УДК 519.635 DOI: 10.14529/mmph220303

К ИДЕНТИФИКАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ И ДРУГИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

***М.Л. Зайцев*[1]*, В.Б. Аккерман*[2]**
[1] *г. Москва, Российская Федерация*
[2] *Университет Западной Вирджинии, г. Моргантаун, Соединенные Штаты Америки*
E-mail: mlzaytsev@gmail.com, Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Аннотация. Авторами был предложен ранее общий способ нахождения частных решений у переопределенных систем УрЧП, где число уравнений больше числа неизвестных функций. Суть метода заключается в сведении УрЧП к системам УрЧП меньшей размерности, в частности, к ОДУ путем их переопределения дополнительными уравнениями связи. При редукции некоторых систем УрЧП возникают переопределенные системы полиномиальных ОДУ, которые исследуются в данной работе. Предлагается способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. Результат интересен с теоретической точки зрения, если эти системы полиномиальных ОДУ будут с постоянными коэффициентами. Решение таких нелинейных систем с помощью нашего метода может быть представлено в виде суммы очень большого, но конечного количества колебаний. Амплитуды этих колебаний зависят от начальных данных нелинейно. К таким системам можно преобразовать уравнения Навье–Стокса и унифицированные системы УрЧП, полученные авторами ранее. Исследуется также уравнение Риккати. Указываются новые частные случаи, когда можно найти его решение. Приводятся численные оценки о сложности данного метода при его практической реализации.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений; редукция; полиномиальные системы ОДУ; размерность дифференциальных уравнений; задача Коши; уравнение Риккати; линейные системы ОДУ; уравнения Навье–Стокса; унификация систем УрЧП, символьные вычисления.

Дифференциальные уравнения в частных производных очень важны для исследований в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и т. д. [1, 2]. В работах [3, 4] предложена унификация внешнего вида систем УрЧП. В работах [5–8] предложено сведение систем УрЧП к системам УрЧП меньшей размерности, в частности, к системам ОДУ путем их переопределения дополнительными уравнениями связи. Были предложены различные способы переопределения как отдельных систем УрЧП, так и УрЧП общего вида [5, 6, 9]. При редукции некоторых систем УрЧП в частности, унифицированных УрЧП или уравнений Навье–Стокса, на основе метода переопределения, изложенного в работе [10], возникают переопределенные параметрические системы полиномиальных ОДУ. Таким образом, исследование и нахождение решений полиномиальных систем ОДУ важно для получения решений УрЧП в явном виде.

Не всякую переопределенную систему ОДУ можно решить в явном виде методом редукции, в частности, если взять первый интеграл в качестве уравнения связи. Требуется найти такой способ решения систем УрЧП на основе метода переопределения, чтобы он мог работать и в случаях неполного их переопределения, т. е. когда прямой алгоритм нахождения решений не работает. Цель данной работы заключается в том, чтобы предложить способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. В частности, если коэффициенты в этих уравнениях будут постоянные, то решение находится в явном виде. На примере частного приема нахождения и исследования решения переопределенной системы из двух полиномиальных уравнений строится общий способ такого преобразования. В качестве дополнения исследуется уравнение Риккати. Указываются новые частные случаи, когда можно найти его решение. Также приводятся численные оценки о сложности данного метода при его практической реализации.

Рассмотрим следующую переопределённую систему ОДУ:

$$\frac{dx}{dt}=a_1x^2+b_1x+c_1, \tag{1}$$

$$a_2x^2+b_2x+c_2=0, \tag{2}$$

где $a_1=a_1(t)$, $a_2=a_2(t)\neq 0$, $b_1=b_1(t)$, $b_2=b_2(t)$, $c_1=c_1(t)$, $c_2=c_2(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции от $t\in[0,T]$, $T>0$. Пусть к системе (1), (2) поставлена задача Коши $x|_{t=0}=x_0$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Умножим обе части (1) и (2) на x. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(x^2\right)=2a_1x^3+2b_1x^2+2c_1x, \tag{3}$$

$$a_2x^3+b_2x^2+c_2x=0. \tag{4}$$

Обозначим

$$R=x,\ Q=x^2,\ S=x^3. \tag{5}$$

Тогда уравнения (1)–(4) можно записать в виде

$$\frac{dR}{dt}=a_1Q+b_1R+c_1, \tag{6}$$

$$a_2Q+b_2R+c_2=0, \tag{7}$$

$$\frac{dQ}{dt}=2a_1S+2b_1Q+2c_1R, \tag{8}$$

$$a_2S+b_2Q+c_2R=0. \tag{9}$$

Поставим к (6)–(9) задачу Коши

$$R|_{t=0}=x_0,\ Q|_{t=0}=(x_0)^2,\ S|_{t=0}=(x_0)^3. \tag{10}$$

Пусть R, Q, S – решение системы (6)–(9) с задачей Коши (10), определенное на отрезке $[0,T]$. Обозначим

$$L_1=\frac{dR}{dt}-a_1R^2+b_1R+c_1,\ L_2=a_2R^2+b_2R+c_2,\ M_2=Q-R^2,\ M_3=S-R^3. \tag{11}$$

Делая очевидные преобразования, из системы (6)–(9) получим следующую систему уравнений относительно L_1, L_2, M_2, M_3:

$$a_2M_2+L_2=0, \tag{12}$$

$$a_2M_3+b_2M_2+RL_2=0, \tag{13}$$

$$L_1=a_1M_2, \tag{14}$$

$$\frac{dM_2}{dt}=\frac{dQ}{dt}-2R\frac{dR}{dt}=2a_1M_3+2b_1M_2-2RL_1. \tag{15}$$

Делая очевидные подстановки, из (12)–(15) находим, что

$$L_1=a_1M_2,\ L_2=-a_2M_2,\ M_3=\frac{a_2R-b_2}{a_2}M_2, \tag{16}$$

$$\frac{dM_2}{dt}=2\left(\frac{b_1a_2-b_2a_1}{a_2}\right)M_2, \tag{17}$$

Таким образом, мы видим, что, если R, Q, S – решение системы (6)–(9) с задачей Коши (10), определенное на отрезке $[0,T]$, то, исходя из обозначений (11), из (16), (17) следует, что $L_1=0$, $L_2=0$, $M_2=0$, $M_3=0$ на отрезке $[0,T]$. Следовательно, R является решением (1), (2) с задачей Коши $x|_{t=0}=x_0$, $x_0\in\mathbb{R}$. Здесь мы учли известный факт из теории линейных ОДУ, что если коэффициенты непрерывны на некотором отрезке, то решение задачи Коши существует и единственно на этом же отрезке [11]. Уравнение (17) относительно M_2 имеет только одно нулевое решение на отрезке $\left[0,T\right]$ с нулевыми начальными данными.

Решим теперь систему уравнений (6)–(9). Из (7) и (9) следует, что

$$Q=AR+B,\ S=CR+D, \tag{18}$$

где

$$A=-\frac{b_2}{a_2},\ B=-\frac{c_2}{a_2},\ C=\frac{\left(\left(b_2\right)^2-a_2c_2\right)}{\left(a_2\right)^2},\ D=\frac{b_2c_2}{\left(a_2\right)^2}. \tag{19}$$

Подставим (18) в уравнения (6) и (8). Имеем

$$\frac{dR}{dt}=\left(a_1A+b_1\right)R+a_1B+c_1, \tag{20}$$

$$A\frac{dR}{dt}=\left(-\frac{dA}{dt}+2a_1C+2b_1A+2c_1\right)R+\left(-\frac{dB}{dt}+2a_1D+2b_1B\right). \tag{21}$$

Из (20), (21) находим решение

$$R=\frac{\dfrac{dB}{dt}+a_1AB+c_1A-2a_1D-2b_1B}{-\dfrac{dA}{dt}-a_1A^2-b_1A+2a_1C+2b_1A+2c_1}. \tag{22}$$

Решение (22) должно удовлетворять (20) или (21), а также R, Q, S из (18) должны быть согласованы при $t=0$ по формулам (10), т. к. мы решаем (6)–(9) с задачей Коши (10). Тогда по формулам (5) определяется решение исходной системы (1), (2) с задачей Коши $x\big|_{t=0}=x_0$, которая не может быть произвольной для переопределённой системы ОДУ. Фактически решение **нелинейной** переопределенной системы уравнений (1), (2) мы свели к решению переопределенной системы **линейных** уравнений (20), (21). Если подобрать a_2, b_2, c_2 таким образом, чтобы знаменатель в формуле (22) равен нулю, то R находится из решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка, которое может быть найдено в общем виде [11]. Уравнение (1) называется уравнением Риккати. Если известно одно из его частных решений, то находится общее решение этого уравнения в явном виде [12]. Зафиксируем коэффициенты a_1, b_1, c_1 в уравнении (1). Если мы затем подберем коэффициенты a_2, b_2, c_2 в уравнении (2), чтобы выражение (22) было частным решением (1), то мы найдем общее решение уравнения Риккати. Однако выкладки показывают, что коэффициенты можно подобрать не для произвольных a_1, b_1, c_1. Доказано, что общее уравнение Риккати нельзя получить в виде конечной формулы для любых коэффициентов a_1, b_1, c_1 [12]. Однако его можно найти в многих частных случаях, если особым образом выбрать параметры a_1, b_1, c_1. В уравнении (2) вместо квадратного многочлена можно взять многочлен любой другой степени и получить новые случаи, когда можно найти частные решения (1), (2).

На основе приема, использованного в данном примере, предложим следующий метод нахождения решений полиномиальных систем ОДУ. Рассмотрим общий случай системы ОДУ из $m\ge 1$ уравнений от m неизвестных вида

$$\frac{dx_l}{dt}=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\ldots\sum_{i_m=0}^{n_m}a^l_{\left(i_1,i_2,\ldots i_m\right)}\left(x_1\right)^{i_1}\cdot\left(x_2\right)^{i_2}\cdots\left(x_m\right)^{i_m}, \tag{23}$$

где $a^l_{\left(i_1,i_2,\ldots i_m\right)}=a^l_{\left(i_1,i_2,\ldots i_m\right)}\left(t\right)$, $t\in\mathbb{R}$, $i_1=0\ldots n_1$, $\ldots$ $i_m=0\ldots n_m$, $l=1\ldots m$. Пусть на интересующих нас решениях системы ОДУ (23) выполняются еще n уравнений связи вида

$$P_l\left(x_1,\ldots x_m,t\right)=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\ldots\sum_{i_m=0}^{n_m}a^l_{\left(i_1,i_2,\ldots i_m\right)}\left(x_1\right)^{i_1}\cdot\left(x_2\right)^{i_2}\cdots\left(x_m\right)^{i_m}=0,\ l=\left(m+1\right)\ldots n. \tag{24}$$

Дополнительными уравнениями связи (24) могут быть, например, первые интегралы системы (23), которые можно получить методом преобразования к каноническим уравнениям Гамильтона, изложенным в [8] (см. Приложение C). Умножим обе части уравнений (24) на выражения $(x_1)^{j_1}\cdot(x_2)^{j_2}\cdots(x_m)^{j_m}$, $j_1=0...N_1,\dots\ j_m=0...N_m$. Получим уравнения вида

$$P_\alpha(x_1,...x_m,t)=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}(x_1)^{i_1+j_1}\cdot(x_2)^{i_2+j_2}\cdots(x_m)^{i_m+j_m}=0, \tag{25}$$

где $\alpha=\alpha(l,j_1,...j_m)$, $l=(m+1)...n$. Эти уравнения можно записать в виде

$$P_\alpha(x_1,...x_m,t)=H_\alpha(Q_\beta)=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}Q_{\beta((i_1+j_1),...(i_m+j_m))}=0, \tag{26}$$

где $Q_\beta=(x_1)^{q_1}\cdot(x_2)^{q_2}\cdots(x_m)^{q_m}$, $\beta=\beta(q_1,...q_m)$, $q_1=0...(N_1+n_1),\dots\ q_m=0...(N_m+n_m)$, $Q_{\beta(0...0)}=1$. Учитывая (23), имеем также

$$\frac{dQ_{\beta(j_1,...j_m)}}{dt}=j_1\cdot(x_1)^{j_1-1}\cdot\frac{dx_1}{dt}\cdot(x_2)^{j_2}\cdots(x_m)^{j_m}+...+(x_1)^{j_1}\cdot(x_2)^{j_2}\cdots j_m\cdot(x_m)^{j_m-1}\cdot\frac{dx_m}{dt}=$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}j_la^l_{(i_1,i_2,...i_m)}(x_1)^{i_1+j_1}\cdots(x_l)^{i_l+j_l-1}\cdots(x_m)^{i_m+j_m}=$$

$$=\sum_{l=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}j_la^l_{(i_1,i_2,...i_m)}Q_{\beta((i_1+j_1),...(i_l+j_l-1)...(i_m+j_m))},\quad j_1=0...N_1,\dots\ j_m=0...N_m. \tag{27}$$

Количество мульти-индексов $\beta=\beta(q_1,...q_m)$ (количество неизвестных в уравнениях (26), (27)) равно $N_S=(N_1+n_1+1)\cdots(N_m+n_m+1)$. Количество **линейных обыкновенных** дифференциальных уравнений (26), (27) равно $N_H=(1+n)(N_1+1)\cdots(N_m+1)$. Выберем N_k, $k=1...m$ так, чтобы $N_H\ge N_S$, например, следуя работе [10], $\frac{(N_1+1)}{n_1}\approx...\approx\frac{(N_m+1)}{n_m}\approx N\approx\frac{m}{n}$. Тогда $N_H\ge(n+1)n_1\cdots n_m\left[\frac{m}{n}\right]^m$ [10]. При $m=10$, $n=1$, $n_1=...=n_{10}=2$ имеем $N_H\ge2\cdot10^{13}$, $N\approx10$. Достаточные условия (но не необходимые) для того, чтобы системы (26), (27) и (23), (24) были эквивалентные, могут быть найдены аналогично примеру из части 2.

Таким образом, мы имеем **линейную** переопределенную систему ОДУ (26), (27), решить которую гораздо легче, чем исходную систему (23), (24) (см. пример из части 2). Причем, если коэффициенты в (23), (24) постоянные, т. е. не зависят от $t\in\mathbb{R}$, то решение может быть найдено в явном виде [11]. Значимый пример использования данного метода приведен в работе [13].

Рассмотрим общий случай системы ОДУ из $p\ge2$ уравнений от m неизвестных вида:

$$P_l\left(x_1,...x_m,\frac{dx_1}{dt}...\frac{dx_m}{dt},t\right)=$$

$$=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}\sum_{j_1=0}^{k_1}...\sum_{j_m=0}^{k_m}a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{dx_m}{dt}\right)^{i_m}\cdot(x_1)^{j_1}\cdots(x_m)^{j_m}=0, \tag{28}$$

где $a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}=a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $i_1=0...n_1$, $\dots\ i_m=0...n_m$, $j_1=0...k_1$, $\dots\ j_m=0...k_m$, $l=1...p$. К таким системам с помощью метода редукции [7, 8] можно преобразовать уравнения Навье–Стокса [10] или унифицированные уравнения из статей [3, 4], причем они будут с коэффициентами, не зависящими от $t\in\mathbb{R}$. Кроме того, систему полиномиальных уравнений (28) можно переопределить с помощью метода, изложенного в статье [10]. Обозначим

$$\frac{dx_s}{dt}=U_s,\ \frac{dU_s}{dt}=L_s,\ s=1...m,\ L_0=1. \tag{29}$$

Тогда в новых обозначениях

$$P_l\left(x_1,...x_m,U_1...U_m,t\right)=$$
$$=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}\sum_{j_1=0}^{k_1}...\sum_{j_m=0}^{k_m}a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}\left(U_1\right)^{i_1}\cdots\left(U_m\right)^{i_m}\cdot\left(x_1\right)^{j_1}\cdots\left(x_m\right)^{j_m}=0, \tag{30}$$

Умножим обе части уравнений (30) на выражения $L_s\left(U_1\right)^{a_1}\cdots\left(U_m\right)^{a_m}\cdot\left(x_1\right)^{b_1}\cdots\left(x_m\right)^{b_m}$, $s=0...m$, $a_1=0...N_1,\dots a_m=0...N_m$, $b_1=0...K_1,\dots b_m=0...K_m$. Получим уравнения вида

$$P_\alpha\left(x_1,...x_m,U_1...U_m,L_0,..L_m,t\right)=$$
$$=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}\sum_{j_1=0}^{k_1}...\sum_{j_m=0}^{k_m}a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}\left(U_1\right)^{i_1+a_1}\cdots\left(U_m\right)^{i_m+a_m}\cdot\left(x_1\right)^{j_1+b_1}\cdots\left(x_m\right)^{j_m+b_m}L_s=0, \tag{31}$$

где $\alpha=\alpha\left(l,a_1,...a_m,b_1,...b_m,s\right)$, $l=1...p$, $s=0...m$. Эти уравнения можно записать в виде

$$H_\alpha\left(Q_\beta\right)=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}\sum_{j_1=0}^{k_1}...\sum_{j_m=0}^{k_m}a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}Q_{\beta\left(s,(i_1+a_1),...(i_m+a_m),(j_1+b_1),...(j_m+b_m)\right)}=0, \tag{32}$$

где $Q_\beta=L_s\left(U_1\right)^{q_1}\cdots\left(U_m\right)^{q_m}\cdot\left(x_1\right)^{r_1}\cdots\left(x_m\right)^{r_m}$, $\beta=\beta\left(s,q_1,...q_m,r_1,...r_m\right)$, $s=0...m$, $q_1=0...\left(N_1+n_1\right),\dots q_m=0...\left(N_m+n_m\right)$, $r_1=0...\left(K_1+k_1\right),\dots r_m=0...\left(K_m+k_m\right)$, $Q_{\beta(0,0...0)}=1$. Учитывая обозначения (29), имеем также

$$\frac{dQ_{\beta(0,c_1,...c_m,d_1,...d_m)}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\left(U_1\right)^{c_1}\cdots\left(U_m\right)^{c_m}\cdot\left(x_1\right)^{d_1}\cdots\left(x_m\right)^{d_m}\right]=$$
$$=c_1\left(U_1\right)^{c_1-1}\frac{dU_1}{dt}\cdots\left(U_m\right)^{c_m}\left(x_1\right)^{d_1}\cdots\left(x_m\right)^{d_m}+...+\left(U_1\right)^{c_1}\cdots c_m\left(U_m\right)^{c_m-1}\frac{dU_m}{dt}\left(x_1\right)^{d_1}\cdots\left(x_m\right)^{d_m}+$$
$$+\left(U_1\right)^{c_1}\cdots\left(U_m\right)^{c_m}d_1\cdot\left(x_1\right)^{d_1-1}\cdot\frac{dx_1}{dt}\cdots\left(x_m\right)^{d_m}+...+\left(U_1\right)^{c_1}\cdots\left(U_m\right)^{c_m}\left(x_1\right)^{d_1}\cdots d_m\cdot\left(x_m\right)^{d_m-1}\cdot\frac{dx_m}{dt}=$$
$$=c_1L_1\left(U_1\right)^{c_1-1}\cdots\left(U_m\right)^{c_m}\left(x_1\right)^{d_1}\cdots\left(x_m\right)^{d_m}+...+\left(U_1\right)^{c_1}\cdots c_m\left(U_m\right)^{c_m-1}\cdot L_m\cdot\left(x_1\right)^{d_1}\cdots\left(x_m\right)^{d_m}+$$
$$+\left(U_1\right)^{c_1+1}\cdots\left(U_m\right)^{c_m}\cdot d_1\cdot\left(x_1\right)^{d_1-1}\cdots\left(x_m\right)^{d_m}+...+\left(U_1\right)^{c_1}\cdots\left(U_m\right)^{c_m+1}\left(x_1\right)^{d_1}\cdots d_m\cdot\left(x_m\right)^{d_m-1}=$$
$$=c_1Q_{\beta\left(1,(c_1-1),...c_m,d_1,...d_m\right)}+...+c_mQ_{\beta\left(m,c_1,...(c_m-1),d_1,...d_m\right)}+$$
$$+d_1Q_{\beta\left(0,(c_1+1),...c_m,(d_1-1),...d_m\right)}+...+d_mQ_{\beta\left(0,c_1,...(c_m+1),d_1,...(d_m-1)\right)}, \tag{33}$$

где $c_1=0...\left(N_1+n_1-1\right),\dots c_m=0...\left(N_m+n_m-1\right)$, $d_1=0...\left(K_1+k_1\right),\dots d_m=0...\left(K_m+k_m\right)$.

Количество мульти-индексов $\beta=\beta\left(s,q_1,...q_m,r_1,...r_m\right)$ (количество неизвестных в уравнениях (32), (33)) равно

$$N_S=\left(m+1\right)\left(N_1+n_1+1\right)\cdots\left(N_m+n_m+1\right)\left(K_1+k_1+1\right)\cdots\left(K_m+k_m+1\right). \tag{34}$$

Количество **линейных обыкновенных** дифференциальных уравнений (32), (33) равно

$$N_H=p\left(m+1\right)\left(N_1+1\right)\cdots\left(N_m+1\right)\left(K_1+1\right)\cdots\left(K_m+1\right)+$$
$$+\left(N_1+n_1\right)\cdots\left(N_m+n_m\right)\left(K_1+k_1+1\right)\cdots\left(K_m+k_m+1\right). \tag{35}$$

Выберем N_s, K_s $s=1...m$ так, чтобы $N_H\ge N_S$, например, [10]

$$\frac{\left(N_1+1\right)}{n_1}\approx...\approx\frac{\left(N_m+1\right)}{n_m}\approx\frac{\left(K_1+1\right)}{k_1}\approx...\approx\frac{\left(K_m+1\right)}{k_m}\approx N,\ N\approx 2m\Big/\left[\left(\frac{m+1}{m}\right)p-1\right].$$

Тогда $N_H \ge \left(\frac{m+1}{m}\right) p n_1 \cdots n_m k_1 \cdots k_m \left[2m \Big/ \left[\left(\frac{m+1}{m}\right) p - 1 \right] \right]^{2m}$. При $p = 11$, $m = 10$, $n_1 = ... = n_{10} = 2$, $k_1 = ... = k_{10} = 2$ имеем $N_H \ge 4 \cdot 10^{11}$, $N \approx 1{,}7$.

Таким образом, мы имеем **линейную переопределенную** систему ОДУ (32), (33), решать которую гораздо легче, чем исходную систему (28). Причем если коэффициенты в (28) не зависят от $t \in \mathbb{R}$, то решение может быть найдено в явном виде [11]. Чтобы получить еще уравнения, можно продифференцировать (30) по t и использовать обозначения (29). Достаточные условия (но не необходимые) для того, чтобы системы (28) и (32), (33) были эквивалентные, могут быть найдены аналогично примеру из части 2.

Заметим, что помимо уравнений (32), (33) должны выполняться еще N_S (34) уравнений вида:

$$Q_\beta = L_s \left(U_1\right)^{q_1} \cdots \left(U_m\right)^{q_m} \cdot \left(x_1\right)^{r_1} \cdots \left(x_m\right)^{r_m}, \tag{36}$$

где $Q_{\beta(s,0...0)} = L_s$, $Q_{\beta(0,0...j...0,0...0)} = U_j$, $Q_{\beta(0,0...0,0...j...0)} = x_j$ $j = 1...m$, $\beta = \beta\left(s, q_1, ...q_m, r_1, ...r_m\right)$, $s = 0...m$, $q_1 = 0...\left(N_1 + n_1\right), \dots q_m = 0...\left(N_m + n_m\right)$, $r_1 = 0...\left(K_1 + k_1\right), \dots r_m = 0...\left(K_m + k_m\right)$, $Q_{\beta(0,0...0)} = 1$. В случае, если общее решение линейной системы ОДУ (32), (33) содержит некоторый произвол [11], например, если число независимых уравнений в (32), (33) меньше числа неизвестных N_S, то **предположительно** его можно определить с помощью дополнительных соотношений (36) обычным методом редукции переопределенных систем ОДУ [7, 8]. Аналогично можно поступить, если общее решение линейной переопределенной системы ОДУ (26), (27) также содержит некоторый произвол.

Заметим, что систему уравнений (28) можно записать в виде

$$P_l\left(x_1, ...x_m, \frac{dx_1}{dt} ... \frac{dx_m}{dt}, t\right) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} ... \sum_{i_m=0}^{n_m} \sum_{j_1=0}^{k_1} ... \sum_{j_m=0}^{k_m} \beta^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)} \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{dx_m}{dt}\right)^{i_m} \cdot \left(x_1\right)^{j_1} \cdots \left(x_m\right)^{j_m} = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \beta^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}}{\partial t} = \frac{\partial a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}\left(t\right)}{\partial t}, \tag{38}$$

где $a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)} = a^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}\left(t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, $i_1 = 0...n_1$, $\dots i_m = 0...n_m$, $j_1 = 0...k_1$, $\dots j_m = 0...k_m$, $l = 1...p$. Систему уравнений (37), (38) можно рассмотреть как систему из $p + p\left(n_1 + 1\right) \cdots \left(n_m + 1\right)\left(k_1 + 1\right) \cdots \left(k_m + 1\right)$ уравнений и $m + p\left(n_1 + 1\right) \cdots \left(n_m + 1\right)\left(k_1 + 1\right) \cdots \left(k_m + 1\right)$ неизвестных x_1, … x_m, $\beta^l_{(i_1,i_2,...i_m)(j_1,j_2,...j_m)}$, $i_1 = 0...n_1$, … $i_m = 0...n_m$, $j_1 = 0...k_1$, … $j_m = 0...k_m$, $l = 1...p$. Заметим также, что для системы ОДУ (28) не предполагается изначально, что $p \ge m$. В частности, можно взять $p < m$. Систему уравнений (37) можно рассмотреть как недоопределенную систему полиномиальных уравнений с постоянными единичными коэффициентами. Как показано выше, эту систему уравнений можно преобразовать к переопределенной линейной системе ОДУ с постоянными коэффициентами вида (32), (33). Допустим, что решение этой линейной системы содержит некоторый произвол [11], например, если число независимых уравнений меньше числа неизвестных. Тогда **предположительно** его можно определить с помощью дополнительных уравнений (38), а также с помощью уравнений, аналогичных уравнениям (36), обычным методом редукции переопределенных систем ОДУ [7, 8].

В данной статье мы предложили способ преобразования полиномиальных систем ОДУ к линейным системам ОДУ. Но на практике этот способ довольно сложно реализовать. Количество линейных уравнений, которые необходимо решить, быстро растет с увеличением количества уравнений в исходной системе полиномиальных уравнений. Численные оценки дают цифру в более чем миллиард уравнений. Однако наш результат может быть интересен с теоретической точки зрения. Как было указано выше, уравнения Навье–Стокса [10] и унифицированные уравнения из статей [3, 4] с помощью метода редукции преобразовываются к переопределенным системам полиномиальных ОДУ с постоянными коэффициентами. Решение таких нелинейных систем с помощью нашего метода может быть представлено в виде суммы очень большого, но конечного количества нарастающих и затухающих колебаний во времени с разными частотами, которые теоретически можно вычислить. Амплитуды этих колебаний зависят от начальных данных нелинейно. Однако представить даже это решение в явном виде крайне затруднительно, и тем более его посчитать даже на ЭВМ. Возможно, из-за этой особенности до сих пор возникают сложности при моделировании уравнений Навье–Стокса. Известно, что численное решение уравнений Навье–Стокса начиная с некоторого момента времени становится нестабильным и переходит в очень сложное беспорядочное колебательное движение, которое невозможно отследить. Предположительно в этот момент начинают играть роль все колебания, сумма которых составляет общее решение, которое мы предлагаем в данной статье. Аналогичное можно утверждать и в отношении унифицированных систем УрЧП, полученных авторами ранее в работах [3, 4].

Приложение А. Гипотеза о преобразовании некоторых систем УрЧП к переопределенным линейным системам УрЧП

Рассмотрим общие уравнения в виде [3, 4]

$$H_k\left(U_1^1,\ldots U_v^i,\ldots U_p^m,S_1,\ldots S_v,\ldots S_p,\mathrm{x}\right)=0,\ i=1\ldots m,\ v=1\ldots p,\ k=1\ldots Z,\ Z\ge 2. \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial U_v^i}{\partial x_\mu}=\frac{\partial U_v^\mu}{\partial x_i},\ i=1\ldots m,\ \mu=1\ldots m,\ v=1\ldots p,\quad i>\mu, \tag{A.2}$$

$$U_v^i=\frac{\partial S_v}{\partial x_i},\ v=1\ldots p,\ i=1\ldots m. \tag{A.3}$$

где $\mathrm{x}=\left(x_1,\ldots x_m\right)\in\mathbb{R}^m$. Пусть

$$H_k=\sum_{\substack{k_1^1,\ldots k_s^l,\ldots k_p^{m-1},\\ j_1,\ldots j_p}} A^{k,\left(j_1,\ldots j_p\right)}_{\left(k_1^1,\ldots k_s^l,\ldots k_p^m\right)}(\mathrm{x})\left(U_1^1\right)^{k_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{k_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{k_p^m}\left(S_1\right)^{j_1}\cdots\left(S_p\right)^{j_p}=0, \tag{A.4}$$

где $k=1\ldots Z$, $l=1\ldots m$, $s=1\ldots p$, $k_s^l=0\ldots r_s^l$, $j_1=0\ldots w_1$, … $j_p=0\ldots w_p$. Обозначим

$$L_h^{i,j}=\frac{\partial U_j^i}{\partial x_h},\ j=1\ldots p,\ i=1\ldots m,\ h=0\ldots m,\ L_0^{i,j}=1. \tag{A.5}$$

Умножим обе части уравнений (А.4) на выражения $L_h^{i,j}\left(U_1^1\right)^{a_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{a_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{a_p^m}\cdot\left(S_1\right)^{b_1}\cdots\left(S_p\right)^{b_p}$, $j=1\ldots p$, $i=1\ldots m$, $h=0\ldots m$, $l=1\ldots m$, $s=1\ldots p$, $a_s^l=0\ldots N_s^l$, $b_1=0\ldots K_1,\ldots b_p=0\ldots K_p$. Получим уравнения вида

$$H_\alpha\left(L_h^{i,j},U_1^1,\ldots U_s^l,\ldots U_p^m,S_1,\ldots S_p,\mathrm{x}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{k_1^1,\ldots k_s^l,\ldots k_p^{m-1},\\ j_1,\ldots j_p}} A^{k,\left(j_1,\ldots j_p\right)}_{\left(k_1^1,\ldots k_s^l,\ldots k_p^m\right)}(\mathrm{x})L_h^{i,j}\left(U_1^1\right)^{k_1^1+a_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{k_s^l+a_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{k_p^m+a_p^m}\left(S_1\right)^{j_1+b_1}\cdots\left(S_p\right)^{j_p+b_p}=0, \tag{A.6}$$

где $\alpha=\alpha\left(k,i,j,h,a_1^1\ldots a_s^l,\ldots a_p^m,b_1,\ldots b_p\right)$, $k=1\ldots Z$, $j=1\ldots p$, $i=1\ldots m$, $h=0\ldots m$, $l=1\ldots m$, $s=1\ldots p$.

Эти уравнения можно записать в виде

$$H_\alpha\left(Q_\beta\right)=\sum_{\substack{k_1^1,\ldots k_s^l,\ldots k_p^{m-1},\\ j_1,\ldots j_p}} A^{k,\left(j_1,\ldots j_p\right)}_{\left(k_1^1,\ldots k_s^l,\ldots k_p^m\right)}(\mathrm{x})Q_{\beta\left(i,j,h,\left(k_1^1+a_1^1\right),\ldots\left(k_s^l+a_s^l\right),\ldots\left(k_p^m+a_p^m\right),\left(j_1+b_1\right),\ldots\left(j_p+b_p\right)\right)}=0, \tag{A.7}$$

где

$$Q_\beta = L_h^{i,j}\left(U_1^1\right)^{q_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{q_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{q_p^m}\cdot\left(S_1\right)^{r_1}\cdots\left(S_p\right)^{r_p}, \tag{A.8}$$

$\beta=\beta\left(i,j,h,q_1^1,...q_p^m,r_1,...r_p\right)$, $j=1...p$, $i=1...m$, $h=0...m$, $l=1...m$, $s=1...p$, $q_s^l=0...\left(N_s^l+r_s^l\right)$, $r_1=0...\left(K_1+w_1\right),\ldots r_p=0...\left(K_p+w_p\right)$, $Q_{\beta(i,j,0,...0)}=1$. Учитывая обозначения (A.3), (A.5) и (A.8), имеем также

$$\frac{\partial Q_{\beta\left(1,1,0,c_1^1,...c_p^m,d_1,...d_p\right)}}{\partial x_\lambda}=\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left[\left(U_1^1\right)^{c_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{c_p^m}\cdot\left(S_1\right)^{d_1}\cdots\left(S_p\right)^{d_p}\right]=$$
$$=c_1^1\frac{\partial U_1^1}{\partial x_\lambda}\left(U_1^1\right)^{c_1^1-1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{c_p^m}\cdot\left(S_1\right)^{d_1}\cdots\left(S_p\right)^{d_p}+...$$
$$...+\left(U_1^1\right)^{c_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots c_p^m\left(U_p^m\right)^{c_p^m-1}\frac{\partial U_p^m}{\partial x_\lambda}\cdot\left(S_1\right)^{d_1}\cdots\left(S_p\right)^{d_p}+$$
$$+\left(U_1^1\right)^{c_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{c_p^m}\cdot d_1\left(S_1\right)^{d_1-1}\frac{\partial S_1}{\partial x_\lambda}\cdots\left(S_p\right)^{d_p}+...$$
$$...+\left(U_1^1\right)^{c_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{c_p^m}\cdot\left(S_1\right)^{r_1}\cdots d_1\left(S_p\right)^{d_p-1}\frac{\partial S_p}{\partial x_\lambda}=$$
$$=c_1^1L_\lambda^{1,1}\left(U_1^1\right)^{c_1^1-1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{c_p^m}\cdot\left(S_1\right)^{d_1}\cdots\left(S_p\right)^{d_p}+...$$
$$...+\left(U_1^1\right)^{c_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots c_p^m\left(U_p^m\right)^{c_p^m-1}L_\lambda^{m,p}\cdot\left(S_1\right)^{d_1}\cdots\left(S_p\right)^{d_p}+$$
$$+\left(U_1^1\right)^{c_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{c_p^m}\cdot d_1\left(S_1\right)^{d_1-1}U_1^\lambda\cdots\left(S_p\right)^{d_p}+...$$
$$...+\left(U_1^1\right)^{c_1^1}\cdots\left(U_s^l\right)^{c_s^l}\cdots\left(U_p^m\right)^{c_p^m}\cdot\left(S_1\right)^{d_1}\cdots d_1\left(S_p\right)^{d_p-1}U_p^\lambda=$$
$$=c_1^1Q_{\beta\left(1,1,\lambda,\left(c_1^1-1\right),...c_p^m,d_1,...d_p\right)}+...+c_p^mQ_{\beta\left(m,p,\lambda,c_1^1,...\left(c_p^m-1\right),d_1,...d_p\right)}+$$
$$+d_1Q_{\beta\left(1,1,0,c_1^1,...\left(c_1^\lambda+1\right),...c_p^m,\left(d_1-1\right),...d_p\right)}+...+d_pQ_{\beta\left(1,1,0,c_1^1,...\left(c_p^\lambda+1\right),...c_p^m,d_1,...\left(d_p-1\right)\right)}, \tag{A.9}$$

где $\lambda=1...m$, $l=1...m$, $s=1...p$, $c_s^l=0...\left(N_s^l+r_s^l-1\right)$, $d_1=0...\left(K_1+w_1\right),\ldots d_p=0...\left(K_p+w_p\right)$.

Уравнения (A.2), (A.3) в обозначениях (A.8) можно записать в виде

$$Q_{\beta(i,\nu,\mu,0,....0,0,...0)}=Q_{\beta(\mu,\nu,i,0,....0,0,...0)},\ i=1...m,\ \mu=1...m,\ i>\mu,\ \nu=1...p, \tag{A.10}$$

$$Q_{\beta\left(1,1,0,0,...q_\nu^i=1,....0,0,...0\right)}=\frac{\partial Q_{\beta(1,1,0,0,...,0,...r_\nu=1,...0)}}{\partial x_i},\ \nu=1...p,\ i=1...m. \tag{A.11}$$

Количество мульти-индексов $\beta=\beta\left(i,j,h,q_1^1,...q_p^m,r_1,...r_p\right)$ (количество неизвестных в уравнениях (A.7), (A.9) – (A.11)) равно

$$N_S=\left(m^2p+1\right)\left(N_1^1+r_1^1+1\right)\cdots\left(N_p^m+r_p^m+1\right)\left(K_1+w_1+1\right)\cdots\left(K_p+w_p+1\right). \tag{A.12}$$

Количество **линейных** дифференциальных уравнений в частных производных (A.7), (A.9) – (A.11) равно

$$N_H=Z\left(m^2p+1\right)\left(N_1^1+1\right)\cdots\left(N_p^m+1\right)\left(K_1+1\right)\cdots\left(K_p+1\right)+$$
$$+m\left(N_1^1+r_1^1\right)\cdots\left(N_p^m+r_p^m\right)\left(K_1+w_1+1\right)\cdots\left(K_m+w_m+1\right)+\frac{m(m+1)p}{2}. \tag{A.13}$$

Выберем $l=1...m$, $s=1...p$, N_s^l, $K_1,\ldots K_p$ так, чтобы $N_H\geq N_S$, например, [10]

$$\frac{\left(N_1^1+1\right)}{r_1^1} \approx \ldots \approx \frac{\left(N_p^m+1\right)}{r_p^m} \approx \frac{\left(K_1+1\right)}{w_1} \approx \ldots \approx \frac{\left(K_p+1\right)}{w_p} \approx N\,, \tag{A.14}$$

$$N \approx \frac{p(m+1)\left(m^2 p-m+1\right)}{\left(Zm^2 p-m^2 p+Z+m-1\right)}\,. \tag{A.15}$$

Тогда

$$N_H \ge r_1^1 \cdots r_p^m w_1 \cdots w_p\left[Z\left(m^2 p+1\right)N^{(m+1)p}+m(N+1)^{(m+1)p}\right]+\frac{m(m+1)p}{2}\,. \tag{A.16}$$

При $Z=p=2$, $m=2$, $w_1=\ldots=w_p=1$, $r_1^1=\ldots=r_p^m=1$ имеем $N_H \ge 1{,}05\cdot 10^5$, $N \approx 4$.

Таким образом, мы имеем **линейную переопределенную** систему УрЧП (A.7), (A.9)–(A.11), решать и исследовать которую гораздо легче, чем исходную систему (A.1)–(A.3). Причем, если коэффициенты в (A.4) не зависят от $\mathrm{x}=\left(x_1,\ldots x_m\right)\in\mathbb{R}^m$, например, уравнения Навье–Стокса, то решение некоторых поставленных для них задач может быть найдено в явном виде [1, 2, 11]. Чтобы получить еще уравнения, можно продифференцировать (A.4) по x_i, $i=1\ldots m$ и использовать обозначения (A.3) и (A.5).

Учитывая соотношение (A.2), можно, исходя из определения (A.2), (A.5), (A.8), выписать еще уравнения:

$$Q_{\beta\left(i,j,h,q_1^1,\ldots q_p^m,r_1,\ldots r_p\right)}=Q_{\beta\left(h,j,i,q_1^1,\ldots q_p^m,r_1,\ldots r_p\right)}, \tag{A.17}$$

где $j=1\ldots p$, $i=1\ldots m$, $h=1\ldots m$, $i>h$, $l=1\ldots m$, $s=1\ldots p$, $q_s^l=0\ldots\left(N_s^l+r_s^l\right)$, $r_1=0\ldots\left(K_1+w_1\right),\ldots$ $r_p=0\ldots\left(K_p+w_p\right)$. Их количество равно

$$\frac{1}{2}m(m-1)p\left(N_1^1+r_1^1+1\right)\cdots\left(N_p^m+r_p^m+1\right)\left(K_1+w_1+1\right)\cdots\left(K_p+w_p+1\right). \tag{A.18}$$

Система линейных УрЧП (A.7), (A.9)–(A.11), (A.17) содержит все решения исходной системы УрЧП (A.1)–(A.3). Кроме того, мы имеем еще N_S **нелинейных** соотношений, следующих из определения неизвестных Q_β (A.8). Их можно использовать в том случае, если решения системы уравнений (A.7), (A.9)–(A.11), (A.17) будут содержать некоторый произвол. Например, применить метод редукции переопределенных систем УрЧП.

Фактически здесь мы предложили способ переопределения системы УрЧП (A.1)–(A.3), если выполняется (A.4). Продифференцируем (A.1) по x_m. Имеем,

$$\sum_{l,s} A_{l,s}^k \frac{\partial U_s^l}{\partial x_m}+\sum_i B_i^k \frac{\partial S_i}{\partial x_m}+C^k=0\,, \tag{A.19}$$

где $k=1\ldots Z$, $l=1\ldots m$, $s=1\ldots p$, $i=1\ldots p$ и

$$A_{l,s}^k=\frac{\partial H_k}{\partial U_s^l}\,,\ B_i^k=\frac{\partial H_k}{\partial S_i}\,,\ C^k=\frac{\partial H_k}{\partial x_m}\,. \tag{A.20}$$

Систему уравнений (A.2), (A.3), (A.19) от неизвестных функций U_s^l, S_i, $A_{l,s}^k$, B_i^k, C^k можно преобразовать к недоопределённой системе УрЧП вида (A.1) – (A.4), которую все равно указанным выше способом можно переопределить. Кроме того, мы имеем также дополнительные в общем случае нелинейные уравнения (A.20). Данный способ переопределения можно комбинировать со способом переопределения, изложенным в статье [10].

Приложение B. Гипотеза о нахождении решений у параметрических систем неявных уравнений в явном виде

Рассмотрим произвольную параметрическую систему из n уравнений от n неизвестных $\mathrm{u}=\left(u_1,u_2\ldots u_n\right)\in\mathbb{R}^n$ и m параметров $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_m\right)\in\mathbb{R}^m$ вида

$$\mathrm{H}(\mathrm{u},\alpha)=0, \tag{B.1}$$

где $\mathrm{H}(\mathrm{u},\alpha)=\left(H_1(\mathrm{u},\alpha),...H_n(\mathrm{u},\alpha)\right)$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Будем искать решение системы (B.1), которое записывается в виде

$$\mathrm{u}=\mathrm{u}(\alpha), \tag{B.2}$$

где $\mathrm{u}(\alpha)=\left(u_1(\alpha),u_2(\alpha)...u_n(\alpha)\right)$ – некоторые достаточно гладкие функции от $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2...\alpha_m)$.

Представим параметры $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2...\alpha_m)$ в виде

$$\alpha=\beta+\mathrm{B}t, \tag{B.3}$$

где $\beta=(\beta_1,\beta_2...\beta_m)\in\mathbb{R}^m$, $t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{B}=(B_1,B_2...B_m)\in\mathbb{R}^m$. Поставим (B.3) в (B.2). Имеем,

$$\mathrm{u}=\mathrm{u}(\beta+\mathrm{B}t). \tag{B.4}$$

Зафиксируем $\mathrm{B}=(B_1,B_2...B_m)$ в формуле (B.4) как параметры и рассмотрим $\mathrm{u}=(u_1,u_2...u_n)$ как функции от $\beta=(\beta_1,\beta_2...\beta_m)$ и t. Очевидно, что тогда функции $\mathrm{u}=(u_1,u_2...u_n)$ удовлетворяют следующим n уравнениям:

$$\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial t}-\mathrm{B}\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\beta}=0. \tag{B.5}$$

Подставим (B.3) в (B.1). Тогда

$$\mathrm{H}(\mathrm{u},\beta+\mathrm{B}t)=0. \tag{B.6}$$

Таким образом, формально мы имеем переопределенную систему (B.5), (B.6) из $2n$ дифференциальных уравнений и n неизвестных $\mathrm{u}=(u_1,u_2...u_n)$. Согласно гипотезе об универсализации решения задачи Коши для переопределенных систем дифференциальных уравнений, изложенной в работе [4], решение системы (B.5), (B.6) может быть представлено в виде:

$$\mathrm{u}=\mathrm{G}\left(t,\beta,\mathrm{B},\mathrm{u}\big|_{t=0},\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0},\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\beta}\bigg|_{t=0},\frac{\partial^2\mathrm{u}}{\partial t\partial\beta}\bigg|_{t=0},...\right), \tag{B.7}$$

где $\mathrm{G}(...)=\left(G_1(...),...G_n(...)\right)$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Количество аргументов в функциях (B.7) ограниченно.

Пусть нам известны значения функций (B.4), при некотором $\beta=\beta^0=\left(\beta_1^0,\beta_2^0...\beta_m^0\right)$ и $t=0$. Пусть при $\beta=\beta^0=\left(\beta_1^0,\beta_2^0...\beta_m^0\right)$ и $t=0$ выполняется

$$\left|\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\mathrm{u}}\right|\neq0. \tag{B.8}$$

Тогда при $\beta=\beta^0=\left(\beta_1^0,\beta_2^0...\beta_m^0\right)$ и $t=0$ из (B.6) можно найти в явном виде значения всех частных производных от функций $\mathrm{u}=(u_1,u_2...u_n)$ по β и t. Например,

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\mathrm{u}}\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial t}+\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial t}=0,\ \frac{\partial\mathrm{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0,\beta=\beta^0}=-\left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\mathrm{u}}\right)^{-1}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial t}\bigg|_{t=0,\beta=\beta^0}, \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\mathrm{u}}\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\beta}+\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\beta}=0,\ \frac{\partial\mathrm{u}}{\partial\beta}\bigg|_{t=0,\beta=\beta^0}=-\left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\mathrm{u}}\right)^{-1}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\beta}\bigg|_{t=0,\beta=\beta^0}. \tag{B.10}$$

Таким образом, по формуле (B.7) в явном виде может быть определено значение функций $\mathrm{u}=\mathrm{u}(\beta_0+\mathrm{B}t)$. Параметры $\mathrm{B}=(B_1,B_2...B_m)$ и переменную t можно варьировать. Мы видим, что если известно частное решение уравнений (B.1) при $\alpha=\beta^0$, то будет известно в явном виде решение (B.2) в некоторой окрестности точки β^0 значений параметра α.

Рассмотрим общий случай переопределенной системы из $(m+p)$ алгебраических уравнений от m переменных

$$P_l\left(x_1,...x_m\right)=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}...\sum_{i_m=0}^{n_m}a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}\left(x_1\right)^{i_1}\cdot\left(x_2\right)^{i_2}\cdots\left(x_m\right)^{i_m}=0\,, \qquad \text{(B.11)}$$

где $a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}\in\mathbb{R}$ – параметры, $l=1...(m+p)$. Соответствующая система (B.5), (B.6), построенная для уравнений (B.11), будет иметь вид (A.1) – (A.4). С помощью введения дополнительных функций можно даже «сделать» коэффициенты в (A.4) постоянными целыми числами (см. (37), (38)). Тогда **предположительно**, решив эту систему в явном виде один раз, можно получить формулу для решения системы (B.11) в общем виде.

Если в уравнениях (B.11) $a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}=a^l_{(i_1,i_2,...i_m)}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, то, продифференцировав по t уравнения (B.11), получим систему уравнений вида (28). Для системы уравнений (28) мы привели гипотезу о нахождении её решений в явном виде (см. (37), (38)). Достаточно только знать решения системы уравнений (B.11) при $t=0$.

Аналогичную теорию можно применить для следующей системы уравнений:

$$\sum_{\substack{k_1,...k_p,\\ i_1,...i_p,j_1,...j_p}}A^{k,(i_1,...i_p,)(j_1,...j_p)}_{(k_1,...k_p)}(t)\left(x_1\right)^{i_1}\cdot\left(x_2\right)^{i_2}\cdots\left(x_p\right)^{i_p}\left(u_1\right)^{j_1}\cdots\left(u_p\right)^{j_p}\left(S_1\right)^{k_1}\cdots\left(S_p\right)^{k_p}=0, \qquad \text{(B.12)}$$

где $k=1...p$, $k_1=0...r_1,...\ k_p=0...r_p$, $i_1=0...n_1$, $...\ i_p=0...n_p$, $j_1=0...w_1$, $...\ j_p=0...w_p$, $u_l=\sin(x_l)$, $S_l=\mathrm{sh}(x_l)$, $l=1...p$, $t\in\mathbb{R}$. Для этого достаточно заметить, что

$$\left(\frac{du_l}{dt}\right)^2=\cos^2(x_l)\left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2=\left(1-\sin^2(x_l)\right)\left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2=\left(1-\left(u_l\right)^2\right)\left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2,\ l=1...p, \qquad \text{(B.13)}$$

$$\left(\frac{dS_l}{dt}\right)^2=\mathrm{ch}^2(x_l)\left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2=\left(1+\mathrm{sh}^2(x_l)\right)\left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2=\left(1+\left(S_l\right)^2\right)\left(\frac{dx_l}{dt}\right)^2,\ l=1...p. \qquad \text{(B.14)}$$

Система уравнений (B.12)–(B.14) от неизвестных x_l, u_l, S_l, $l=1...p$. имеет вид системы уравнений (28).

Приложение C. Переопределение систем УрЧП с помощью канонических уравнений Гамильтона

Рассмотрим систему ОДУ следующего вида:

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt}=\mathrm{F}\left(\mathrm{x},\mathrm{g}(t,\alpha),\alpha\right), \qquad \text{(C.1)}$$

где $\mathrm{F}\left(\mathrm{x},\mathrm{g}(t,\alpha),\alpha\right)=\left(F_1\left(\mathrm{x},\mathrm{g}(t,\alpha),\alpha\right),...F_n\left(\mathrm{x},\mathrm{g}(t,\alpha),\alpha\right)\right)$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов, $\mathrm{x}=\left(x_1,...x_n\right)$ – искомые функции, $\mathrm{g}(t,\alpha)=\left(g_1(t,\alpha),...g_m(t,\alpha)\right)$ - дополнительные достаточно гладкие функции своих аргументов, $\alpha=\left(\alpha_1,...\alpha_p\right)$ – параметры. Пусть

$$\mathrm{x}\big|_{t=0}=\mathrm{x}_0(\alpha), \qquad \text{(C.2)}$$

где $\mathrm{x}_0(\alpha)=\left(x_{01}(\alpha),...x_{0n}(\alpha)\right)$ – достаточно гладкие функции от параметров $\alpha=\left(\alpha_1,...\alpha_p\right)$.

Рассмотрим автономную систему ОДУ вида

$$\frac{d\mathrm{x}}{d\tau}=\mathrm{F}\left(\mathrm{x},\mathrm{g}(t,\alpha),\alpha\right), \qquad \text{(C.3)}$$

$$\frac{dt}{d\tau}=1 \qquad \text{(C.4)}$$

с задачей Коши

$$\mathrm{x}\big|_{\tau=0}=\mathrm{x}_0(\alpha),\ t\big|_{\tau=0}=0. \qquad \text{(C.5)}$$

Рассмотрим функцию

$$H(\mathrm{x},t,\mathrm{p},p_t,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}F_i\left(\mathrm{x},\mathrm{g}(t,\alpha),\alpha\right)p_i+p_t \tag{C.6}$$

от переменных $\mathrm{x}=(x_1,...x_n)$, t, $\mathrm{p}=(p_1,...p_n)$, p_t, $\alpha=(\alpha_1,...\alpha_p)$. Уравнения (C.3), (C.4) можно представить в виде

$$\frac{d\mathrm{x}}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}},\ \frac{dt}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p_t}. \tag{C.7}$$

Определим функции $\mathrm{p}=(p_1,...p_n)$, p_t из следующих уравнений:

$$\frac{d\mathrm{p}}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial \mathrm{x}},\qquad \frac{dp_t}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{C.8}$$

где поставим задачу Коши

$$p_j\big|_{\tau=0}=1,\ p_t\big|_{\tau=0}=0,\ j=1...n. \tag{C.9}$$

Как известно, система (C.7), (C.8) является гамильтоновой. Функция (C.6) является ее первым интегралом. Следовательно, с учетом начальных данных (C.5) и (C.9) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}F_i\left(\mathrm{x},\mathrm{g}(t,\alpha),\alpha\right)p_i+p_t=\sum_{i=1}^{n}F_i\left(\mathrm{x}_0(\alpha),\mathrm{g}(0,\alpha),\alpha\right). \tag{C.10}$$

Из уравнения (C.4) с учетом начальных данных (C.5) следует $t=\tau$. Следовательно, сделав обратную замену переменных, уравнения (C.7) преобразовываются к виду (C.1) с задачей Коши (C.2), а уравнения (C.8) записываются в виде

$$\frac{d\mathrm{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \mathrm{x}},\ \frac{dp_t}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{C.11}$$

где поставим задачу Коши

$$p_j\big|_{t=0}=1,\ p_t\big|_{t=0}=0,\ j=1...n. \tag{C.12}$$

В итоге мы имеем систему уравнений (C.1), (C.11) с задачей Коши (C.2) и (C.12), для которой выполняется дополнительное соотношение (C.10).

Рассмотрим систему из n дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v=S_v(\mathrm{x})$, $v=1...n$, $\mathrm{x}=(x_1,...x_m)\in\mathbb{R}^m_{\mathrm{x}}$ вида

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m}=F_v^m\left(S_1,...S_k...S_n,\frac{\partial S_1}{\partial x_1},...\frac{\partial S_k}{\partial x_i}...\frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}},x_1,...x_m\right), \tag{C.13}$$
$$i=1...m-1,\ v=1...n,\ k=1...n.$$

Здесь $F_k^m\left(S_1,...S_v...S_n,\partial S_1/\partial x_1,...\partial S_v/\partial x_i,...\partial S_n/\partial x_{m-1},x_1,...x_m\right)$, $k=1...n$ – некоторые достаточно гладкие функции своих аргументов. Если $S_v=S_v(\mathrm{x})$, $v=1...n$ является решением системы (C.13), то оно является решением параметрической системы ОДУ вида (C.1)

$$\frac{\partial Y_v}{\partial x_m}=F_v^m\left(Y_1,...Y_k...Y_n,\frac{\partial S_1}{\partial x_1},...\frac{\partial S_k}{\partial x_i}...\frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}},x_1,...x_m\right), \tag{C.14}$$
$$i=1...m-1,\ v=1...n,\ k=1...n,$$

где $(x_1,...x_{m-1})$ – параметры, $\partial S_v/\partial x_i$, $i=1...m-1$, $v=1...n$ – фиксированные функции. Следовательно, для системы (C.14) можно применить изложенную выше теорию: дополнить дополнительными неизвестными и построить дополнительное соотношение вида (C.10). В сущности, мы получаем переопределение системы УрЧП (C.13) с учетом начальных данных. Если система УрЧП (C.13) имеет вид (A.1)–(A.4), то переопределенная система будет такого же вида.

Фактически, данный прием является частным случаем следующего подхода. Введем следующую неизвестную функцию:

$$W=G\left(S_1,...S_k...S_n,\frac{\partial S_1}{\partial x_1},...\frac{\partial S_k}{\partial x_i}...\frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}},x_1,...x_m\right). \tag{C.15}$$

Продифференцируем (С.15) по x_m и подставим выражения для производных от неизвестных $S_\nu = S_\nu\left(\mathrm{x}\right)$, $\nu = 1...n$ по x_m из (С.13). В результате получим некоторое уравнение вида

$$\frac{\partial W}{\partial x_{m-1}} = Q\left(S_1,...S_k...S_n,\frac{\partial S_1}{\partial x_1},...\frac{\partial S_k}{\partial x_i}...\frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}},\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1{}^2}...\frac{\partial^2 S_n}{\partial x_{m-1}{}^2},x_1,...x_m\right). \qquad (C.16)$$

Если рассмотреть систему УрЧП (С.13), (С.16), то она, очевидно, имеет дополнительное соотношение в виде интеграла

$$W - G\left(S_1,...S_k...S_n,\frac{\partial S_1}{\partial x_1},...\frac{\partial S_k}{\partial x_i}...\frac{\partial S_n}{\partial x_{m-1}},x_1,...x_m\right) = \mathrm{Const}\,. \qquad (C.17)$$

Литература

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – 1964. – 830 с.
3. Зайцев, М.Л. Преобразование систем уравнений в частных производных к системам квазилинейных и линейных дифференциальных уравнений. Их редукция и унификация / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. –Т. 21, № 1. – С. 18–33.
4. Zaytsev, M.L. Unification of Solution of the Cauchy Problem for Overdetermined Systems of Differential Equations. Version 3 / M.L. Zaytsev, V.B. Akkerman // Research Gate. March. – 2019.
5. Аккерман, В. Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В.Б. Аккерман, М.Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.
6. Зайцев, М.Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 5–27.
7. Зайцев, М.Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ВолГУ. Серия 1, Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.
8. Зайцев, М.Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. –Т. 20, № 4. – С. 43–67.
9. Зайцев, М.Л. Задача обтекания и сокращение размерности в уравнениях Навье–Стокса / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман. // Труды МФТИ. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 18–30.
10. Zaytsev, M.L. Алгоритм нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в явном виде / M.L. Zaytsev, V.B. Akkerman // Research Gate. July. – 2020.
11. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – СПб.: Лань, 2003. – 447 с.
12. Егоров, А.И. Уравнения Риккати / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2001. – 318 с.
13. Зайцев, М.Л. Преобразование уравнения Риккати и других полиномиальных ОДУ к системам линейных ОДУ в явном виде / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2021. – № 72. – С. 5–14.

Поступила в редакцию 25 августа 2020 г.

Сведения об авторах

Зайцев Максим Леонидович – индивидуальный предприниматель, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: mlzaytsev@gmail.com.

Аккерман Вячеслав Борисович – кандидат физико-математических наук, профессор, PhD, Университет Западной Вирджинии, г. Моргантаун, Соединенные Штаты Америки, e-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 3, pp. 23–37

DOI: 10.14529/mmph220303

ON THE IDENTIFICATION OF SOLUTIONS TO RICCATI EQUATION AND THE OTHER POLYNOMIAL SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

***M.L. Zaytsev*[1], *V.B. Akkerman*[2]**
[1] *Moscow, Russian Federation*
[2] *West Virginia University, Morgantown, USA*
E-mail: mlzaytsev@gmail.com, Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu

Abstract. The authors previously proposed a general method for finding particular solutions for overdetermined PDE systems, where the number of equations is greater than the number of unknown functions. The essence of the method is to reduce the PDE to systems of PDE of a lower dimension, in particular, to ODEs by overdetermining them by additional constraint equations. Reduction of some PDE systems generates overdetermined systems of polynomial ODEs, which are studied in this paper. A method for transforming polynomial ODE systems to linear ODE systems is proposed. The result is interesting from a theoretical point of view if these systems of polynomial ODEs are with constant coefficients. The solution of such nonlinear systems using our method can be represented as a sum of a very large but finite number of oscillations. The amplitudes of these oscillations depend on the initial data nonlinearly. The Navier–Stokes equations and unified PDE systems obtained by the authors earlier can be transformed to such systems. The Riccati equation is also investigated. New special cases are indicated when it is possible to find its solution. Numerical estimates of the complexity of this method for practical implementation are presented.

Keywords: overdetermined systems of differential equations; reduction; polynomial ODE systems; dimension of differential equations; Cauchy problem; Riccati equation; linear ODE systems; Navier–Stokes equations; unification of PDE systems, symbolic calculations.

References

1. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (in Russ.).

2. Courant R. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 2, New York, London, 1962, 830 p.

3. Zaytseva M.L., Akkerman V.B. Transformation of systems of partial differential equations to systems of quasilinear and linear differential equations. Their reduction and unification. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2018, Vol. 21, Iss. 1, pp. 18–33. (in Russ.). DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.3

4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Unification of Solution of the Cauchy Problem for Overdetermined Systems of Differential Equations. Version 3. *Research Gate*, March, 2019. (in Russ.).

5. Akkerman, V.B., Zaytsev, M.L. Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, Vol. 51, no. 8, pp. 1418–1430. DOI: 10.1134/S0965542511080021

6. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy i ee primenenie k uravneniyam gidrodinamiki (Hypothesis on Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations and its Application to Equations of Hydrodynamics). *Proc. Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 5–27. (in Russ.).

7. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Eshche odin sposob nakhozhdeniya chastnykh resheniy uravneniy matematicheskoy fiziki (Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics). *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Mathematica. Physica*, 2016, Iss. 6(37), pp. 119–127. (in Russ.). DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.6.11

8. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduktsiya pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy matematicheskoy fiziki (Reduction of Overdetermined Differential Equations of Mathemati-

cal Physics). *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2017, Vol. 20, no. 4, pp. 43–67. (in Russ.). DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5

9. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Zadacha obtekaniya i sokrashchenie razmernosti v uravneniyakh Nav'e–Stoksa (Flow Problem and Dimension Reduction in the Navier–Stokes Equations). *Trudy MFTI*, 2015, Vol. 7, no. 3, pp. 18–30. (in Russ.).

10. Zaytsev M. L., Akkerman V. B. Algoritm nakhozhdeniya resheniy pereopredelennykh sistem differentsial'nykh uravneniy v yavnom vide (Algorithm for Finding Explicit Solutions of Overdetermined Systems of Differential Equations). *Research Gate*, July, 2020. DOI: 10.13140/RG.2.2.26523.69922 (in Russ.)

11. Fedoryuk, M.V. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (Ordinary Differential Equations). St. Petersburg, Lan' Publ., 2003, 447 p. (in Russ.).

12. Egorov, A.I. *Uravneniya Rikkati* (Riccati Equations). Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 318 p. (in Russ.).

13. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Preobrazovanie uravneniya Rikkati i drugikh polinomial'nykh ODU k sistemam lineynykh ODU v yavnom vide (Explicit transformation of the Riccati equation and other polynomial ODEs to systems of linear ODEs). *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2021, no. 72, pp. 5–14. (in Russ.). DOI: 10.17223/19988621/72/1

Received August 25, 2020

Information about the authors

Zaytsev Maksim Leonidovich is Individual Entrepreneur, Moscow, Russian Federation, e-mail: mlzaytsev@gmail.com.

Akkerman Vyacheslav Borisovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, PhD, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, West Virginia University, Morgantown, United States of America, e-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu.