4g}\right)\big/2$, $k_{1,2}=\left(d\mp\sqrt{d^2-4g}\right)\big/2$. Подставляя эти выражения коэффициентов p, k, q, r в равенство $f=pk+qr$, после преобразований получим равенство (13).

Следствие. При $g=d^2/4$ разложение (14) принимает вид

$$x^6+cx^4+dx^3+c^2x^2/4+cdx/2+d^2/4=\left(x^3+cx/2+d/2\right)^2,$$

и полином имеет три двукратных корня. Если $g=d^2/4$ и $2c^3+27d^2=0$, то полином имеет один двукратный и один четырехкратный корень.

Приведем различные представления полинома шестой степени $M_6=x^6+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$, у которого все ненулевые коэффициенты кроме одного свободны (произвольны), в виде произведения двух полиномов третьей степени.

1. $x^6+cx^4+dx^3+ex^2+g=\left(x^3+kx^2+(d-n)/2\right)\left(x^3-kx^2+(d+n)/2\right)$, где один связанный коэффициент $g=\left(cd^2+e^2\right)\big/(4c)$, $k=\sqrt{-c}$, $n=e/k$.

2. $M_6=\left(x^3 \pm mx^2+fx/d+(n+d)/2\right)\left(x^3 \mp mx^2+fx/d-(n-d)/2\right)$,

где $m=\sqrt{2f/d-c}$, $n=\sqrt{d^2-4g}$. Здесь коэффициенты c, d, f, g свободны, а связанный коэффициент e является одним из корней квадратного относительно e уравнения $d^4e^2-2d^2f^2e+cd^6-4cd^4g-2d^5f+8d^3fg+f^4=0$.

3. $M_6=\left(x^3+mx^2+(n+f)x/(2s)+s\right)\left(x^3-mx^2-(n-f)x/(2s)+s\right)$,

$s=\sqrt{g}$, $m=\sqrt{f/s-c}$, $n=\sqrt{f^2-4ge}$. Здесь свободны коэффициенты c, e, f, g, а d находится из уравнения $s^3d^2-4s^4d-4ces^3+cf^2s+4efs^2-f^3+4s^5=0$.

4. $x^6+cx^4+dx^3+ex^2 \pm fx+g=\left(x^3+kx^2+mx+s\right)\left(x^3-kx^2+nx+s\right)$,

где $m=\left((\pm 2g-ds)k-cf+f^2/s\right)/(2t)$, $n=\left((\mp 2g+ds)k-cf+f^2/s\right)/(2t)$, $s=\sqrt{g}$, $t=f-cs$, $k=\sqrt{t/s}$. Здесь коэффициенты c, d, f, g свободны, а связанный коэффициент e находится из равенства $e=\left(-s(d \mp 2s)^2/t+f^2/g\right)/4$.

Рассмотрим теперь разложения полинома шестой степени на полиномы второй и четвертой степеней.

5. $M_6=\left(x^2+f/d\right)\left(x^4+(cd-f)x^2/d+dx+dg/f\right)$, где g дается равенством $g=f\left(f^2-cdf+d^2e\right)/d^3$, а коэффициенты c, d, e, f свободны.

6. $M_6=\left(x^2-kx+n\right)\left(x^4+kx^3+\left(k^2+c-n\right)x^2+\left(k^3+ck-2nk+d\right)x+k^2n\right)$,

где $k=(f-dn)/\left(n(c-dn)\right)$, параметр n находится из квадратного уравнения $\left(d^2-4g\right)n^2+2(2cg-df)n+f^2-c^2g=0$. Коэффициенты c, d, f, g свободны, а коэффициент e находится из равенства $e=-k^4+(4n-c)k^2-dk+cn-n^2$.

7. $M_6=\left(x^2-kx+m\right)\left(x^4+kx^3+\left(k^2+2\right)x^2+knx+n^2\right)$,

где $k=f/\left(n(m-n)\right)$, $n=\pm\sqrt{g/m}$, $m=c-2$. Коэффициенты c, f, g свободны, а связанные коэффициенты d, e находятся из равенств $d=-k\left(k^2-n-c+4\right)$, $e=fk/n+n^2+2m$. Так как полином четвертой степени является возвратным, то он раскладывается на квадратичные множители и, следовательно, разложение 7 может быть записано с использованием лишь квадратных радикалов.

8. $M_6=\left(x^2-kx+n\right)\left(x^4+kx^3+\left(k^2+c-n\right)x^2+\left(ck+d+k^3-2n^3\right)x+m\right)$,

где $m=\left(ckn+dn-f+k^3n-2kn^2\right)/k$, n – любой корень квадратного уравнения $3kn^2-\left(2ck+d+4k^3\right)n+k^5+ck^3+dk^2+ek+f=0$, k произвольно. Коэффициенты c, d, e, f свободны, а g находится из равенства $g=nm$.

9. Приведем разложение возвратного полинома шестой степени

$$x^6+bx^5+cx^4+dx^3+cnx^2+bn^2x+n^3=\left(x^2-t_1x+n\right)\left(x^2-t_2x+n\right)\left(x^2-t_3x+n\right),$$

где коэффициенты n, b, c, d произвольны, а t_i – корни кубической резольвенты $t^3+bt^2+(c-3n)t+d-2bn=0$.

10. Возвратный полином шестой степени можно представить в виде произведения квадратного трехчлена и возвратного полинома четвертой степени

$$x^6+bx^5+cx^4+dx^3+ncx^2+n^2bx+n^3=\left(x^2+(b-k)x+n\right)\left(x^4+kx^3+mx^2+knx+n^2\right),$$

где $m = k^2 - kb - n + c$, коэффициенты n, b, c, d произвольны. Коэффициент k – любой корень кубического уравнения $k^3 - 2bk^2 - \left(3n - b^2 - c\right)k + b\left(n - c\right) + d = 0$. Если параметр k выражается из кубического уравнения через квадратные радикалы из коэффициентов, то и возвратный полином шестой степени также можно выразить лишь через квадратные радикалы.

Несколько приложений к задачам механики

В работе [12] получен критерий положительности полинома четвертой степени, который для приведенного полинома можно сформулировать следующим образом. Полином четвертой степени $M_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ с действительными коэффициентами p, q и r положителен на действительной оси тогда и только тогда, когда выполняется требование

$$\left\{(\Delta > 0) \wedge \left[(p > 0) \vee \left(r > p^2/4\right)\right]\right\} \vee \left\{(\Delta = 0) \wedge (p > 0) \wedge \left(r = p^2/4\right) \wedge (q = 0)\right\}, \tag{16}$$

где $\Delta = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3$. Так как Δ является полиномом четвертой степени относительно коэффициента p, третьей относительно r и биквадратным относительно q, то исследование неравенства $\Delta > 0$ в символьном виде вызывает затруднение. Однако, используя результаты работы [19], здесь предлагается следующий равносильный (16) критерий. Полином четвертой степени $M_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ с действительными коэффициентами p, q и r положителен на действительной оси тогда и только тогда, когда выполняется требование

$$q \in (-Q, Q) \wedge \left\{\left(r > p^2/4\right) \vee \left[(p > 0) \wedge \left(0 < r \le p^2/4\right)\right]\right\}, \tag{17}$$

где $Q = \sqrt{6}\left(pS - p^2 + 12r\right)\Big/\left(9\sqrt{S - p}\right)$, $S = \sqrt{p^2 + 12r}$. Проверка выполнения условия (17) проще, чем проверка условия (16). В частности, из (17) видно, что при $r \le 0$ полином $M_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ не может быть положительным на всей действительной оси (например, при $x = 0$, очевидно, $M_4(0) = r \le 0$). Кроме того, для конкретных значений коэффициентов p, q и r условие (17) показывает насколько далеко эти значения от границы положительности полинома.

В работе [14] ключевую роль играют корни характеристического уравнения

$$k^4 + \left(\alpha^2 - R\right)k^2 + 2i\alpha\omega k - \omega^2 = 0. \tag{18}$$

Условие $r = \left(2p^3 + 27q^2\right)\Big/\left(72p\right)$, при котором справедливо разложение 2 настоящей работы на коэффициенты полинома $M_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ для уравнения (18), запишется в виде $18\omega^2\left(\alpha^2 + 2R\right) - \left(\alpha^2 - R\right)^3 = 0$. При этом условии корни уравнения (18), выражаются через параметры α, R и ω с помощью квадратных (не кубических) радикалов.

Аналогично, разложение 3 выполняется, если выполняются равенства $R = \left(2\alpha^2 - 1\right)/2$ и $16\omega^2\left(\alpha^2 - 1\right) - 1 = 0$.

Разложение 4 выполняется, если $R = \alpha^2 - 2$ и $\omega^2\left(\alpha^2 - 4\right) - 4 = 0$.

Разложение 7 выполняется, если выполняется равенство $R = \alpha^4\Big/\left(\alpha^2 - 1\right) - 2i\alpha\omega$.

Разложение 11 выполняется, если $R = \alpha^2 - 18$ и $\omega^2\left(\alpha^2 - 36\right) - 2916 = 0$.

Разложение 12 выполняется, если $4\omega^2\left(\alpha^2 + 1\right) - \left(\alpha^2 + 1 - R\right)^2 = 0$.

Итак, если параметры α, R и ω связаны любым из приведенных здесь условий, то корни уравнения (18) выражаются через квадратные радикалы.

Заключение

Предложены разложения на множители полиномов невысоких степеней специального вида. Выражения для кратных корней уравнений третьей и четвертой степени даны в рациональном виде, для уравнений пятой и шестой степени специального вида – через квадратные радикалы. Представлены разложения на множители возвратных полиномов шестой степени. Приведены теоремы, позволяющие конструировать для исходных уравнений связанные (сопряженные) с ними уравнения, корни которых выражаются через квадратные радикалы, а затем по найденным корням находить корни исходного уравнения (см., например, теорему 5). Полученные результаты могут быть полезны при аналитическом исследовании алгебраических уравнений, возникающих в задачах механики, физики.

Литература

1. Mochimaru, Y. Reciprocal solution of a quartic equation / Y. Mochimaru // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 14, no. 2. – P. 207–210.

2. Hebison-Evans, D. Solving Quartics and Cubics for Graphics / D. Hebison-Evans // Technical Report TR94-487, Basser Dept. Computer Science, Univ. Sydney, 2004.

3. Schmakov, S.I. A Universal Method of Solving Quartic Equations / S.I. Schmakov // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 71, no. 2. – P. 251–259.

4. Переломов, А.М. Гипергеометрические решения некоторых алгебраических уравнений / А.М. Переломов // Теоретическая и математическая физика. – 2004. – Т. 140, № 1. – С. 3–13.

5. Галиева, Л.И. Об одном классе уравнений, разрешимых в радикалах / Л.И. Галиева, И.Г. Галяутдинов // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 2. – С. 22–30.

6. Михалкин, Е.Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций / Е.Н. Михалкин // Сиб. мат. журн. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 365–371.

7. Зеленова, М.Е. Решение полиномиальных уравнений в поле алгебраических чисел / М.Е. Зеленова // Вестн. Моск. Ун-та. Серия 1. Математика, механика. – 2014. – № 1. – С. 25–29.

8. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений методом Рутисхаузера–Никипорца / В.И. Шмойлов, М.В. Хисамутдинов, Г.А. Кириченко // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2015. – Т. 15, № 1. – С. 63–79.

9. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.

10. Трубников, Ю.В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2(54). – С. 65–85.

11. Гашков, С.Б. О сложности интегрирования рациональных дробей / С.Б. Гашков // Труды МИАН. – 1997. – Т. 218. – С. 122–133.

12. Зубов, Л.М. Критерий сильной эллиптичности уравнений равновесия анизотропного линейно-упругого материала / Л.М. Зубов, А.Н. Рудев // Прикладная математика и механика. – 2016. – Т. 80, Вып. 6. – С. 686–721.

13. Акуленко, Л.Д. Изгибные колебания движущегося стержня / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, Вып. 5. – С. 759–774.

14. Акуленко, Л.Д. Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки / Л.Д. Акуленко, Д.В. Георгиевский, С.В. Нестеров // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 2. – С. 139–144.

15. Землянухин, А.И. Нелинейное суммирование степенных рядов и точные решения эволюционных уравнений / А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев // Известия вузов. Математика. – 2018. – № 1. – С. 34–41.

16. Ватульян, А.О. О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур / А.О. Ватульян, Е.Л. Коссович, Д.К. Плотников // МТТ. – 2017. – № 4. – С. 94–100.

17. Васильев, В.В. К задаче устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии / В.В .Васильев // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 5–15.

18. Ильгамов, М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки / М.А. Ильгамов // ДАН. – 2017. – Т. 476, № 4. – С. 402–405.

19. Астапов, Н.С. Сравнительный анализ решений алгебраических уравнений третьей и четвертой степени / Н.С. Астапов, И.С. Астапов // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. – 2016. – Т. 16, № 1. – С. 14–28.

20. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2 т.: Т. 1: Арифметика, алгебра, анализ / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987. – 431 с.

21. Клейн, Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени / Ф. Клейн. – М.: УРСС, 2004. – 337 с.

Поступила в редакцию 15 декабря 2021 г.

Сведения об авторе

Астапов Николай Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация; доцент кафедры высшей математики, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация, e-mail: nika@hydro.nsc.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 3, pp. 5–16

DOI: 10.14529/mmph220301

ON THE SOLUTION OF ALGEBRAIC EQUATIONS OF SMALL DEGREES BY SQUARE RADICALS

N.S. Astapov[1,2]
[1] *Lavrentyev Institute of Hudrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*
E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Abstract. The work is devoted to the search for constructive analytical expressions for the roots of algebraic equations of the third-sixth degree by the coefficients of the equations. Relationships are obtained for the coefficients at which the roots of the equations are represented most simply, for example, rationally. Rational expressions for multiple roots are given. A condition is found under which the polynomial of the sixth degree in the canonical form can be represented by the product of polynomials of the third degree in the canonical form. Particular attention is paid to the symbolic expression of the roots of equations by square radicals from the coefficients. A method for solving equations using defining (generating, related to the original) equations is proposed. All the presented expansions are true of polynomials with arbitrary complex coefficients.

Keywords: solution by radicals; Cardano formulas; roots of polynomials; recurrent equations; defining equations.

References

1. Mochimaru Y. Reciprocal Solution of a Quartic Equation. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2004, Vol. 14, no. 2, pp. 207–210.

2. Hebison-Evans D. Solving Quartics and Cubics for Graphics. *Technical Report TR94-487*. updated 31 March 2011, 27 May 2017, 13 January 2019, Basser Department of Computer Science (now School of Information Technologies), University of Sydney, Australia. http://satd.com.au/don/pubs/solving.html

3. Schmakov S.I. A Universal Method of Solving Quartic Equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2011, Vol. 71, no. 2, pp. 251–259.

4. Perelomov A.M. Hypergeometric Solutions of Some Algebraic Equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, Vol. 140, no. 1, pp. 895–904. (in Russ.). DOI: 10.1023/B:TAMP.0000033027.63336.80

5. Galieva L.I., Galyautdinov I.G. One Class of Equations Solvable in Radicals. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2011, Vol. 55, no. 2, pp. 18–25. DOI: 10.3103/S1066369X11020034

6. Mikhalkin, E.N. On Solving General Algebraic Equations by Integrals of Elementary Functions. *Siberian Mathematical Journal*, 2006, Vol. 47, pp. 301–306. DOI: 10.1007/s11202-006-0043-4

7. Zelenova M.E. Solution of Polynomial Equations in the Field of Algebraic Numbers. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2014, Vol. 69, no. 1, pp. 24–28. DOI: 10.3103/S0027132214010045

8. Shmoylova V.I., Hisamutdinova M.V., Kirichenko G.A. The Solution of Algebraic Equations by the Method of Rutishauser–Nieporte. *Vestnik NGU. Series: Mathematics, mechanics, computer science*, 2015, Vol. 15, no. 1, pp. 63–79. (in Russ.).

9. Antipova I.A., Michalkin E.N. Rational Expressions for Multiple Roots of Algebraic Equations. *Sbornik: Mathematics*, 2018, Vol. 209, no. 10, pp. 1419–1444. DOI: 10.1070/SM8950

10. Trubnikov Yu.V., Chernyavsky M.M. Localization and Finding Solutions of Trinomial Algebraic Equations. *Mathematical Structures and Modeling*, 2020, no. 2(54), pp. 65–85. (in Russ.). DOI: 10.24147/2222-8772.2020.2.65-85

11. Gashkov S.B. On the Complexity of Integration of Rational Fractions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1997, Vol. 218, pp. 117–128.

12. Zubov L.M., Rudev A.N. Criterion For the Strong Ellipticity of the Equations of Motion of An Anisotropic Linear-Elastic Material. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, Vol. 80, no. 6, pp. 485–509. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.06.007

13. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Flexural Vibrations of a Moving Rod. *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, Vol.72, Iss. 5, pp. 550–560. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2008.11.008

14. Akulenko L.D., Georgievskii D.V., Nesterov S.V. Transverse Vibration Spectrum of a Part of a Moving Rod under a Longitudinal Load. *Mechanics of Solids*, 2015, Vol. 50, no. 2, pp. 227–231. DOI: 10.3103/S0025654415020120

15. Zemlyanukhin, A.I., Bochkarev, A.V. Nonlinear Summation of Power Series and Exact Solutions of Evolution Equations. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2018, Vol. 62, Iss. 1, pp. 29–35. DOI: 10.3103/S1066369X1801005X

16. Vatul'yan A.O., Kossovich E.L., Plotnikov D.K. Some Specific Characteristics of Indentation of Cracked Layered Structures. *Mechanics of Solids*, 2017, Vol. 52, no. 4, pp. 429–434. DOI: 10.3103/S0025654417040094

17. Vasil'ev V.V. To the Problem of Stability of a Cylindrical Shell under Axial Compression. *Mechanics of Solids*, 2011, Vol. 46, no. 2, pp. 161–169. DOI: 10.3103/S0025654411020026

18. Ilgamov M.A. Influence of Pressure of the Surrounding Medium on Thin Plate and Film Bending. *DAN*, 2017, Vol. 476, no. 4, pp. 402–405. (in Russ.). DOI: 10.7868/S086956521728009X

19. Astapov N.S., Astapov I.S. Comparative Analysis of Solutions to 3rd and 4th Order Algebraic Equations. *Sib. J. Pure and Appl. Math.*, 2016, Vol. 16, Iss. 1, pp. 14–28. (in Russ.). DOI: 10.17377/PAM.2016.16.102

20. Klein F. *Elementarnaya matematika s tochki zreniya vysshey. V 2 t.: T.1: Arifmetika, algebra, analiz* (Elementary Mathematics from the Point of View of Higher Mathematics. In 2 Vols.: Vol. 1: Arithmetic, algebra, analysis), Moscow, Nauka Publ., 1987, 431 p. (in Russ.).

21. Klein F. *Vorlesungen über das ikosaeler und die auflösung der gleichungen vom fünften grade*. Nobel Press, 2020, 280 p. (in German).

Received December 15, 2021

Information about the author

Astapov Nikolay Stepanovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Staff Scientist, Lavrentyev Institute of Hudrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation; Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation, e-mail: nika@hydro.nsc.ru.