Математика

УДК 517.956.226 DOI: 10.14529/mmph220401

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ КОРНЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Е.А. Деркунова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: derkunovaea@susu.ru

Аннотация. Рассмотрено классическое конечное уравнение, содержащее параметр. При некотором условии на левую часть этого уравнения, после замены переменной она сводится к такому виду, что нетрудно провести классификацию случаев соотношений между составляющими ее частями. Каждый случай влечет за собой определенную ситуацию с существованием решения исследуемого уравнения, и показано, что оно может иметь, по сути, один и тот же стандартный вид. Для последнего приведен фундаментальный результат построения асимптотического разложения. Далее проводится доказательство формулы для вида коэффициентов искомого разложения, использующее индуктивный прием. Другой подход к поиску решения указанного уравнения связан с возможностью получения асимптотической формулы, с виду напоминающей бесконечную цепную дробь. Сначала естественным образом строятся рекуррентно приближения как последовательно уточняющиеся неравенства для решения, затем строго доказывается сходимость этих приближений. Поточечная сходимость отдельно четных и нечетных приближений вызвана их монотонностью и ограниченностью, а дополнительное условие непрерывной дифференцируемости входящих данных уравнения гарантирует и равномерную сходимость приближений к решению. В заключении приведен простой пример такой цепной дроби.

Ключевые слова: трансцендентное уравнение; формула обращения Лагранжа; асимптотическое разложение; асимптотическая формула; малый и большой параметры; признак Вейерштрасса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим конечное уравнение (ε – малый параметр) [1]:

$$\frac{x}{f(x)}=\varepsilon . \qquad (1)$$

Не ограничивая общности, будем считать параметр $\varepsilon>0$, переменную x и функцию $f(x)$ вещественными, причем $f(x)$ достаточное число раз дифференцируемой. Подчиним функцию следующему условию.

Условие 1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq 0$. Уравнение (1) – частный вид следующего уравнения:

$$F(x)=\varepsilon . \qquad (2)$$

Решаем это уравнение графически. Очевидно, при условии, что $F(x)>m$ для всех x из области определения, где величина постоянной m не зависит от малого ε, решений уравнения (2) нет. В противном случае, если параметр ε малый, то решения (2) – корни этого конечного уравнения – зависят от параметра: $x=x_i(\varepsilon)$. Тогда точки с координатами $(x_i(\varepsilon);\varepsilon)$ будут находиться на плоскости xOy вблизи точек с координатами $(x_i;0)$, где

$$F(x_i)=0 \qquad (3)$$

– уравнение, вырожденное к уравнению (2). Вблизи каждого из коней (3) можно проделать замену переменной $x=x_i+t(\varepsilon)$, сводящую (2) к виду:

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\varepsilon . \qquad (4)$$

При этом имеют место следующие ситуации соотношений числителя и знаменателя дроби из левой части уравнения (4):

		1	2	3
		$\lim\limits_{t\to 0}\psi(t)=0$	$\lim\limits_{t\to 0}\psi(t)=A\begin{smallmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{smallmatrix}$	$\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\infty$
1	$\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=0$	случай (1,1)	случай (1,2)	случай (1,3)
2	$\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)=A\begin{smallmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{smallmatrix}$	решения нет	решения нет	случай (2,3)
3	$\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$	решения нет	решения нет	случай (3,3)

Рассмотрим ситуации (1,1) и (3,3). В том и другом случаях выводы о наличии решения различаются в зависимости от того, каково поведение числителя по отношению к знаменателю. Возможно, что 1) $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – бесконечно малые (или бесконечно большие) одного порядка при $t\to 0$; 2) $\psi(t)=o(\varphi(t))$ при $t\to 0$ и 3) $\varphi(t)=o(\psi(t))$ при $t\to 0$. Корней уравнение (4) не имеет, если реализуется подслучай 1) или 2).

Пусть имеется (1,1) при наличии подслучая 3), тогда числитель $\varphi(t)$ можно представить как $\varphi(t)=\psi(t)\chi(t)$, где функция $\chi(t)=O(\psi(t))$ при $t\to 0$. Но тогда $\chi(t)$ – бесконечно малая при $t\to 0$, и уравнение $\chi(t)=\varepsilon$ будет иметь решение. Ясно, что бесконечно малую при $t\to 0$ функцию $\chi(t)$ после замены переменной всегда можно представить в виде $\dfrac{x}{f(x)}$, где $x\to 0$ и функция $f(x)$ подчиняется Условию 1. А значит уравнение (4) свелось к уравнению вида (1).

Пусть имеем (3,3) и одновременно подслучай 3). При этом уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\frac{1/\psi(t)}{1/\varphi(t)}=\varepsilon, \tag{5}$$

а условие 3) для бесконечно больших $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ означает также, что для соответствующих бесконечно малых при $t\to 0$ функций $1/\varphi(t)$ и $1/\psi(t)$, имеет место соотношение порядка: $1/\psi(t)=o(1/\varphi(t))$ при $t\to 0$. Аналогично тому, как это сделано выше для случая (1,1), 3), уравнение (5) сведется к уравнению (1).

Рассмотрим случай (1,2). Тогда эффективной будет замена переменной $x=\varphi(t)$, причем окажется, что $f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))$ и уравнение (4) приобретет вид (1), а выполнение Условия 1 будет гарантировано.

Рассмотрим ситуацию с (2,3). Достаточно переписать уравнение (4) в виде (5), тогда для функций $1/\varphi(t)$ и $1/\psi(t)$ реализуется случай (1,2). Сделаем замену переменной $x=1/\psi(t)$, при этом $f(x)=1/\varphi[\psi^{-1}(1/x)]$, а Условие 1 автоматически выполняется.

Рассмотрим, наконец, (1,3). Представим уравнение (4) в виде: $\chi(t)=\varepsilon$, где для бесконечно малой при $t\to 0$ функции $\chi(t)$ имеем выражение: $\chi(t)=\varphi(t)\cdot[1/\psi(t)]$. Ясно, что как уже отмечалось, можно произвести соответствующую замену переменной, сводящую уравнение (4) к виду (1).

Тем самым классификация типов уравнений (4), сводящихся к уравнению вида (1), завершена.

2. Построение асимптотического разложения. Следуя классическим результатам из [1, 2], будем искать корень уравнения (1) в виде ряда по степеням ε, а именно

$$x(\varepsilon)=c_1\varepsilon+c_2\varepsilon^2+\ldots+c_k\varepsilon^k+\ldots, \tag{6}$$

где коэффициенты разложения подлежат определению.

Здесь необходимо отметить, что источники [1, 2] дают готовую формулу для коэффициентов этого разложения, а [1] ссылается на [3], в котором приводится соответствующее утверждение. Это теорема Лагранжа (1770 г.), вывод которой о существовании корня (1) и его разложении дается следующей формулировкой:

Пусть $g(z)$ и $f(z)$ – функции от z, аналитические на контуре C, окружающем точку a, и внутри него, и пусть ε таково, что для всех точек z внутри контура C выполняется неравенство:

$$|\varepsilon f(z)|<|z-a|;$$

тогда уравнение

$$\zeta=a+\varepsilon f(\zeta),$$

рассматриваемое как уравнение относительно ζ, имеет один корень внутри контура C; далее, любая функция от ζ, аналитическая на и внутри C, может быть разложена в степенной ряд по ε по формуле

$$g(\zeta)=g(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{g'(z)\left(f(z)\right)^k\right\}|_{z=a}.$$

Применительно к ряду (6) – решению уравнения (1) - получается соотношение:

$$c_k=\frac{1}{k!}\left\{\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(f(x)\right)^k\right\}|_{x=0}. \qquad (7)$$

Покажем, что формулу (7) можно доказать непосредственно для вещественного аргумента, исходя из вида ряда (6) и решаемого уравнения.

Во-первых, заметим, что $c_k=\frac{1}{k!}x_\varepsilon^{(k)}|_{\varepsilon=0}$, поэтому для нахождения k-ого коэффициента потребуется определить последовательно производные вплоть до k-ого порядка по аргументу ε от неявной функции $x(\varepsilon)$, задаваемой уравнением (1). Во-вторых, запишем его так:

$$x=\varepsilon f(x).$$

Продифференцируем его по ε, считая $x=x(\varepsilon)$, имеем: $x'_\varepsilon=f(x)+\varepsilon f'(x)x'_\varepsilon$, откуда

$$x'_\varepsilon=\frac{f(x)}{1-\varepsilon f'(x)}, \qquad (8)$$

поскольку $x(0)=0$, полагая $\varepsilon=0$, получаем: $c_1=f(0)$, что согласуется с формулой (7) при $k=1$.

Найдем выражение для второй производной:

$x''_{\varepsilon\varepsilon}=\frac{f'(x)x'_\varepsilon}{1-\varepsilon f'(x)}-\frac{f(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^2}\left[-f'(x)-\varepsilon f''(x)x'_\varepsilon\right]$, или с учетом формулы (8):

$$x''_{\varepsilon\varepsilon}=\frac{2f(x)f'(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^2}+\varepsilon\frac{\left(f(x)\right)^2f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}, \qquad (9)$$

и так как $2f(x)f'(x)=\frac{d}{dx}\left(f(x)^2\right)$, то полагая в (9) $\varepsilon=0$, имеем формулу (7) при $k=2$: $c_2=\frac{1}{2!}\frac{d}{dx}\left(f(x)^2\right)|_{x=0}=f(0)f'(0)$.

Третью производную получим в виде:

$$x'''_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}=\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)^2\right)f(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}-2\frac{\frac{d}{dx}\left(f(x)^2\right)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}\left[-f'(x)-\varepsilon f''(x)x'_\varepsilon\right]+\frac{\left(f(x)\right)^2f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}+\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{\left(f(x)\right)^2f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}\right],$$

что приводит нас к следующему соотношению:

$$x'''_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}=\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)^3\right)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}+2\varepsilon\frac{\frac{d}{dx}\left(f(x)^2\right)f(x)f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}+\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{f(x)^2f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}\right],\qquad(10)$$

где была использована формула Лейбница:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)^2\right)f(x)+2\frac{d}{dx}\left(f(x)^2\right)f'(x)+f(x)^2f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)^3\right).$$

Как видно из (10), при $k=3$ приходим к формуле (7), и

$$c_3=\frac{1}{3!}\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)^3\right)|_{x=0}=f(0)f'(0)^2+\frac{1}{2}f(0)^2f''(0).$$

Вычисляя четвертую производную, имеем:

$$x_\varepsilon^{IV}=\frac{\frac{d^3}{dx^3}\left(f(x)^3\right)f(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}+3\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)^3\right)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}\left[f'(x)+\varepsilon f''(x)x'_\varepsilon\right]+2\frac{\frac{d}{dx}\left(f(x)^2\right)f(x)f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}+$$

$$+2\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\frac{\frac{d}{dx}\left(f(x)^2\right)f(x)f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}\right\}+\frac{2f(x)^2f'(x)f''(x)+f(x)^3f'''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}+3\frac{f(x)^2f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}\left[f'(x)+\varepsilon f''(x)x'_\varepsilon\right]+$$

$$+\varepsilon\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\left[\frac{f(x)^2f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}\right].$$

Теперь соберем слагаемые, не содержащие ε. Учитывая то обстоятельство, что

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(f(x)^3\right)f(x)+3\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)^3\right)f'(x)+\left[(4+2+3)f(x)^2f'(x)f''(x)\right]+f(x)^3f'''(x)=\frac{d^3}{dx^3}\left(f(x)^4\right),$$

где учтено, что выражение в квадратных скобках равно $3\frac{d}{dx}\left(f(x)^3\right)f''(x)$, и применена формула Лейбница, окончательно для четвертой производной получим:

$$x_\varepsilon^{IV}=\frac{\frac{d^3}{dx^3}\left(f(x)^4\right)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}+3\varepsilon\frac{\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)^3\right)f(x)f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^5}+2\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}\left\{\frac{\frac{d}{dx}\left(f(x)^2\right)f(x)f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^4}\right\}+$$

$$+3\varepsilon\frac{f(x)^3f''(x)^2}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^5}+\varepsilon\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\left[\frac{f(x)^2f''(x)}{\left(1-\varepsilon f'(x)\right)^3}\right].\qquad(11)$$

Из представления (11), полагая $\varepsilon=0$, придем к (7) для $k=4$. Из-за громоздкости формулы для коэффициента c_4 мы его не выписываем.

В принципе, чтобы убедиться в справедливости формулы (7), поиски коэффициентов разложения ряда (6) можно было бы продолжить, но, как это видно уже на четвертом шаге, сложность формул стремительно растет, и, в общем, неясно, будут ли они обладать какой-то закономерностью в отношении возможности провести доказательство формулы (7) по индукции.

3. Получение асимптотической формулы. Здесь мы приведем другой подход к решению уравнения, подобного уравнению (1), прежде всего проделав замену переменной и введя вместо малого параметра ε большой параметр $\lambda>0$. Будем решать уравнение

$$xf(x)=\lambda,\qquad(12)$$

где функция $f(x)$ теперь должна удовлетворять следующему условию.

Условие 2. $f(x) > 0$ – возрастающая, дифференцируемая при $x > 0$ функция.

Решаем уравнение (12) графически, получаем единственный корень $x = x(\lambda)$, причем $\lim\limits_{\lambda\to\infty} x(\lambda) = \infty$. Наша задача получить для него представление. Для этого заметим, что найдется такое значение λ_0, что $\lambda_0 < x$, но тогда в силу монотонности функции $f(x)$ будет иметь место неравенство: $f(\lambda_0) < f(x)$, а значит, $\lambda_0 < x = \dfrac{\lambda}{f(x)} < \dfrac{\lambda}{f(\lambda_0)}$. Получили нулевое и первое приближение для корня:

$$x_0 = \lambda_0 < x(\lambda) < \frac{\lambda}{f(\lambda_0)} = x_1 .$$

Поскольку $f(x) < f\left(\dfrac{\lambda}{f(\lambda_0)}\right)$, то $\dfrac{\lambda}{f\left(\lambda/ f(\lambda_0)\right)} < x < \dfrac{\lambda}{f(\lambda_0)}$. То есть возникло второе приближение для корня:

$$x_2 = \frac{\lambda}{f\left(\lambda/ f(\lambda_0)\right)} < x < \frac{\lambda}{f(\lambda_0)} = x_1 .$$

В силу неравенства $f\left(\lambda / f\left(\lambda / f(\lambda_0)\right)\right) < f(x)$, приходим к третьему приближению для корня:

$$x_2 = \frac{\lambda}{f\left(\lambda / f(\lambda_0)\right)} < x < \frac{\lambda}{f\left(\lambda / f\left(\lambda / f(\lambda_0)\right)\right)} = x_3 .$$

Этот процесс можно продолжить. При этом получаем последовательность приближений с четными индексами, являющимися оценками корня уравнения (12) снизу, и аналогичную последовательность с нечетными номерами в качестве оценки указанного корня сверху.

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Корень трансцендентного уравнения (12) при Условии 2 определяется асимптотической формулой:*

$$x(\lambda) = \frac{\lambda}{f\left(\lambda / f\left(\lambda / f(\lambda /... / f(\lambda / f(\lambda_0)))\right)\right)}, \tag{13}$$

справедливой при $\lambda \to \infty$.

Замечание. Чем больше значение параметра λ, и, вместе с тем, чем больше приближений берется, тем точнее формула (13).

Доказательство. Заметим, во-первых, что приближения снизу для (13), как видно из их построения, могут быть получены по рекуррентной формуле: $x_{2n+2} = \dfrac{\lambda}{f\left(\lambda/ f(x_{2n})\right)}$, где $n = 0,1,2,...$, а $x_0 = \lambda_0$ выбирается достаточно большой постоянной. Аналогичная формула: $x_{2n+1} = \dfrac{\lambda}{f\left(\lambda/ f(x_{2n-1})\right)}$, где $n = 1,2,...$, а $x_1 = \lambda / f(\lambda_0)$, справедлива и для приближений сверху.

Проследим тенденцию изменения каждого четного приближения по отношению к изменению предыдущего ему четного приближения. Для этого вычислим соответствующую производную и определим ее знак: $\dfrac{dx_{2n+2}}{dx_{2n}} = -\dfrac{\lambda f'\left(\lambda/ f(x_{2n})\right)}{f^2\left(\lambda/ f(x_{2n})\right)} \cdot \left(-\dfrac{\lambda f'(x_{2n})}{f^2(x_{2n})}\right) > 0$, поскольку в силу Условия 2 $f'(x) > 0$. Поэтому в процессе перехода от нулевого приближения к большему второму будут возрастать все последующие четные приближения, образуя функциональную последовательность $\{x_{2n}(\lambda)\}$. Эта последовательность ограничена сверху заведомо существующим корнем уравнения (12). Поэтому поточечная сходимость при каждом достаточно большом $\lambda > \lambda_0$ гарантирована теоремой Вейерштрасса для числовых последовательностей.

Теперь убедимся в сходимости нечетных приближений. Вычисляя соответствующую производную, имеем: $\frac{dx_{2n+1}}{dx_{2n-1}} > 0$, то есть x_{2n-1} и x_{2n+1} увеличиваются и уменьшаются одновременно. Теперь заметим, что соотношение, связывающее четное приближение с последующим нечетным, будет иметь вид: $x_{2n+1} = \frac{\lambda}{f(x_{2n})}$, и, значит, производная $\frac{dx_{2n+1}}{dx_{2n}} = -\frac{\lambda f'(x_{2n})}{f^2(x_{2n})} < 0$. Но мы условились считать $dx_{2n} > 0$, тогда $dx_{2n+1} < 0$. Поэтому, переходя от нулевого приближения к большему второму, имеем тенденцию убывания функциональной последовательности $\{x_{2n+1}(\lambda)\}$ нечетных приближений. Эта последовательность ограничена снизу. По теореме Вейерштрасса такая последовательность сходится для любых достаточно больших $\lambda > \lambda_0$. Поскольку формула (13) может быть переписана в виде:

$$x(\lambda) = \frac{\lambda}{f\left(x(\lambda)\right)},$$

то в ней усматриваем решение уравнения (12).

Теперь установим условие равномерной сходимости приближений к корню уравнения (12).

Условие 3. $f(x)$ непрерывно дифференцируемая при $x > 0$ функция.

После дифференцирования $x(\lambda)$ из (12) по λ как неявную функцию получим:

$$x'_\lambda = \frac{f(x)}{f^2(x) + \lambda f'_x(x)}.$$

Если эта функция при достаточно больших $\lambda > \lambda_0$, $x(\lambda) > \lambda_0$ непрерывна, то сходимость приближений будет равномерной. Существуют примеры уравнений (12), когда это именно так. Теорема доказана.

4. Пример асимптотической формулы. В качестве примера уравнения (12) приведем следующее соотношение:

$$x(x-1) = \lambda, \quad \lambda \to \infty. \tag{14}$$

Ясно, что в этом случае в роли функции $f(x)$ выступает двучлен $(x-1)$, и ее возрастание обеспечено. Пусть выбрано нулевое приближение λ_0. Тогда корень квадратного уравнения (14) будет представлять собой бесконечную цепную дробь вида:

$$x(\lambda) = \cfrac{\lambda}{-1 + \cfrac{\lambda}{-1 + \cfrac{\lambda}{-1 + \cfrac{\lambda}{-1 + \ldots}}}}.$$

Литература

1. де Брёйн, Н.Г.. Асимптотические методы в анализе / Н.Г. де Брёйн. – М.: изд-во иностранной литературы, 1961. – 247 с.

2. Федорюк, М.В. Асимптотика, интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1987. – 544 с.

3. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа / Э.Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – Ч. I. – 343 с.

Поступила в редакцию 1 июля 2022 г.

Сведения об авторе

Деркунова Елена Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математическое и компьютерное моделирование», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: derkunovaea@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 4, pp. 5–11

DOI: 10.14529/mmph220401

ASYMPTOTIC DECOMPOSITION AND ASYMPTOTIC FORMULA FOR THE ROOT OF THE TRANSCENDENTAL EQUATION WITH A PARAMETER

E.A. Derkunova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: derkunovaea@susu.ru

Abstract. We consider the classic finite equation containing a parameter. Under a certain condition on the left side of this equation after replacing the variable it is reduced to the kind that it is not difficult to classify the interrelations between its constituent parts. Every case entails a certain situation with the existence of the solution of the equation under study, and it is shown that it can have, in essence, the same standard form. For the latter one fundamental result of the construction of the asymptotic decomposition is given. Next, the proof of formula for coefficients of the desired decomposition is presented using inductive technique. Another approach to finding a solution of the specified equation is associated with the possibility of obtaining an asymptotic formula in appearance resembling an infinite continued fraction. At first, approximations are naturally constructed recursively as consistently refined inequalities for the solution, and then, the convergence of these approximations is strictly proved. The pointwise convergence of separately even and odd approximations is related to their monotony and limitations, and the additional condition of continuous differentiability of the equation's incoming data also guarantees uniform convergence of approximations to the solution. In conclusion, a simple example of such continued fraction is given.

Keywords: transcendental equation; Lagrange inversion formula; asymptotic decomposition; asymptotic formula; small and large parameters; Weierstrass criterion.

References

1. de Brijn N.G. *Asymptotic methods in analysis*. Amsterdam, North-Holland publ., 1961, 200 p.

2. Fedoryuk M.V. *Asimptotika, integraly i ryady* (Asymptotics, integrals and series). Moscow, Nauka Publ., 1987, 544 p. (in Russ.).

3. Whittaker E.T., Watson G.N. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge, Univ. press, 1915, 560 p.

Received July 1, 2022

Information about the author

Derkunova Elena Anatol'evna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: derkunovaea@susu.ru