УДК 517.9, 519.216.2 DOI: 10.14529/mmph220302

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В КВАДРАТЕ И В КРУГЕ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ВЕНТЦЕЛЯ

Н.С. Гончаров
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: goncharovns@susu.ru

Аннотация. В последнее время в математической литературе краевое условие Вентцеля рассматривается с двух точек зрения. В первом случае, назовем его классическим, это условие представляет собой уравнение, содержащее линейную комбинацию значений функции и ее производных на границе области. Причем сама функция удовлетворяет еще уравнению с эллиптическим оператором, заданным в области. Во втором, неоклассическом случае условие Вентцеля представляет собой уравнение с оператором Лапласа–Бельтрами, заданным на границе области, понимаемой как гладкое компактное риманово многообразие без края, причем внешнее воздействие представлено нормальной производной функции, заданной в области. Рассматриваются свойства оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля в неоклассическом смысле. В частности, построены собственные значения и собственные функции оператора Лапласа для системы уравнений Вентцеля в круге и в квадрате.

Ключевые слова: оператор Лапласа; динамическое условие Вентцеля.

Введение

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, – связная ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В дальнейшем в области Ω будем искать собственные значения оператора Лапласа

$$(\lambda - \Delta)u(x) = 0, x \in \Omega, \quad (1)$$

с граничным условием Вентцеля

$$\Delta v(x) + lv(x) = 0, x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

подразумевая под $\partial\Omega$ гладкое риманово многообразие без края, с нулевым условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, x \in \Omega, \quad (3)$$

и условием непрерывности решения

$$\operatorname{Tr} u = v. \quad (4)$$

Отметим, что хотя символом Δ в уравнении (1) обозначен оператор Лапласа, а в уравнении (2) – оператор Лапласа–Бельтрами, это в дальнейшем не вызовет путаницы. Более того, уравнение (2) будет рассматриваться исключительно в пространствах 0-форм. Здесь $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ – искомые функции, параметры l, $\lambda \in \mathbb{R}$, символом $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначена производная по внешней (относительно области Ω) нормали к границе $\partial\Omega$. В целом модель (1), (2) описывает процессы, протекающие в цитоплазме клетки и на ее мембране, и обобщает модель, предложенную в [1].

Исследование условий Коши с граничными условиями Вентцеля вида (2) впервые упоминается в работах [2, 3] при построении генератора полугруппы Феллера для многомерных диффузионных процессов в ограниченной области Ω. Спустя полстолетия список математических моделей, где вместе с рассматриваемой математической моделью (2) описывает процессы на границе области Ω, существенно пополнился. В [2] этот результат был использован при решении ряда прикладных задач. Первые итоги исследований в данном направлении были подведены в [4]. Кроме того, в [5] найдены условия аналитичности разрешающих C_0-непрерывных полугрупп операторов. Наконец, в [6] рассмотрен случай, когда оператор Δ заменен на Δ^2 в области Ω, на границе же по-прежнему оператор Лапласа–Бельтрами Δ. Отметим также, что особый интерес с нашей стороны представляется в [7], где была показана неединственность разрешимости задачи с динамическим условием Вентцеля, что в дальнейшем легло в [8] при описании подходящих условий для однозначной разрешимости задачи Вентцеля–Робена для уравнения Дзекцера.

Целью нашей работы является описание свойств оператора Лапласа для уравнения Гемгольца с динамическим условием Вентцеля. Статья кроме введения и списка цитируемой литературы содержит два параграфа. В первом параграфе рассматриваются собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля (1)–(4) в круге. Во втором параграфе рассматриваются собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля (1)–(4) в квадрате.

Собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля в круге

Рассмотрим поставленную задачу (1)–(4), где в качестве области Ω рассмотрим круг $K_R = \left\{(x,y): x^2+y^2 \le R^2\right\}$ радиуса R. Перейдем к нахождению собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и, соответствующих им, собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ для оператора Лапласа внутри круга с нулевым граничным условием Неймана, предварительно осуществив переход из декартовой системы координат в полярную. Уравнение (1) и условие (3) в полярных координатах (r,φ) имеют вид

$$u_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}u_r(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)-\lambda u(r,\varphi)=0 \tag{5}$$

$$u_r(R,\varphi)=0. \tag{6}$$

Используя метод Фурье для данной задачи, представив решения в виде $u(r,\varphi)=F(r)G(\varphi)$, получаем следующее соотношение

$$\frac{F_{rr}(r)+\frac{1}{r}F_r(r)-\lambda F(r)}{\frac{1}{r^2}F(r)}=-\frac{G_{\varphi\varphi}(\varphi)}{G(\varphi)}=\gamma,$$

что равносильно решению двух независимых уравнений

$$G_{\varphi\varphi}(\varphi)+\gamma G(\varphi)=0,$$

$$r^2F_{rr}(r)+rF_r(r)-\lambda r^2F(r)=F(r)\gamma. \tag{7}$$

Поскольку собственная функция должна быть периодической по φ с периодом 2π, то для $G(\varphi)$ получаем задачу Штурма–Лиувилля

$$r^2F_{rr}(r)+rF_r(r)-\lambda r^2F(r)=F(r)\gamma.$$

$$G(\varphi)=G(\varphi+2\pi), \tag{8}$$

решение которой имеет вид

$$G_n(\varphi)=C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi, \gamma=\gamma_n=n^2, n\in\{0\}\cup\mathbb{N}. \tag{9}$$

Нетрудно заметить, что второе уравнение в (7) при каждом $\gamma=n^2$ сводится к уравнению типа Бесселя путем следующих преобразований и замены $x=r\sqrt{-\lambda}$, где $\lambda<0$,

$$r^2F_{rr}(r)+rF_r(r)-F(r)(-\lambda r^2+\gamma)=0,$$

В силу нашей замены $x=r\sqrt{-\lambda}$, и того, что $\gamma=n^2$, преобразуем искомое уравнение в следующем виде

$$x^2F_{xx}(x)+xF_x(x)-F(x)(x^2-n^2)=0.$$

Решая полученное уравнение с нулевым граничным условием Неймана, получаем собственные значения в следующем виде

$$\lambda=\lambda_k^{(n)}=\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)^2,$$

где $\mu_k^{(n)}$ – нули функции Бесселя первого порядка $J_n(R\sqrt{-\lambda})$. С другой стороны, имеем на границе области выражение

$$r^2 G_{\varphi\varphi}(\varphi)F(r) + lF(r)G(\varphi) = 0,$$

что равносильно уравнению

$$J(\sqrt{-\lambda}R)(l - R^2 n^2) = 0, \tag{10}$$

в силу того, что $Tr\ u = v$ и $G_{\varphi\varphi}(\varphi) = -n^2 G(\varphi)$. Решая уравнение (10) в зависимости от ограничений на l имеем следующее

Утверждение 1.1 *Собственные значения оператора Лапласа в круге K_R с краевым условием Вентцеля (3) имеют вид*

$$\lambda = \lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)^2,$$

где $\mu_k^{(n)}$ – нули функции Бесселя первого порядка $J_n(x)$, если $l \ne R^2 n^2$.

В силу (9) каждая собственная функция

$$u_n(r,\varphi) = F_n(r)G_n(\varphi) = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)\left(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi\right)$$

будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2) и (3), а также условию непрерывности решения (4). Таким образом, общее решение задачи (1)–(4) в круге K_R имеет вид

$$u(r,\varphi) = \sum_{i,n=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)\left(C_1^i \cos n\varphi + C_2^i \sin n\varphi\right).$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по r и φ, то сумма его, очевидно будет решением рассматриваемого уравнения (1). Данное утверждение легко доказывается, например, из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости рассматриваемых рядов.

Собственные значения оператора Лапласа с краевым условием Вентцеля в квадрате

Рассмотрим теперь задачу (1)–(4), где в качестве области Ω рассмотрим квадрат $\Pi_\pi = \{(x,y) : (x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi]\}$ со стороной π. Перейдем к нахождению собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и, соответствующих им, собственных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ для оператора Лапласа внутри квадрата Π_π с нулевым граничным условием Неймана. Имеем,

$$(\lambda - \Delta)u(x) = 0, x \in \Omega, \tag{11}$$

$$\begin{cases} \text{на левой границе квадрата } u'(0,y) = 0, \\ \text{на верхней границе квадрата } u'(x,\pi) = 0, \\ \text{на правой границе квадрата } u'(\pi,y) = 0, \\ \text{на нижней границе квадрата } u'(x,0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Используя метод Фурье для данной задачи, представив решения в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$, получаем следующее соотношение

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = \mu,$$

что равносильно решению двух независимых уравнений

$$X_{xx}(x) - \mu X(x) = 0, X'(0) = 0, X'(\pi) = 0,$$

$$Y_{yy}(y)=(\lambda-\mu)Y(y), Y'(0)=0, Y'(\pi)=0,$$

Нетрудно заметить, что поскольку рассматриваются решения в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$, собственные функции $u_{nm}(x,y)$ и собственные значения λ_{nm} внутри квадрата имеют вид $u_{nm}(x,y)=\cos nx\cos my$ и $\lambda_{nm}=-n^2-m^2$ соответственно.

С другой стороны, изучая по аналогии собственные значения для оператора Лапласа на границе квадрата $\partial\Pi_\pi$ в силу условия на непрерывность решения (4) получим следующую систему из собственных значений и собственных функций на соответствующих сторонах Π_π^1, Π_π^2, Π_π^3, Π_π^4

$$\begin{cases} \lambda_m^{(1)}=-m^2, u_m^1(x,y)=\cos my, (x,y)\in\Pi_\pi^1=\{(x,y): x=0, 0<y<\pi\}, \\ \lambda_n^{(2)}=-n^2, u_{nm}^1(x,y)=(-1)^m\cos nx, (x,y)\in\Pi_\pi^2=\{(x,y): 0<x<\pi, y=\pi\}, \\ \lambda_n^{(3)}=-m^2, u_m^3(x,y)=\cos my, (x,y)\in\Pi_\pi^3=\{(x,y): x=\pi, 0<y<\pi\}, \\ \lambda_m^{(4)}=-n^2, u_{nm}^4(x,y)=(-1)^m\cos nx, (x,y)\in\Pi_\pi^4=\{(x,y): 0<x<\pi, y=0\}. \end{cases}$$

Имеет место следующее

Утверждение 2.1 *Собственные значения оператора Лапласа в квадрате* Π_π *с краевым условием Вентцеля (3) имеют вид*

$$\lambda=\lambda_k^{(n)}=-(2n)^2,$$

при условии, что $m=n$.

Поскольку собственные числа в квадрате – сумма собственных чисел по осям, нетрудно заметим, что каждая собственная функция

$$u_n(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx\cos ny$$

будет решением (1), удовлетворяющим граничным условиям (2) и (3), а также условию непрерывности решения (4).

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по x и y, то сумма его, очевидно, будет решением рассматриваемого уравнения (1). Данное утверждение легко доказывается, например, из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости рассматриваемых рядов.

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).

Литература

1. Goldstein, G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions / G.R. Goldstein // Advances in Differential Equations. – 2006. – Vol. 11, no. 14. – P. 457–480.

2. The heat equation with generalized Wentzell boundary condition / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // J. Evol. Equ. – 2002. – Vol. 2, Iss. 1. – P. 1–19.

3. Classification of general Wentzell boundary conditions for fourth order operators in one space dimension / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // Journal of Mathematical Analysis and. Applications. – 2007. – Vol. 333, Iss. 1. – P. 219–235.

4. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis / G.M. Coclite, A. Favini, C.G. Gal *et al.* // Advances in Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2009. – Vol. 3. – P. 279–292.

5. Апушинская, Д.Е. Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений / Д.Е. Апушинская, А.И. Назаров // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, Вып. 6. – С. 1–29.

6. Goncharov, N.S. Non-uniqueness of solutions to boundary value problems with Wentzell condition / N.S. Goncharov, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2021. – Т. 14, № 4. – С. 102–105.

7. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2010. – Т. 3, вып. 1. – С. 104–125.

8. Вентцель, А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов / А.Д. Вентцель // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – Т. 4, Вып. 2. – С. 172–185.

9. Феллер, В. Одномерные диффузионные процессы / В. Феллер // Математика. – 1958. – Т. 2, Вып. 2. – С. 119–146.

10. Лукьянов, В.В. Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов / В.В. Лукьянов, А.И. Назаров // Зап. научн. сем. ПОМИ – 1998. – Т. 250. – С. 203–218.

11. C_0-Semigroups Generated by Second order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions / A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 128, Iss. 7. – P. 1981–1989.

12. Denk, R. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains / R. Denk, M. Kunze, D. Ploss // Integral Equations and Operator Theory. – 2021. – Vol. 93, Iss. 2. – Article number: 13. – 26 p.

Поступила в редакцию 15 июля 2022 г.

Сведения об авторе

Гончаров Никита Сергеевич – аспирант, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: goncharovns@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2022, vol. 14, no. 3, pp. 17–22

DOI: 10.14529/mmph220302

EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF THE LAPLACE OPERATOR IN A SQUARE AND IN A CIRCLE WITH A WENTZEL BOUNDARY CONDITION

N.S. Goncharov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: goncharovns@susu.ru

Abstract. Recently, in the mathematical literature, the Wentzel boundary condition has been considered from two points of view. In the first case, let us call it a classical case, this condition is an equation containing a linear combination of the values of the function and its derivatives at the boundary of the domain. Meanwhile, the function itself also satisfies an equation with an elliptic operator given in the domain. In the second, neoclassical case, the Wentzel condition is an equation with the Laplace–Beltrami operator defined on the boundary of the domain, understood as a smooth compact Riemannian manifold without an edge; and the external effect is represented by the normal derivative of the function specified in the domain. The paper considers the properties of the Laplace operator with the Wentzel boundary condition in the neoclassical sense. In particular, eigenvalues and eigenfunctions of the Laplace operator are constructed for a system of Wentzel equations in a circle and in a square.

Keywords: Laplace operator; Wentzel dynamic condition.

References

1. Goldstein G.R. Derivation and Physical Interpretation of General Boundary Conditions. *Advances in Differential Equations*, 2006, Vol. 11, no. 14, pp. 457–480.

2. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. The Heat Equation with Generalized Wentzell Boundary Condition. *J. Evol. Equ.*, 2002, Vol. 2, Iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1007/s00028-002-8077-y

3. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. Classification of General Wentzell Boundary Conditions for Fourth Order Operators in one Space Dimension. *Journal of Mathematical Analysis and. Applications*, 2007, Vol. 333, no. 1, pp. 219–235.

4. Coclite G.M., Favini A., Gal C.G., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Obrecht E., Romanelli S. The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis. *Advances in Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, Vol. 3, pp. 279–292.

5. Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. The Initial-Boundary Value Problem for Nondivergent Parabolic Equations with Venttsel' Boundary Condition. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1995, Vol. 6, no. 6, pp. 1127–1149.

6. Goncharov N.S., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Non-Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems with Wentzell Condition. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software*, 2021, Vol. 14, no. 4, pp. 102–105.

7. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter–Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2010, Vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (in Russ.).

8. Venttsel' A.D. On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes. *Theory of Probability and its Applications*, 1959, Vol. 4, Iss. 2, pp. 164–177. DOI: 10.1137/1104014

9. Feller W. Diffusion Processes in One Dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1954, Vol. 77, Iss. 1, pp. 1–31.

10. Lukyanov V.V., Nazarov A.I. Solving the Venttsel Problem for the Laplace and Helmholtz Equations with the Help of Iterated Potentials. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2000, Vol. 102, Iss. 4, pp. 4265–4274. DOI: 10.1007/BF02673857

11. Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S. C_0-Semigroups Generated by Second order Differential Operators with General Wentzell Boundary Conditions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, Vol. 128, Iss. 7, pp. 1981–1989. DOI: 10.1090/S0002-9939-00-05486-1

12. Denk R., Kunze M., Ploss D. The Bi-Laplacian with Wentzell Boundary Conditions on Lipschitz Domains. *Integral Equations and Operator Theory*, 2021, Vol. 93, Iss. 2, Article number 13, 26 p. DOI: 10.1007/s00020-021-02624-w

Received July 15, 2022

Information about the author

Goncharov Nikita Sergeevich is Post-graduate Student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: goncharovns@susu.ru.