УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph220304

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ ИСКАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru, tcyplenkovaon@susu.ru

Аннотация. Исследована разрешимость задачи оптимального управления решениями стохастических уравнений соболевского типа. Показано, что задачу оптимального динамического измерения можно рассматривать как задачу оптимального управления. Для этого математическая модель динамических измерений редуцируется к стохастическому уравнению соболевского типа первого порядка в пространствах случайных процессов. В статье приведены теоремы о существовании единственного классического и сильного решений уравнения соболевского типа с начальным условием Шоуолтера–Сидорова в пространствах стохастических процессов. Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи оптимального управления для такого уравнения. Полученные абстрактные результаты для уравнения соболевского типа применены для задачи восстановления динамически искаженного сигнала как оптимального динамического измерения.

Ключевые слова: динамические измерения; аддитивный «шум»; уравнения соболевского типа; сильные решения; задача оптимального управления.

Введение

В статье рассматривается задача восстановления входного сигнала по известному выходному или наблюдаемому сигналу и известной передаточной функции измерительного устройства (ИУ) [1]. В данной работе применяются методы теории оптимального управления для решения задач динамического измерения.

Рассмотрим стохастическую систему леонтьевского типа, которой определяются динамические свойства измерительного устройства

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu + G\xi, & (1) \\ y = Cx + D\eta, & (2) \end{cases}$$

а в начале работы состояние измерительного устройства задается начальным условием Шоуолтера–Сидорова [2]

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L\right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0 \tag{3}$$

для некоторых $x_0 \in R^n$ и $\alpha \in \rho^L(A) = \{\alpha \in C : \det(\alpha L - A) \neq 0\}$.

Будем рассматривать математическую модель измерительного устройства (1), (2), в которую входят функции: $x(t)$, описывающая состояния ИУ; $\dot{x}(t)$, представляющая скорость изменения состояния ИУ; $y(t)$ и $u(t)$, описывающие наблюдения и измерения, соответственно; $\xi(t)$ задает помехи на выходе ИУ, а $\eta(t)$ – в цепях ИУ. Также здесь A и L – квадратные матрицы состояний и взаимного влияния скоростей изменения состояния измерительного устройства, соответственно; C и D – матрицы, которые характеризуют связи между состоянием измерительного устройства и наблюдением [3].

Задачу (1), (3) удается редуцировать к уравнению соболевского типа [4]

$$L\dot{x} = Ax + Bu + G\xi, \tag{4}$$

с условием

$$\lim_{t \to 0+} P\left(x(t) - x_0\right) = 0, \tag{5}$$

где L, A– линейные непрерывные операторы, определенные на гильбертовом пространстве V, действующие в гильбертово пространство G.

Сигнал на входе ИУ будем искать как решение задачи оптимального управления [5]. Для этого будет найдена пара функций $(\hat{x}, \hat{u})$, первая из которых является решением задачи (1), (3), а функция $\hat{u}$ из $U_{ad} \subset U$, удовлетворяющая соотношению

$$J\left(y(\hat{x}), \hat{u}\right) = \min_{(x,u)} J\left(y(x), u\right), \tag{6}$$

является оптимальным динамическим измерением. Здесь U является сепарабельным гильбертовым пространством управлений, а U_{ad} – замкнутое выпуклое множество в нем.

1. Пространства «шумов». Стохастические K-процессы. Стохастические уравнения соболевского типа

Пусть $\boldsymbol{\Omega} \equiv (\Omega, A, \boldsymbol{P})$ – полное вероятностное пространство, R – множество вещественных чисел, наделенное борелевской σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi\colon \boldsymbol{\Omega} \to R$ называется *случайной величиной.* Набор случайных величин с нулевым математическим ожиданием ($\mathbf{E}\xi = 0$) и конечной дисперсией образует гильбертово пространство $\mathbf{L_2}$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$.

Рассмотрим множество $I \subset R$ и следующие отображения. Первое отображение $f : I \to \mathbf{L_2}$ сопоставляет каждому $t \in I$ случайную величину $\xi \in \mathbf{L_2}$. Второе отображение $g : \mathbf{L_2} \times \Omega \to R$ сопоставляет каждой паре (ξ, ω) точку $\xi(\omega) \in R.$ Отображение $\eta : R \times \Omega \to R,$ которое имеет вид $\eta = \eta(t, \omega) = g\left(f(t), \omega\right)$, называется *стохастическим процессом*. Обозначим множество непрерывных случайных процессов через $C(I, \mathbf{L_2})$, оно образует банахово пространство. Пусть $\{\varphi_k\}$ определяет ортонормированный базис в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве V. Обозначим через $V_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$ гильбертово пространство, являющееся пополнением линейной оболочки случайных величин

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k \varphi_k$$

с нормой

$$\|\eta\|_V^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k D\xi_k.$$

Причем последовательность $K = \{\lambda_k\} \subset R_+$ такая, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$, $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L_2}$ – последовательность случайных величин. Элементы $V_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$ назовем V-значными **K**-случайными величинами. Заметим, что для существования K-случайной величины $\xi \in V_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$ нужно рассмотреть последовательность случайных величин $\{\xi_k\} \subset \mathbf{L_2}$ с равномерно ограниченными дисперсиями, т.е. $\mathbf{D}\xi_k \le \mathrm{const}$, $k \in \mathbb{N}$. Отображение $\eta\colon I \to V_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$, заданное формулой

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \eta_k(t) \varphi_k, \text{ где } \{\eta_k\} \subset \mathrm{C}(I, \mathbf{L_2}),$$

называется непрерывным V-значным стохастическим **K**-процессом, если ряд с правой стороны сходится равномерно на любом компакте в I по норме $\|\cdot\|_{V_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}}$, и траектории процесса $\eta = \eta(t)$ почти наверное непрерывны. Случайный K-процесс $\eta = \eta(t)$ имеет непрерывную производную по Нельсону–Гликлиху [6], если ряд

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \overset{\circ}{\eta}_k(t) \varphi_k$$

сходится равномерно на любом компакте в I по норме $\|\cdot\|_{V_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2}$, и траектории процесса $\overset{\circ}{\eta}=\overset{\circ}{\eta}(t)$ почти наверное непрерывны. Здесь через $\overset{\circ}{\eta}_k(t)$ обозначена производная Нельсона–Гликлиха стохастического процесса $\eta_k : I \to \mathbf{L}_2$. Обозначим через $\mathrm{C}(I,\ V_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ – пространство непрерывных V-значных стохастических $\mathbf{K}$-процессов, и через $\mathrm{C}^l\ (I,\ V_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ – пространство непрерывно дифференцируемых по Нельсону–Гликлиху до порядка $l \in \mathbb{N}$ V-значных стохастических $\mathbf{K}$-процессов.

Аналогично, если G – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$, строятся пространства $\mathrm{C}(I,\ G_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$ и $\mathrm{C}^l\ (I,\ G_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$, $l \in \mathbb{N}$.

Пусть операторы $L, A \in \mathcal{L}(V_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2, G_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)$. Введем L-резольвентное множество $\rho^L(A)=\left\{\mu \in C : (\mu L - A)^{-1} \in \mathcal{L}(V_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2, G_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2)\right\}$ и L-спектр $\sigma^L(A) = C \setminus \rho^L(A)$ оператора A. Пусть A является (L,p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ [7].

Построим проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(A)d\mu \in \mathcal{L}(V_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2), \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(A)d\mu \in \mathcal{L}(G_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2).$$

Здесь $R^L_\mu(A) = (\mu L - A)^{-1}L$ и $L^L_\mu(A) = L(\mu L - A)^{-1}$. Положим $V^0_K\mathbf{L}_2\,(V^1_K\mathbf{L}_2) = \ker P\,(\mathrm{im}\, P)$, $G^0_K\mathbf{L}_2\,(G^1_K\mathbf{L}_2) = \ker Q\,(\mathrm{im}\, Q)$. Пространства $V_K\mathbf{L}_2$ и $G_K\mathbf{L}_2$ могут быть представлены как $V_K\mathbf{L}_2 = V^0_K\mathbf{L}_2 \oplus V^1_K\mathbf{L}_2$ и $G_K\mathbf{L}_2 = G^0_K\mathbf{L}_2 \oplus G^1_K\mathbf{L}_2$, причем $V^0_K\mathbf{L}_2 \supset \ker L$. Через $L_k(A_k)$ обозначим сужение оператора $L(A)$ на $V^k_K\mathbf{L}_2$, $k = 0,1$.

Лемма 1. *Операторы* $L_k, A_k \in \mathcal{L}(V^k_K\mathbf{L}_2; G^k_K\mathbf{L}_2)$, $k = 0,1$*; кроме того, существуют операторы* $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(G^0_K\mathbf{L}_2; V^0_K\mathbf{L}_2)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(G^1_K\mathbf{L}_2; V^1_K\mathbf{L}_2)$.

Рассмотрим уравнение соболевского типа (4) в пространствах стохастических процессов. Обозначим для удобства $Bu(t) + G\xi(t) = \omega(t),\ t \in I$.

Теорема 1. *Пусть* A *является* (L,p)*-ограниченным оператором,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Пусть функция случайных помех* $\xi = \xi(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$(I - Q)\xi \in C^{p+1}(I, G_K\mathbf{L}_2) \text{ и } Q\xi \in C(I, G_K\mathbf{L}_2). \tag{7}$$

Тогда для любой вектор-функции u *такой, что*

$$(I - Q)u \in C^{p+1}(I, U) \text{ и } Qu \in C(I, U), \tag{8}$$

и для любой случайной величины $x_0 \in V_K\mathbf{L}_2$, *не зависящей от* ξ, *существует п.н. единственное решение* $x \in C^1(I, V_K\mathbf{L}_2)$ *задачи (4), (5), имеющее вид*

$$x(t) = V(t)x_0 - \sum_{q=0}^{p} H^q A_0^{-1}(I - Q)\overset{\circ}{\omega}{}^{(q)}(t) + \int_0^t V(t-s)L_1^{-1}Q\omega(s)ds, \tag{9}$$

где $V(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(A)e^{\mu t}d\mu,\ t \in R$ *– голоморфная группа разрешающих операторов однородного уравнения (4).*

2. Сильные решения. Оптимальное управление

Пусть $L_2(I; V_K\mathbf{L}_2)$ – пространства случайных процессов, чьи траектории интегрируемы с квадратом на I.

Определение. Вектор-функция

$$x \in H^1(V_K\mathbf{L}_2) = \{x \in L_2(I; V_K\mathbf{L}_2) : \overset{o}{x} \in L_2(I; V_K\mathbf{L}_2)\}$$

называется *сильным решением* (4), если она п.в. обращает уравнение в тождество на I. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (4) называется сильным решением задачи (4), (5), если оно удовлетворяет (5).

Пусть U – действительное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом φ_K. Построим гильбертовы пространства

$$H^{p+1}(G_K\mathbf{L_2}) = \{v \in L_2(I;G_K\mathbf{L_2}) : \overset{o}{v}^{(p+1)} \in L_2(I;G_K\mathbf{L_2}),\, p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)}\right\rangle_{G_K\mathbf{L}_2} dt,$$

и пространство управлений

$$\overset{\circ}{H}{}^{p+1}(U) = \{u \in L_2(I;U) : u^{(p+1)} \in L_2(I;U)\},\ \ p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)}\right\rangle_U dt.$$

Пусть $\xi \in H^{p+1}(G_K L_2)$. Введем в рассмотрение операторы

$$A_1\xi(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q A_0^{-1} G(I-Q)\overset{o}{\xi}{}^{(q+1)}(t), \quad \tilde{A}_1 u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q A_0^{-1} B(I-Q)u^{(q+1)}(t),$$

$$A_2\xi(t) = \int_0^t V(t-s)L_1^{-1}Q\xi(s)ds, \quad \tilde{A}_2 u(t) = \int_0^t V(t-s)L_1^{-1}Qu(s)ds,\, t \in I$$

и вектор-функцию

$$k(t) = V(t)x_0.$$

Лемма 2. *Пусть* A *является* (L,p)*-ограниченным оператором,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Тогда*

(i) $A_1 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(G_K\mathbf{L_2}); H^1(V_K\mathbf{L_2})),\ \tilde{A}_1 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(U); H^1(V))$;

(ii) $A_2 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(G_K\mathbf{L_2}); H^1(V_K\mathbf{L_2})),\ \tilde{A}_2 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(U); H^1(V))$;

(iii) *для* $x_0 \in V_K\mathbf{L_2}$ *функция* $k \in C^1(I;V_K\mathbf{L_2})$.

Теорема 2. *Пусть* A *является* (L,p)*-ограниченным оператором,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Пусть функция случайных помех* $\xi = \xi(t)$ *удовлетворяет условию (7). Тогда для любой вектор-функции* u, *удовлетворяющей условиям (8), и для любой случайной величины* $x_0 \in V_K\mathbf{L_2}$, *не зависящей от* ξ, *существует п.н. единственное сильное решение задачи (1), (2).*

Рассмотрим задачу (5) для уравнения соболевского типа с аддитивным «шумом» (4). В пространстве управлений $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}(U)$ выделим замкнутое и выпуклое множество. Обозначим его $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}_\partial(U)$ – множество допустимых управлений. Вектор-функция $\hat{u} \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_\partial(U)$ – оптимальное управление решениями задачи (4), (2), (5), если она минимизирует функционал $J\left(y(x),u\right)$, т.е. выполнено (6).

Покажем однозначную разрешимость задачи оптимального управления. Нам нужно найти $\hat{u} \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_\partial(U)$, которая будет удовлетворять соотношению (6), причем

$$J\left(y(x),u\right) = \sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \| \overset{\circ}{y}{}^{(q)}(x(t,u),t) - \tilde{y}^{(q)}(t)\|^2\, dt, \tag{10}$$

где $x(t,u)$ – сильное решение задачи (4), (5), $\tilde{y}(t)$ – заданное наблюдение, $y(x(t,u),t)$ определяется соотношением (2).

Теорема 3. *Пусть* A *является* (L, p)*-ограниченным оператором,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Пусть функция случайных помех* $\xi = \xi(t) \in H^{p+1}(G_K \mathbf{L_2})$ *удовлетворяет условию (7). Тогда для любой* $\eta \in H^1(G_K \mathbf{L_2})$ *существует единственное оптимальное управление решениями задачи (2), (4)–(6).*

Доказательство. Для любых $\xi \in H^{p+1}(G_K \mathbf{L_2})$, $x_0 \in V_K \mathbf{L_2}$, $u \in H^{p+1}(U)$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(G_K \mathbf{L_2})$ задачи (4), (5):

$$x(t) = (A_1 + A_2)\xi(t) + (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)u(t) + k(t), \tag{11}$$

где операторы $A_1, A_2, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ и функция $k(t)$ из леммы 2.

Зафиксируем $\xi \in H^{p+1}(G_K \mathbf{L_2})$ и $x_0 \in V_K \mathbf{L_2}$, и рассмотрим (11) как отображение $D: u \to x(u)$. Тогда $D: H^{p+1}(U) \to H^1(V_K \mathbf{L_2})$ будет непрерывным. Так как $y(x)$ определяется соотношением (2), то функционал J зависит только от $u: J\left(y(x(t,u))\right) = J(u)$.

Перепишем его следующим образом

$$J(y(x(t,u))) = \|y(x(t,u)) - \tilde{y}(t)\|^2_{H^1(G_K \mathbf{L_2})}.$$

И представим

$$J(u) = \pi(u,u) - 2\lambda(u) + \|\tilde{y}(t) - y(x(t,0))\|^2,$$

обозначив

$$\pi(u,u) = \|y(x(t,u)) - y(x(t,0))\|^2_{H^1(G_K \mathbf{L_2})},$$

являющейся билинейной непрерывной коэрцитивной формой на $H^{p+1}(U)$, и

$$\lambda(u) = \left\langle \tilde{y}(t) - y(x(t,0)), y(x(u),t) - y(x(t,0)) \right\rangle_{H^1(G_K \mathbf{L_2})}$$

– линейная непрерывная форма на $H^{p+1}(U)$. Следовательно, выполняется теорема 1.1 [8, стр. 13]. Доказательство завершено.

3. Восстановление динамически искаженного сигнала как оптимального динамического измерения

Для исследования математической модели оптимальных динамических измерений введем в рассмотрение пространства $V = G = R^n$, последовательность $K = (\underbrace{1,\ 1, \ldots, 1,}_{n}\ 0, \ldots)$ и рассмотрим пространство состояний

$$\mathrm{X} = \left\{x \in L_2(I, R^n \mathbf{L_2}) : \dot{x} \in L_2(I, R^n \mathbf{L_2})\right\},$$

пространство измерений

$$U = \left\{u \in L_2(I, R^n) : u^{(p+1)} \in L_2(I, R^n)\right\}$$

и пространство наблюдений $Y = C\left[X\right]$, где Y изоморфно некоторому подпространству в X, хотя и не всегда $Y = X$.

Таким образом, была проведена редукция задачи (1)–(3), (6) к (2), (4)–(6).

Теорема 4. *Пусть* L *и* A *– матрицы порядка* $n \times n$, *причем матрица* A *является* (L, p)*-регулярной и* $\det A \neq 0$. *Тогда для любых* $\xi \in H^{p+1}(G_K \mathbf{L_2})$, *удовлетворяющих (7),* $x_0 \in R^n \mathbf{L_2}$, $\eta \in H^1(R^n \mathbf{L_2})$ *существует единственное оптимальное управление решениями задачи (1)–(3), (6).*

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант FENU-2020-0022 (2020072ГЗ).

Литература

1. Shestakov, A.L. On the measurement of the «white noise» / A.L. Shestakov, G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Т. 27 (286), Вып. 13. – С. 99–108.

2. Загребина, С.А. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей соболевского типа / С.А. Загребина, А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 5–23.

3. Восстановление динамически искаженного сигнала на основе теории оптимальных динамических измерений / А.Л. Шестаков, А.А. Замышляева, Н.А. Манакова и др. // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 12. – С. 125–137.

4. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. – 216 p.

5. Zamyshlyaeva, A.A. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models / A.A. Zamyshlyaeva, N.A. Manakova, O.N. Tsyplenkova // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2020. – Т. 13, № 1. – С. 5–27.

6. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011. – 436 p.

7. Sviridyuk, G.A. Multipoint initial-final problem for one class of Sobolev type models of higher order with additive «white noise» / G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva, S.A. Zagrebina // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2018. – Т. 11, № 3. – С. 103–117.

8. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

Поступила в редакцию 18 июля 2022 г.

Сведения об авторах

Замышляева Алена Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru.

Цыпленкова Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: tcyplenkovaon@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2022, vol. 14, no. 3, pp. 38–44

DOI: 10.14529/mmph220304

RECONSTRUCTION OF DYNAMICALLY DISTORTED SIGNALS BASED ON THE THEORY OF OPTIMAL CONTROL OF SOLUTIONS FOR SOBOLEV TYPE EQUATIONS IN THE SPACES OF STOCHASTIC PROCESSES

A.A. Zamyshlyaeva, O.N. Tsyplenkova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru, tcyplenkovaon@susu.ru

Abstract. This paper investigates the solvability of the optimal control problem for solutions of stochastic Sobolev type equations. It is shown that the optimal dynamic measurement problem can be considered as an optimal control problem. To do this, the mathematical model of dynamic measurements is reduced to a stochastic Sobolev type equation of the first order in the spaces of stochastic processes. The article presents theorems on the existence of a unique classical and strong solutions of the Sobolev type equation with initial condition of Showalter–Sidorov in the spaces of stochastic processes. The theorem of the unique solvability of the optimal control problem for such equation is proved. The abstract results obtained for Sobolev type equation are applied to the problem of restoring a dynamically distorted signal as an optimal dynamic measurement.

Keywords: dynamic measurements; additive “noise”; Sobolev type equations; strong solutions; optimal control problem.

References

1. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. On the Measurement of the “White Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2012, Vol. 27 (286), Iss. 13, pp. 99–108.

2. Zagrebina S.A., Keller A.V. Some Generalizations of the Showalter–Sidorov Problem for Sobolev-type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2015, Vol. 8, no. 2. pp. 5–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp150201

3. Shestakov A.L., Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal Based on the Theory of Optimal Dynamic Measurements. *Automation and Remote Control*, 2021, Vol. 82, no. 12, pp. 2143–2154. DOI: 10.1134/S0005117921120067

4. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operator*. Utrecht; Boston, VSP, 2003, 216 p. DOI: 10.1515/9783110915501

5. Zamyshlyaeva A.A., Manakova N.A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2020, Vol. 13, no. 1, pp. 5–27.

6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011, 436 p.

7. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A., Zagrebina S.A. Multipoint Initial-final Problem for One Class of Sobolev Type Models of Higher Order with Additive “White Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2018, Vol. 11, no. 3, pp. 103–117. DOI: 10.14529/mmp190204

8. Lions, Zh.-L. *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi* (The Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations). Moscow, Mir Publ., 1972, 414 p. (in Russ.).

Received July 18, 2022

Information about the authors

Zamyshlyaeva Alyona Aleksandrovna is Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru.

Tsyplenkova Olga Nikolaevna is Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: tcyplenkovaon@susu.ru.