УДК 517.925 DOI: 10.14529/mmph220306

КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО СТЕПЕНЯМ НЕГРУБОСТИ

В.Ш. Ройтенберг
Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Дифференциальное уравнение вида *x' = f(t, x)* с правой частью *f(t, x)*, имеющей непрерывные производные до *r*–го порядка включительно, 1-периодической по *t*, мы отождествляем с функцией *f* и рассматриваем как элемент банахова пространства E^r таких функций с C^r –нормой. Уравнение *f* определяет динамическую систему на цилиндрическом фазовом пространстве. Уравнение *f* называется грубым, если любое достаточно близкое к нему уравнение топологически эквивалентно *f*, то есть имеет ту же топологическую структуру фазового портрета. Уравнение *f* имеет *k*-ю степень негрубости, если любое достаточно близкое к нему негрубое уравнение либо имеет степень негрубости меньшую *k*, либо топологически эквивалентно *f*. В работе описано множество уравнений *k*-й степени негрубости (*k* < *r*), показано, что оно образует вложенное подмногообразие коразмерности *k* в E^r, открыто и всюду плотно в множестве всех негрубых уравнений, не имеющих степень негрубости меньшую *k*.

Ключевые слова: периодическое дифференциальное уравнение; цилиндрическое фазовое пространство; грубость; степень негрубости; бифуркационное многообразие.

Введение

Идея классификации негрубых динамических систем по степеням негрубости была сформулирована А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович в статье [1] . Для динамических систем на плоскости были описаны грубые системы, системы первой степени негрубости и их бифуркации [2]. На замкнутых двумерных многообразиях необходимые и достаточные условия грубости были получены М. Пейксото [3], а условия первой степени негрубости С.Х. Арансоном [4]. В работе [5] Ж. Сотомайор доказал, что множество Σ_1^r систем первой степени негрубости на замкнутом двумерном многообразии M является вложенным C^{r-1}-подмногообразие коразмерности один в банаховом пространстве X^r всех систем, задаваемых C^r-векторными полями на M.

С.Х. Арансон [6] установил, что для динамических систем на поверхностях рода $g \geq 1$ Σ_1^r неплотно в множестве X_1^r всех негрубых систем. Этот результат показывает, что продолжение классификации по степеням негрубости на таких поверхностях не является естественным. Известно, что для векторных полей на двумерной сфере Σ_1^r всюду плотно в X_1^r (см. например, [6]), хотя явное доказательство этого факта в литературе, по-видимому, отсутствует. Следующий шаг классификации – полное описание систем второй степени негрубости и их бифуркаций не сделан, хотя бифуркации некоторых систем второй степени негрубости изучены. На многообразиях размерности $n \geq 3$ грубые системы описаны [7–8], но они не плотны в X^r [9], и потому классификация негрубых систем по степеням негрубости не имеет смысла.

Таким образом, классификация динамических систем по степеням негрубости может быть разумна либо в тривиальном одномерном случае, либо в двумерном случае для специальных классов динамических систем.

Мы опишем такую классификацию для динамических систем на цилиндре, задаваемых уравнением $\dot{x} = f(t,x)$ с достаточно гладкой правой частью, периодической по t.

1. Формулировка результатов

Будем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{1}$$

с правой частью $f(t,x)$, являющейся C^r-функцией ($r \geq 3$), определенной на прямом произведении множества действительных чисел $\mathbf{R}$ на отрезок $[-a,a]$, 1-периодической по t. Будем отождествлять уравнение (1) с функцией f, а множество E^r рассматриваемых уравнений с банаховым пространством соответствующих функций с нормой

$$\|f\|_r := \max_{0\le i+j\le r}\max_{(t,x)\in[0,1]\times[-a,a]}|\partial^{i+j}f(t,x)/\partial t^i\partial x^j|.$$

Пусть E^r_+ – открытое подмножество в E^r, состоящее из таких уравнений, что

$$\forall t\in[0,1]\quad \pm f(t,\pm a)<0. \tag{2}$$

Траекториями уравнения $f\in\mathrm{E}^r_+$ будем называть траектории векторного поля

$$\vec{f}(s,x)=1\partial/\partial s+f(s,x)\partial/\partial x$$

на цилиндре $\Phi:=\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times[-a,a]$. Ввиду (2) в точках $(s,x)\in\partial\Phi=\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\{-a,a\}$ вектор $\vec{f}(s,x)$ направлен внутрь Φ.

Уравнения f и g из E^r_+ назовем *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h:\Phi\to\Phi$, переводящий траектории уравнения f в траектории уравнения g.

Уравнение $f\in\mathrm{E}^r_+$ назовем *грубым относительно подпространства* $\Lambda\subset\mathrm{E}^r_+$, если $f\in\Lambda$ и существует его окрестность $U(f)$ в E^r_+, такая, что f и любое уравнение $g\in U(f)\cap\Lambda$ топологически эквивалентны.

Уравнение $f\in\mathrm{E}^r_+$, грубые относительно E^r_+, будем называть просто *грубыми*, а их множество обозначать Σ^r_0. По индукции определим множества Σ^r_k $(k=1,2,...)$ уравнений, грубых относительно $\mathrm{E}^r_+\setminus(\Sigma^r_0\cup...\cup\Sigma^r_{k-1})$. Уравнения из Σ^r_k $(k=1,2,...)$ будем называть *уравнениями* k*-й степени негрубости.*

Обозначим $X(t,u,f)$ решение уравнения $f\in\mathrm{E}^r_+$, удовлетворяющее начальному условию $X(0,u,f)=u$. Функция $X(t,u,f)$ в точках $(t,u,f)\in[0,\infty)\times[-a,a]\times\mathrm{E}^r_+$ определена и принадлежит классу C^r [10, с. 54]. *Функция последования* $P(\cdot,f):=X(1,\cdot,f)$ задает отображение $(0,u)\mapsto(0,P(u,f))$ дуги $\{0\}\times[-a,a]\subset\Phi$ в себя по траекториям поля $\vec{f}$. Введем также *функцию расхождения* $d(u,f):=P(u,f)-u$. Траектория Γ_0 уравнения f, проходящая через точку $(0,u_0)\in\Phi$, является замкнутой тогда и только тогда, когда $d(u_0,f)=0$. Если при этом

$$\partial^k d(u_0,f)/\partial u^k=0 \text{ для } k\le n-1,\ \partial^n d(u_0,f)/\partial u^n\ne 0 \quad (1\le n\le r),$$

то число n называется *кратностью* замкнутой траектории Γ_0.

Множество Σ^r_0 грубых уравнений состоит из уравнений, имеющих замкнутые траектории только кратности 1; оно открыто и всюду плотно в E^r_+ [2].

Как и в [5], *вложенным* C^l*-подмногообразием* E^r_+ *коразмерности* k будем называть такое подмножество $\mathrm{B}\subset\mathrm{E}^r_+$, что для любого $f\in\mathrm{B}$ существует окрестность $U(f)$ в E^r_+ и такое C^l-отображение $F:U(f)\to\mathbf{R}^k$, что производная $F'(f):\mathrm{E}^r\to\mathbf{R}^k$ сюръективна и $F^{-1}(0)=\mathrm{B}\cap U(f)$.

Теорема 1. *Уравнение* $f\in\mathrm{E}^r_+$ *является уравнением k-й степени негрубости (*$1\le k\le r$*), тогда и только тогда, когда оно имеет конечное число* s *замкнутых траекторий, сумма кратностей которых равна* $s+k$.

Для любого $k\in\{1,...,r\}$ *множество* Σ^r_k *уравнений k-й степени негрубости открыто и всюду плотно в* $\mathrm{E}^r_+\setminus(\Sigma^r_0\cup...\cup\Sigma^r_{k-1})$.

Теорема 2. *Для любого* $k\in\{1,...,r-1\}$ *множество* Σ^r_k *является вложенным* C^{r-k}*-подмногообразием* E^r_+ *коразмерности* k.

Доказательства теорем 1 и 2 приведены соответственно в разделах 2 и 3.

Замечание 1. Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, справедливы для диффеоморфизмов отрезка и диффеоморфизмов окружности с неподвижными точками. Их доказательства получается модификацией доказательств этих теорем. Поскольку разные уравнения из E^r_+ могут иметь одну и ту же функцию последования, то эти утверждения не являются следствием теорем 1 и 2 , а из них не следуют теоремы 1 и 2 .

Замечание 2. В определение C^r-векторного поля $\vec{f}$ k-й степени негрубости в области Φ на плоскости (см. [2]) включено требование, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ окрестность U поля $\vec{f}$ можно было выбрать так, чтобы для любого векторного поля $\vec{g} \in U \setminus (\Sigma_0^r \cup \ldots \cup \Sigma_{k-1}^r)$ гомеоморфизм $h : \Phi \to \Phi$, переводящий траектории поля $\vec{f}$ в траектории поля $\vec{g}$, был ε-близок к тождественному. Хотя в определение k-й степени негрубости уравнения $f \in \mathrm{E}_+^r$ аналогичное требование не включено, но из доказательства теоремы 1 и [2] видно, что если $f \in \Sigma_k^r$, $k \in \{1,\ldots,r\}$, то для каждого $\varepsilon > 0$ окрестность $U(f)$ можно выбрать так, чтобы для любого уравнения $g \in U(f) \setminus (\Sigma_0^r \cup \ldots \cup \Sigma_{k-1}^r)$ гомеоморфизм $h : \Phi \to \Phi$, переводящий траектории уравнения f в траектории уравнения g, был ε-близок к тождественному в метрике dist в Φ, индуцированной евклидовой метрикой в $\mathbf{R} \times [-a, a]$, то есть $\forall z \in \Phi \ \ \operatorname{dist}(z, h(z)) < \varepsilon$.

2. Доказательство теоремы 1

Обозначим $\hat{\Sigma}_k^r$, $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, множество уравнений из E_+^r, имеющих конечное число замкнутых траекторий, сумма кратностей которых больше их числа на величину k. Оба утверждения теоремы 1 вытекают из следующей леммы.

Лемма. *Для любого* $k \in \{0,1,\ldots,r\}$ $\hat{\Sigma}_k^r$ *открыто и всюду плотно в* $\mathrm{E}_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \ldots \cup \Sigma_{k-1}^r)$ *и* $\hat{\Sigma}_k^r = \Sigma_k^r$.

Доказательство леммы. При $k = 0$ утверждение леммы верно. Пусть оно верно для всех $k \le n-1$, $n \le r$. Докажем его справедливость и при $k = n$. Возьмем уравнение $f \in \mathrm{E}_+^r \setminus (\Sigma_0^r \cup \ldots \cup \Sigma_{n-1}^r) \setminus \hat{\Sigma}_n^r$. Тогда либо 1) $f \in \hat{\Sigma}_j^r$ с $j > n$, либо 2) f имеет замкнутую траекторию, проходящую через точку $(0, u_0) \in \Phi$, в которой $\partial^m d(u_0, f)/\partial u^m = 0$ для всех $m \le n$. Покажем, что в любой окрестности $U(f)$ уравнения f есть уравнение из $\hat{\Sigma}_n^r$.

Сначала рассмотрим случай 1). Достаточно доказать, что в любой окрестности уравнения $g \in \hat{\Sigma}_N^r$, $N > n$, есть уравнение из $\hat{\Sigma}_{N-1}^r$. Так как уравнение g негрубое, то существует точка $(0, u_0) \in \Phi$, через которую проходит замкнутая траектория Γ_0 уравнения кратности $l \ge 2$. Выберем столь малое число $\varepsilon > 0$, что

$$\forall t \in \mathbf{R} \ \ -a < X(t, u_0, g) - \varepsilon < X(t, u_0, g) < X(t, u_0, g) + \varepsilon < a,$$

а для любой замкнутой траектории $x = X(t, u_*, g)$, отличной от Γ_0,

$$\forall t \in \mathbf{R} \ \ |X(t, u_*, g) - X(t, u_0, g)| \ge \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть $\alpha : \mathbf{R} \to [0,1]$ – такая срезывающая C^∞-функция, что

$$\alpha(y) = 1 \text{ при } |y| \le \varepsilon/3, \ \alpha(y) = 0 \text{ при } |y| \ge 2\varepsilon/3. \tag{4}$$

Уравнение $g_\mu \in \mathrm{E}_+^r$ с правой частью

$$g_\mu(t, x) := g(t, x) + \mu(x - X(t, u_0, g))^{l-1} \alpha(x - X(t, u_0, g)) \tag{5}$$

имеет решение $X(t, u_0, g_\mu) \equiv X(t, u_0, g)$.

Пусть $l \ge 3$. Обозначим

$$A(t) := \frac{\partial}{\partial x} g_\mu(t, x)\Big|_{x = X(t, u_0, g)} = \frac{\partial}{\partial x} g(t, x)\Big|_{x = X(t, u_0, g)}, \ B_i(t, \mu) := \frac{\partial^i}{\partial x^i} g_\mu(t, x)\Big|_{x = X(t, u_0, g)}, \ i \ge 2.$$

Производные функций $\xi_m(t) := \partial^m X(t, u, g_\mu)/\partial u^m\big|_{u=u_0}$, $m = 1, 2, \ldots, l-1$, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\xi}_1(t) = A(t)\xi_1(t), \ \ \dot{\xi}_m(t) = A(t)\xi_m(t) + B_m(t, \mu)(\xi_1(t))^m + R_m(t, \mu), \ m \ge 2,$$

где $R_m(t, \mu)$ – многочлен относительно $B_2(t, \mu), \ldots, B_{m-1}(t, \mu)$ и $\xi_1(t), \ldots, \xi_{m-1}(t)$, $R_2(t, \mu) \equiv 0$, а также начальным условиям $\xi_1(0) = 1$, $\xi_m(0) = 0$ при $m \ge 2$.

Так как все функции $A(t)$, $B_i(t,\mu)$, $i=1,2,...,l-2$, а потому $\xi_i(t)$, $i=1,2,...,l-2$, и $R_j(t,\mu)$, $j=1,2,...,l-1$, не зависят от μ, то $\partial^i d(u_0,g_\mu)/\partial u^i=\partial^i d(u_0,g)/\partial u^i=0$ при $i=1,2,...,l-2$. Учитывая, что $B_{l-1}(t,\mu)=\mu(l-1)!+B_{l-1}(t,0)$, $\partial^{l-1}d(u_0,g)/\partial u^{l-1}=0$, а $\xi_1(t)>0$, получаем при $\mu>0$

$$\partial^{l-1}d(u_0,g_\mu)/\partial u^{l-1}=\int_0^1[B_{l-1}(t,\mu)(\xi_1(t))^{l-1}+R_{l-1}(t,0)]/\xi_1(t))dt=$$

$$=\int_0^1[B_{l-1}(t,0)(\xi_1(t))^{l-1}+R_{l-1}(t,0)]/\xi_1(t))dt+\mu(l-1)!\int_0^1(\xi_1(t))^{l-2}dt=$$

$$=\partial^{l-1}d(u_0,g)/\partial u^{l-1}+\mu(l-1)!\int_0^1(\xi_1(t))^{l-2}dt=\mu(l-1)!\int_0^1(\xi_1(t))^{l-2}dt>0\,.$$

Поэтому u_0 – нуль функции $d(\cdot,g_\mu)$ кратности $l-1$. Это верно и при $l=2$, так как тогда

$$\partial X(1,u,g_\mu)/\partial u\Big|_{u=u_0}=\exp\int_0^1\left(\mu+\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)\Big|_{x=X(t,u_0,g)}\right)dt=\exp\mu\,,$$

и потому $\partial d(u_0,g_\mu)/\partial u=\exp\mu-1\neq 0$.

Вследствие (3) и (5) $\operatorname{sgn}[d(u_0-\varepsilon,g_\mu)d(u_0+\varepsilon,g_\mu)]=\operatorname{sgn}[d(u_0-\varepsilon,g)d(u_0+\varepsilon,g)]=(-1)^l$. Поэтому независимо от знака производной $\partial^l d(u_0,g)/\partial u^l$ и четности числа l, функция $d(\cdot,g_\mu)$ имеет на интервале $(u_0-\varepsilon,u_0+\varepsilon)$ хотя бы один нуль u_1, отличный от u_0. Вне этого интервала $d(\cdot,g_\mu)$ имеет те же нули и той же кратности, что и $d(\cdot,g)$. При μ, достаточно близких к нулю, сумма кратности нулей $d(\cdot,g_\mu)$ не превосходит сумму кратности нулей $d(\cdot,g)$ [2, с. 18–20]. Поэтому u_1 – единственный нуль на интервале $(u_0-\varepsilon,u_0+\varepsilon)$, отличный от u_0, а его кратность равна 1. Таким образом, разность между суммой кратностей замкнутых траекторий и их числом уменьшилась на единицу при переходе от уравнения g к уравнению g_μ, которое можно выбрать сколь угодно близким к g в E_+^r. Тем самым доказано, что в любой окрестности уравнения $f\in\hat{\Sigma}_j^r$ с $j>n$ есть уравнение из $\hat{\Sigma}_n^r$.

Рассмотрим случай 2). Как и в случае 1) получим, что в заданной окрестности $U(f)$ уравнения f существует уравнение g, для которого Γ_0: $x=X(t,u_0,f)$, $t\in\mathbf{R}$, является замкнутой траекторией, причем u_0 – нуль функции расхождения $d(\cdot,g)$ кратности n. Для определенности, пусть n нечетно и $\partial^n d(u_0,g)/\partial u^n<0$. Остальные возможные случаи рассматриваются аналогично.

Из [11, с. 100] следует, что существуют C^r-отображения $\overline{\gamma}_\pm:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, такие, что $\forall t\in\mathbf{R}$ $\overline{\gamma}_\pm(t+1)=\overline{\gamma}_\pm(t)$, $-a<\overline{\gamma}_-(t)<X(t,u_0,f)<\overline{\gamma}_+(t)<a$, $\operatorname{sgn}(\overline{\gamma}'_\pm(t)-g(t,\overline{\gamma}_\pm(t)))=\pm1$, а траектории уравнения g, начинающиеся в точках кольца $\{(s,x)\in\Phi: s=t\operatorname{mod}1,\ \overline{\gamma}_-(t)\le x\le\overline{\gamma}_+(t)\}$, ω-предельны к Γ_0. Выбрав достаточно малое число $\varepsilon>0$, получим, что

$$\forall t\in\mathbf{R}\ \ -a<\overline{\gamma}_-(t)-\varepsilon<\overline{\gamma}_-(t)+\varepsilon<X(t,u_0,f)<\overline{\gamma}_+(t)-\varepsilon<\overline{\gamma}_+(t)+\varepsilon<a\,,$$

$$\operatorname{sgn}(\overline{\gamma}'_\pm(t)-g(t,\overline{\gamma}_\pm(t)+\xi))=\pm1 \text{ при всех } t\in\mathbf{R},\ \xi\in[-\varepsilon,\varepsilon]. \qquad (6)$$

Пусть $U_\nu(g):=\{\tilde{g}\in\mathrm{E}_+^r:\|\tilde{g}-g\|_r<\nu\}$. Выберем $\rho>0$ так, чтобы $U_\rho(g)\subset U(f)$. Для любого $\delta>0$ существует уравнение $g_\delta\in U_\delta(g)$ с аналитической правой частью $g_\delta(t,x)$. Можно взять за $g_\delta(t,x)$ N-ю сумму Фейера ряда Фурье функции $g(t,x)$ при достаточно большом N [12, с. 405]. При достаточно малом δ из (6) следует, что

$$\operatorname{sgn}(\overline{\gamma}'_\pm(t)-g_\delta(t,\overline{\gamma}_\pm(t)+\xi))=\pm1 \text{ при всех } t\in\mathbf{R},\ \xi\in[-\varepsilon,\varepsilon]. \qquad (7)$$

Пусть $\alpha:\mathbf{R}\to[0,1]$ – C^∞-функция, удовлетворяющая условиям (4). Рассмотрим уравнение $g_*\in\mathrm{E}_+^r$ с правой частью

$$g_*(t,x):=\alpha(x-\overline{\gamma}_\pm(t))g_\delta(t,x)+(1-\alpha(x-\overline{\gamma}_\pm(t)))g(t,x)\,,\ \text{если}\ |x-\overline{\gamma}_\pm(t)|\le\varepsilon\,,$$

$$g_*(t,x) := g(t,x)\text{, если } \bar\gamma_-(t)+\varepsilon < x < \bar\gamma_+(t)-\varepsilon, \tag{8}$$
$$g_*(t,x) := g_\delta(t,x)\text{, если } -a \le x < \bar\gamma_-(t)-\varepsilon \text{ или } \bar\gamma_+(t)+\varepsilon < x \le a.$$

При достаточно малом δ $g_* \in U_\rho(g)$. Из (7) и (8) следует, что

$$\operatorname{sgn}(\bar\gamma'_\pm(t) - g_*(t, \bar\gamma_\pm(t)+\xi)) = \pm 1 \text{ при всех } t\in\mathbf{R},\ \xi\in[-\varepsilon,\varepsilon]. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем, что все траектории уравнения g_*, пересекающиеся с кольцом

$$K := \{(s,x)\in\Phi : s = t \operatorname{mod} 1,\ \bar\gamma_-(t)-\varepsilon \le x \le \bar\gamma_+(t)+\varepsilon\},$$

ω-предельны к Γ_0. Поскольку в $\Phi\setminus K$ векторное поле $\vec g_*$ аналитическое, то все замкнутые траектории поля, принадлежащие $\Phi\setminus K$ имеют конечную кратность. Поэтому $g_*\in\hat\Sigma^r_j$ при некотором $j\ge n$. Но тогда, как было показано в случае 1), в любой окрестности уравнения g_*, а потому и в $U(f)$ есть уравнение из $\hat\Sigma^r_n$. Таким образом, плотность $\hat\Sigma^r_n$ в $\mathrm{E}^r_+\setminus(\Sigma^r_0\cup\ldots\cup\Sigma^r_{n-1})$ доказана.

Пусть уравнение $f\in\hat\Sigma^r_n$, и u_i, $i=1,\ldots,N$, – все нули функции $d(\cdot,f)$, пронумерованные в порядке возрастания. Выберем число $\rho>0$ так, чтобы отрезки $[u_i-\rho, u_i+\rho]$ принадлежали $[-a,a]$ и между собой не пересекались. Если окрестность $U(f)$ уравнения f в E^r_+ достаточно мала, то для любого уравнения $\tilde f\in U(f)$ в точках каждого из отрезков $[-a,u_1-\rho]$, $[u_i+\rho, u_{i+1}-\rho]$, $i=1,\ldots,N-1$, $[u_N+\rho, a]$ $\operatorname{sgn} d(u,\tilde f) = \operatorname{sgn} d(u,f)$, а число нулей функции $d(\cdot,\tilde f)$ с учетом их кратности на каждом интервале $(u_i-\rho, u_i+\rho)$, $i=1,\ldots,N$, не превосходит кратности нуля u_i функции $d(\cdot,f)$ [2, с. 18–20]. Если при этом $\tilde f\notin\Sigma^r_0\cup\ldots\cup\Sigma^r_{n-1}$, то в каждом интервале $(u_i-\rho, u_i+\rho)$ будет по одному нулю $\tilde u_i$ функции $d(\cdot,\tilde f)$, той же кратности, что и нуль u_i функции $d(\cdot,f)$. Но тогда $\tilde f\in\hat\Sigma^r_n$, то есть, $\hat\Sigma^r_n$ открыто в $\mathrm{E}^r_+\setminus(\Sigma^r_0\cup\ldots\cup\Sigma^r_{n-1})$; в точках каждого из промежутков $[-a,\tilde u_1)$, $(\tilde u_i, \tilde u_{i+1})$, $i=1,\ldots,N-1$, $(\tilde u_N, a]$ $d(u,\tilde f)$ имеет тот же знак, что и $d(u,f)$ точках соответствующих промежутков $[-a,u_1)$, (u_i, u_{i+1}), $i=1,\ldots,N-1$, $(u_N, a]$. Отсюда следует, что функции последования $P(\cdot,\tilde f)$ и $P(\cdot,f)$ сопряжены, то есть существует такой гомеоморфизм $h_0:[-a,a]\to[-a,a]$, что $\forall u\in[-a,a]$ $P(h_0(u),\tilde f) = h_0(P(u,f))$. Но тогда уравнения f и $\tilde f$ топологически эквивалентны, то есть $f\in\Sigma^r_n$. Тем самым доказано, что $\hat\Sigma^r_n\subset\Sigma^r_n$.

Пусть уравнение $f\in\Sigma^r_n$, а $U(f)$ такая его окрестность в E^r_+, что f и любое уравнение из $U(f)\setminus(\Sigma^r_0\cup\ldots\cup\Sigma^r_{n-1})$ топологически эквивалентны. Поскольку $\hat\Sigma^r_n$ всюду плотно в $\mathrm{E}^r_+\setminus(\Sigma^r_0\cup\ldots\cup\Sigma^r_{n-1})$, то f топологически эквивалентно некоторому уравнению из $\hat\Sigma^r_n$, и потому $d(\cdot,f)$ имеет конечное число нулей. Покажем, что $f\in\hat\Sigma^r_n$. Предположим временно, что это не так. Тогда возможны два случая:

А) $f\in\hat\Sigma^r_l$ при некотором $l\ge n+1$, Б) $d(u_0,f)=\ldots=\partial^r d(u_0,f)/\partial u^r = 0$ при некотором u_0.

В случае А), аналогично случаю 1) в доказательстве плотности $\hat\Sigma^r_n$, в $U(f)$ существует уравнение $\tilde f$, принадлежащее $\hat\Sigma^r_{l-1}$, а потому и $U(f)\setminus(\Sigma^r_0\cup\ldots\cup\Sigma^r_{n-1})$, имеющее больше замкнутых траекторий, чем f. Это противоречит тому, что f и $\tilde f$ топологически эквивалентны.

В случае Б) при некотором $\varepsilon>0$ u_0 – единственный нуль функции $d(\cdot,f)$ на отрезке $[u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon]$. Как и выше, мы можем построить такое уравнение $\tilde f\in U(f)$, что все замкнутые траектории уравнения f являются и траекториями уравнения $\tilde f$, u_0 – нуль функции $d(\cdot,\tilde f)$ кратности r, $d(u_0+\varepsilon,\tilde f)\cdot\partial^r d(u_0,\tilde f)/\partial u^r < 0$. Тогда $d(\cdot,\tilde f)$ имеет нуль $u_*\in(u_0, u_0+\varepsilon)$, а уравнение $\tilde f$ имеет больше замкнутых траекторий, чем уравнение f. Но это противоречит топологической эквивалентности уравнений f и $\tilde f$.

Таким образом, сделанное предположение неверно и, на самом деле, $f \in \hat{\Sigma}_n^r$. Тем самым, мы показали, что $\hat{\Sigma}_n^r = \Sigma_n^r$.

Теперь доказано, что из утверждения леммы при $k \le n-1$ следует утверждение леммы при $k = n$. По индукции получаем утверждения леммы при всех $k \le r$.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть уравнение $f \in \Sigma_k^r$, $k \in \{1,...,r-1\}$. Пусть u_j, $j \in \{1,...,N\}$ – все нули функции $d(\cdot, f)$, а k_j – их кратности, u_i ($i \in \{1,...,n\}$, $n \le N$) – те нули, кратность которых $k_i \ge 2$. Тогда $k_1 + ... + k_n - n = k$. Выберем такое число $\varepsilon > 0$, что кольца

$$\{(s,x): s = t \bmod 1,\ X(t,u_j, f) - \varepsilon < x < X(t,u_j, f) + \varepsilon\},\ j \in \{1,...,N\},$$

содержатся в Φ и попарно не пересекаются. Так как при каждом $j \in \{1,...,N\}$ производные $\partial^{k_j} d(u_i, f)/\partial u^{k_j} \ne 0$, то число ε и окрестность $U(f)$ уравнения f можно взять такими, что для любого $g \in U(f)$ уравнение $\partial^{k_i - 1} d(u,g)/\partial u^{k_i - 1} = 0$ имеет на интервале $(u_i - \varepsilon, u_i + \varepsilon)$ единственное решение $u = \hat{u}_i(g)$, причем $\hat{u}_i(\cdot) \in C^{r-k_i+1}$, $\hat{u}_i(f) = u_i$.

Определим отображение $F: U(f) \to \mathbf{R}^k \equiv \mathbf{R}^{k_1 - 1} \times \cdots \times \mathbf{R}^{k_n - 1}$, положив $F = (F_1,...,F_n)$, где $F_i = (F_{i0},...,F_{ik_i - 2})$, а $F_{ip}: U(f) \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,...,n\}$, $p \in \{0,...,k_i - 2\}$, задается равенством $F_{ip}(g) := \partial^p d(\hat{u}_i(g), g)/\partial u^p$. Проверим, что производная $F'(f): \mathrm{E}^r \to \mathbf{R}^k$ сюрьективна. Пусть $h_{jq} \in \mathrm{E}^r$ – уравнения с правыми частями

$$h_{jq}(t,x) := (x - X(t,u_j, f))^q \alpha(x - X(t,u_j, f)),\ j \in \{1,...,n\},\ q \in \{0,...,k_j - 2\},$$

где $\alpha: \mathbf{R} \to [0,1]$ – C^∞-функция, удовлетворяющая (4). Пусть $\hat{d}(u,\mu) := d(u, f + \mu h_{jq})$. Тогда

$$F'_{ip}(f)h_{jq} = \frac{d}{d\mu} F_{ip}(f + \mu h_{jq})\Big|_{\mu=0} = \frac{\partial^{p+1}}{\partial u^{p+1}} d(u_i, f) \frac{d}{d\mu} \hat{u}(f + \mu h_{jq})\Big|_{\mu=0} + \frac{d}{d\mu} \frac{\partial^p}{\partial u^p} \hat{d}(u_i, \mu)\Big|_{\mu=0}.$$

Так как $\partial^{p+1} d(u_i, f)/\partial u^{p+1} = 0$, то отсюда следует, что

$$F'_{ip}(f)h_{jq} = \frac{d}{d\mu} \frac{\partial^p}{\partial u^p} d(u_i, f + \mu h_{jq})\Big|_{\mu=0}. \tag{10}$$

При $i \ne j$ $d(u_i, f + \mu h_{jq})$ не зависит от μ, и потому из (10) получаем $F'_{ip}(f)h_{jq} = 0$.

Аналогично случаю 1) в доказательстве леммы имеем для $p < q$ $\partial^p d(u_i, f + \mu h_{iq})/\partial u^p =$ $= \partial^p d(u_i, f)/\partial u^p = 0$ и потому $F'_{ip}(f)h_{iq} = 0$, а для $p = q$

$$\partial^p d(u_i, f + \mu h_{ip})/\partial u^p = \mu p! \int_0^1 \exp[(p-1)\int_0^t f'_x(\tau, X(\tau, u_i, f))\,d\tau]dt,$$

и потому $F'_{ip}(f)h_{ip} > 0$.

Рассмотрим систему k линейных уравнений с k неизвестными λ_{jq}:

$$\sum_{\substack{j=1,...,n \\ q=0,...,k_j-2}} \lambda_{jq} F'_{ip}(f)h_{jq} = c_{ip}.$$

Матрица коэффициентов этой системы блочно-диагональна с блоками на диагонали, являющимися треугольными матрицами, на диагонали которых стоят положительные числа $F'_{ip}(f)h_{ip}$. Ее определитель $\ne 0$. Поэтому система имеет решение при любых правых частях c_{ip}. Но тогда для любого набора чисел c_{ip}, $i \in \{1,...,n\}$, $p \in \{0,...,k_i - 2\}$ $F'_{ip}(f)(\sum_{\substack{j=1,...,n \\ q=0,...,k_j-2}} \lambda_{jq} h_{jq}) = c_{ip}$, и потому отображение $F'(f)$ сюрьективно.

То, что $F^{-1}(0) = \Sigma_k^r \cap U(f)$, если окрестность $U(f)$ выбрана достаточно малой, следует из доказательства включения $\hat{\Sigma}_n^r \subset \Sigma_n^r$ в п. 2. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Андронов, А.А. К теории изменения качественной структуры разбиения плоскости на траектории / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 21, № 9. – С. 427–430.

2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.

3. Peixoto, M. Structural Stability on Two-Dimensional Manifolds / M. Peixoto // Topology. – 1962. – Vol. 1, no. 2. – P. 101–120.

4. Арансон, С.Х. Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону полутраекторий и траекторий, двоякоасимптотических к двойному предельному циклу у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях / С.Х. Арансон // Мат. Сборник. – 1968. – Т. 76(118), № 2. – С. 214–230.

5. Sotomayor, J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds / J. Sotomayor // Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. – 1974. – Vol. 43. – P. 5–46.

6. Арансон, С.Х. О неплотности полей конечной степени негрубости в пространстве негрубых векторных полей на замкнутых двумерных многообразиях / С.Х. Арансон // УМН. – 1988. – Т. 43, вып. 1. – С. 191–192.

7. Robinson, C. Structural stability of vector fields / C. Robinson // Annals of Mathematics. Second Series. – 1974. – Vol. 99, no. 1. – P. 154–175.

8. Hayashi, S. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1-Stability and Ω-Stability Conjectures for Flows / S. Hayashi // Annals of Mathematics. Second Series. – 1997. – Vol. 145, no. 1. – P. 81–137.

9. Abraham, R. Non-genericity of Ω-stability / R. Abraham, S. Smale // Global Analysis. Proc. of Symposia in Pure Mathematics. 14. – Publ. Am. Math. Soc, 1970. – P. 5–8.

10. Шварц, Л. Анализ. Т. 2 / Л. Шварц. – М.: Мир, 1972. – 528 с.

11. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

12. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

Поступила в редакцию 29 марта 2022 г.

Сведения об авторе

Ройтенберг Владимир Шлеймович – доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998, e-mail: vroitenberg@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2022, vol. 14, no. 3, pp. 52–59

DOI: 10.14529/mmph220306

CLASSIFICATION OF PERIODIC DIFFERENTIAL EQUATIONS BY DEGREES OF NON-ROUGHNISS

V.Sh. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Abstract. A differential equation of the form $x' = f(t, x)$ with the right part $f(t, x)$ having continuous derivatives up to r-th order inclusive, 1-periodic in t, we identify with the function f and consider as an element of the Banach space E^r of such functions with the C^r-norm. The equation f defines a dynamical system on a cylindrical phase space. An equation f is called rough if any equation close enough to it is topologically equivalent to f, that is, it has the same topological structure of the phase portrait. An equation *f* has the *k*-th degree of non-roughness if any non-rough equation sufficiently close to it either has a degree of non-roughness less than *k*, or is topologically equivalent to *f*. The paper describes the set of equations of the *k*-th degree of non-roughness ($k < r$), shows that it form an embedded submanifold of codimension *k* in E^r, are open and everywhere dense in the set of all non-rough equations that do not have a degree of non-roughness less than *k*.

Keywords: periodic differential equation; cylindrical phase space; structural stability; degree of structural instability; bifurcation manifold.

References

1. Andronov A.A., Leontovich E.A. K teorii izmeneniya kachestvennoy struktury razbieniya ploskosti na traektorii (On the Theory of Changing the Qualitative Structure of the Division of a Plane into Trajectories). *Doklady AN SSSR*, 1938, Vol. 21, no. 9, pp. 427–430. (in Russ.).

2. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973, 482 p.

3. Peixoto M. Structural Stability on Two-Dimensional Manifolds. *Topology*, 1962, Vol. 1, no. 2, pp. 101–120.

4. Aranson S.H. The Absence of Nonclosed Poison-Stable Semitrajectories and Trajectories Doubly Asymptotic to a Double Limit Cycle for Dynamical Systems of the First Degree of Structural Instability on Orientable Two-Dimensional Manifolds. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1968, Vol. 5, no. 2, pp. 205–219. DOI: 10.1070/SM1968v005n02ABEH002593

5. Sotomayor J. Generic One-Parameter Families of Vector Fields on Two-Dimensional Manifolds. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1974. Vol. 43, pp. 5–46. DOI: 10.1007/BF02684365

6. Aranson, S. Kh. On the Non-Denseness of Fields of Finite Degree of Non-Robustness in the Space of Non-Robust Vector Fields on Closed Two-Dimensional Manifolds. *Russian Mathematical Surveys*, 1988, Vol. 43, no. 1, pp. 231–232. DOI: 10.1070/RM1988v043n01ABEH001537

7. Robinson C. Structural Stability of Vector Fields. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1974, Vol. 99, no. 1, pp. 154–175. DOI: 10.2307/1971016

8. Hayashi S. Connecting Invariant Manifolds and the Solution of C^1 Stability and Ω-Stability Conjectures for Flows. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1997, Vol. 145, no. 1, pp. 81–137. DOI: 10.2307/2951824

9. Abraham R., Smale S. Non-genericity of Ω-stability. Global Analysis. *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 14, Publ. Am. Math. Soc., 1970, pp. 5–8.

10. Schwartz L. *Analyse Mathematique*. II, Paris: Hermann, 1967.

11. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Halsted Press (A division of John Wiley & Sons) and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973, 524 p.

12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis). Moscow: Nauka Publ., 1968. (in Russ.).

Received March 29, 2022

Information about the author

Roitenberg Vladimir Shleymovich, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998, e-mail: vroitenberg@mail.ru.