УДК 517.54 DOI: 10.14529/mmph220402

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕРНАЦКОГО

Ф.Ф. Майер, М.Г. Тастанов, А.А. Утемисова
Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан
E-mail: maiyer@mail.ru

Аннотация. Исследование отображений классов регулярных функций с помощью различных операторов к настоящему времени стало самостоятельным направлением в геометрической теории функций комплексного переменного. В этом плане известную связь $f(z)\in S^o \Leftrightarrow g(z) = zf'(z) \in S^*$ классов S^o и S^* выпуклых и звездообразных функций можно рассматривать как отображение с помощью дифференциального оператора $G[f](x) = zf'(z)$ класса S^o на класс S^*, то есть $G: S^o \to S^*$ или $G(S^o) = S^*$.

Толчком к изучению данного круга вопросов стало предположение М. Бернацкого о том, что обратный оператор $G^{-1}[f](x)$, переводящий $S^* \to S^o$ и тем самым «улучшающий» свойства функций, отображает весь класс S однолистных функций в себя.

К настоящему времени вышел целый ряд статей, в которых исследуются различные интегральные операторы, в частности, определены множества значений входящих в эти операторы показателей, при которых операторы осуществляют отображение класса S или его подклассов в себя или в другие подклассы. В настоящей работе найдены значения входящего в обобщенный интегральный оператор Бернацкого параметра, при котором данный оператор преобразует подкласс звездообразных функций, выделяемых условием $a < \operatorname{Re} zf'(z)/f(z) < b$ $(0 < a < 1 < b)$, в класс $K(\gamma)$ функций, почти выпуклой порядка γ. Результаты статьи обобщают или усиливают ранее известные результаты.

Ключевые слова: геометрическая теория функций комплексного переменного; однолистные функции; интегральный оператор Бернацкого; выпуклые; звездообразные и почти выпуклые функции.

Введение

Пусть S^o и S^* – соответственно классы выпуклых и звездообразных функций $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$, регулярных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$.

Связь между выпуклыми и звездообразными функциями описывается известной схемой (например, [1]): $f(z) \in S^o \Leftrightarrow g(z) = zf'(z) \in S^*$, которую можно записать и в несколько иной форме:

$$f(z) = \int_0^z \frac{g(t)}{t} dt \in S^o \Leftrightarrow g(z) \in S^*.$$

М. Бернацкий [2] предположил, что оператор $f(z) = \int_0^z \frac{g(t)}{t} dt$ сохраняет весь класс однолистных функций, что впоследствии было опровергнуто в [3].

Это послужило началом целого направления в геометрической теории функций, связанного с исследованием свойств образов подклассов однолистных функций при отображении различными операторами (например, [4–9]):

$$\Phi_1(z) = \int_0^z \left(f'(t)\right)^\alpha dt, \Phi_2(z) = \int_0^z \left(g'(t)\right)^\alpha \left(\frac{f(t)}{t}\right)^\beta dt, \Phi_3(z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt$$

и другими. Основные задачи в этом направлении описаны, например, в [1, §14; 6].

В настоящей работе исследуются свойства интегрального оператора Бернацкого

$$\Phi(z)=\int_0^z\left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha}dt, \alpha\in R. \tag{1}$$

в предположении, что $f(z)\in S^*(a,b)$, где $S^*(a,b)$ – подкласс регулярных в круге E функций $f(z)=z+a_2z^2+...+a_nz^n+..., z\in E$, удовлетворяющих условию

$$a<\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}<b, 0<a<1<b, z\in E. \tag{2}$$

Ниже будет установлена величина $\gamma=\gamma(\alpha,a,b)$ такая, что если $f(z)\in S^*(a,b)$, то интеграл Бернацкого $\Phi(z)\in K(\gamma)$, где $K(\gamma)$ – класс функций, почти выпуклой порядка γ [10–11].

1. Основной результат

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема 1. *Если $f(z)\in S^*(a,b)$, то функция $\Phi(z)$ из* (1) *является почти выпуклой порядка γ, где*

$$\gamma=\begin{cases}\dfrac{-2(1-a)(1-\alpha+\alpha b)}{b-a}, & \alpha<\dfrac{1}{1-b}\\ 0, & \dfrac{1}{1-b}\le\alpha\le\dfrac{1}{1-a}\\ \dfrac{2(1-b)(1-\alpha+\alpha a)}{b-a}, & \alpha>\dfrac{1}{1-a}\end{cases} \tag{3}$$

Следуя схеме Каплана и опираясь на результаты [10–11], нетрудно получить следующее утверждение, ставшее уже классическим.

Утверждение 1 [1]**.** *Пусть функция $f(z)$ регулярна в E, $f'(z)\neq 0$ в круге E и для любых θ_1 и θ_2, $0<\theta_2-\theta_1<2\pi,$ и всех $z=re^{i\theta}, 0<r<1$ выполняется условие*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left\{1+\operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}d\theta>-\gamma\pi\ . \tag{4}$$

Тогда функция $f(z)$ является однолистной и почти выпуклой порядка γ в круге E.

Будем говорить [12], что функция $S(z)$ подчинена однолистной функции $S_0(z)$ в круге E и писать $S(z)\prec S_0(z)$, если $S(E)\subset S_0(E)$ и $S(0)=S_0(0)$.

Утверждение 2. *Если*

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\prec\varphi_0(z)$$

и при некотором $\gamma\in[0;1]$ выполняется условие

$$\int_0^{2\pi}\left|1-\alpha+\alpha\operatorname{Re}\varphi_0\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta\le(1+\gamma)2\pi, 0<r<1, \tag{5}$$

то функция $\Phi(z)\in K(\gamma)$, т.е. является почти выпуклой порядка γ.

Доказательство утверждения 2. Из (1), получаем, что

$$1+z\frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)}=(1-\alpha)+\alpha z\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{6}$$

Поскольку

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \varphi_0(z) \Rightarrow 1-\alpha+\alpha z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \Phi_0(z),$$

где $\Phi_0(z)=1-\alpha+\alpha\varphi_0(z)$, то в силу метода подчиненности [2, с. 31] с учетом (6) имеет место неравенство:

$$\int_0^{2\pi}\left|1+\operatorname{Re} z\frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)}\right|d\theta \le \int_0^{2\pi}\left|\operatorname{Re}\Phi_0(z)\right|d\theta, z=re^{i\theta}.$$

В силу условия теоремы

$$\int_0^{2\pi}\left|\operatorname{Re}\Phi_0(z)\right|d\theta = \int_0^{2\pi}\left|1-\alpha+\alpha\operatorname{Re}\varphi_0(z)\right|d\theta \le (1+\gamma)2\pi,$$

поэтому

$$\int_0^{2\pi}\left|1+\operatorname{Re} z\frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)}\right|d\theta \le (1+\gamma)2\pi,$$

откуда в силу известных неравенств [1, с. 32], получаем:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[1+\operatorname{Re} z\frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)}\right]d\theta > -\gamma\pi, 0<\theta_2-\theta_1<2\pi, z=re^{i\theta}.$$

Поэтому в силу утверждения 1 функция $\Phi(z)$ является однолистной и почти выпуклой порядка γ в круге E. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 2 дает общий подход к нахождению порядка почти выпуклости интегрального оператора (1) при условии, что известна область значений $zf'(z)/f(z)$.

Выбирая в качестве $\varphi_0(z)$ отображение круга E на конкретные области, можно получить ряд частных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Так как $f(z)\in S^*(a,b)$, то

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \varphi_0(z) = i\frac{b-a}{\pi}\ln\frac{i+\varepsilon z}{i-\varepsilon z}+1,$$

где

$$\varepsilon = e^{i\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2-b-a}{b-a}}.$$

Здесь $\varphi_0(z)$ – есть отображение круга E на полосу $\{w: a\le \operatorname{Re} w \le b\}$ с нормировкой $\varphi_0(0)=1$. При этом отображении дуга $\{e^{i\theta}: -\delta<\theta<\delta\}$ окружности $|z|=1$ преобразуется в прямую $\{w: \operatorname{Re} w = b\}$, а дуга $\{e^{i\theta}: \delta<\theta<2\pi-\delta\}$ – в прямую $\{w: \operatorname{Re} w = a\}$. При этом

$$\delta = \frac{\pi}{2}+\arg\varepsilon = \frac{\pi(1-a)}{b-a}.$$

В силу утверждения 2 для нахождения порядка почти выпуклости интеграла Бернацкого необходимо вычислить выражение

$$I(\alpha,a,b) = \int_0^{2\pi}\left|1-\alpha+\alpha\Re\phi_0\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

с учетом того, что в силу свойств отображения $w=\varphi_0(z)$

$$1-\alpha+\alpha\operatorname{Re}\varphi_0\left(e^{i\theta}\right) = \begin{cases} 1-\alpha+\alpha a, \delta\le\theta\le 2\pi-\delta \\ 1-\alpha+\alpha b, -\delta\le\theta\le\delta. \end{cases}$$

1) Пусть $\alpha \ge 0$. Возможны два случая:

а) $1-\alpha+\alpha a \geq 0$, то есть $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{1-a}$.

В этом случае, так как $1-\alpha+\alpha a < 1-\alpha+\alpha b$, то $1-\alpha+\alpha b > 0$. Из этого следует, что

$$\left|1-\alpha+\alpha \operatorname{Re}\varphi_0\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1-\alpha+\alpha \operatorname{Re}\varphi_0\left(e^{i\theta}\right) \text{ для всех } \theta.$$

Вычислим интеграл:

$$I(\alpha,a,b) = \int_{\delta}^{2\pi-\delta}(1-\alpha+\alpha a)\,d\theta + \int_{-\delta}^{\delta}(1-\alpha+\alpha b)\,d\theta = (1-\alpha+\alpha a)\cdot 2\pi + \alpha(b-a)\cdot 2\delta.$$

Вспоминая, что $\delta = \dfrac{\pi(1-a)}{b-a}$, получаем

$$I(\alpha,a,b) = (1-\alpha+\alpha a)\cdot 2\pi + \alpha(b-a)\cdot\frac{2\pi(1-a)}{b-a} = 2\pi.$$

Следовательно, в силу условия (5) $I(\alpha,a,b) = 2\pi \leq (1+\gamma)2\pi$, или $\gamma \geq 0$.

Итак, $\gamma \geq 0$ для $0 \leq \alpha \leq \dfrac{1}{1-a}$.

б) Пусть $1-\alpha+\alpha a < 0$, то есть $\alpha > \dfrac{1}{1-a}$.

Так как $1-\alpha+\alpha b > 0$, то аналогично случаю а) получаем

$$\left|1-\alpha+\alpha \operatorname{Re}\varphi_0\left(e^{i\theta}\right)\right| = \begin{cases} -(1-\alpha+\alpha a), \delta \leq \theta \leq 2\pi-\delta, \\ 1-\alpha+\alpha b, -\delta \leq \theta \leq \delta. \end{cases}$$

Поэтому

$$I(\alpha,a,b) = -\int_{\delta}^{2\pi-\delta}(1-\alpha+\alpha a)\,d\theta + \int_{-\delta}^{\delta}(1-\alpha+\alpha b)\,d\theta =$$

$$(1-\alpha+\alpha a+1-\alpha+\alpha b)\cdot 2\delta - 2\pi(1-\alpha+\alpha a) =$$

$$= \frac{2\pi}{b-a}(2-2\alpha+2\alpha a+2\alpha b-a-2\alpha ab-b).$$

То есть

$$I(\alpha,a,b) = \frac{2\pi}{b-a}(2-2\alpha+2\alpha a+2\alpha b-a-2\alpha ab-b).$$

По условию (5) $I(\alpha,a,b) \leq (1+\gamma)2\pi$, то есть $\gamma \geq \dfrac{I(\alpha,a,b)}{2\pi} - 1$ или

$$\gamma \geq \frac{2-2\alpha+2\alpha a+2\alpha b-a-2\alpha ab-b}{b-a} - 1.$$

После преобразований окончательно получаем:

$$\gamma \geq \frac{2(1-b)(1-\alpha+\alpha a)}{b-a} \text{ при } \alpha > \frac{1}{1-a}.$$

2) Пусть теперь $\alpha < 0$, тогда также получим 2 случая:

в) $1-\alpha+\alpha b < 0$, то есть $\dfrac{1}{1-b} \leq \alpha < 0.$

Так как всегда $1-\alpha+\alpha b < 1-\alpha+\alpha a$ (в силу условия $\alpha < 1 < b$, то для всех θ

$$\left|1-\alpha+\alpha \operatorname{Re}\varphi_0\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1-\alpha+\alpha \operatorname{Re}\varphi_0\left(e^{i\theta}\right).$$

Точно так же, как в случае а), $I(\alpha,a,b) = 2\pi$, то есть

$$\gamma \geq 0 \text{ для } \frac{1}{1-b} \leq \alpha < 0.$$

г) $1-\alpha+\alpha b<0$, то есть $\alpha<\dfrac{1}{1-b}$.

В этом случае

$$\left(1-\alpha+\alpha\operatorname{Re}\varphi_0\left(e^{i\theta}\right)\right)=\begin{cases}1-\alpha+\alpha a, \delta\le\theta\le 2\pi-\delta\\ -\left(1-\alpha+\alpha b\right), -\delta\le\theta\le\delta\end{cases}$$

и интеграл

$$I\left(\alpha,a,b\right)=\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta}\left(1-\alpha+\alpha a\right)d\theta+\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left(1-\alpha+\alpha b\right)d\theta=\frac{2\pi}{b-a}\left(-2+2\alpha-2\alpha b+a-2\alpha a+2\alpha ab+b\right).$$

Аналогично случаю б), по условию (5) $I\left(\alpha,a,b\right)\le(1+\gamma)2\pi$, то есть после преобразований получаем:

$$\gamma\ge\frac{-2\left(1-a\right)\left(1-\alpha+\alpha b\right)}{b-a}\text{ при }\alpha<\frac{1}{1-b}.$$

Объединив все случаи а), б), в) и г), получили требуемый результат (3). Теорема 1 доказана.

2. Частные случаи

Рассмотрим частные случаи теоремы 1.

Пусть $b\to+\infty$ и $a=\beta$. Тогда класс функций $S^*\left(a,b\right)$ преобразуется в общепринятом обозначении в класс $S^*\left(\beta\right)$ звездообразных функций порядка β, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} z\frac{f'\left(z\right)}{f\left(z\right)}>\beta,\ 0<\beta<1,\ z\in E,$$

и из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Если* $f\left(z\right)\in S^*\left(\beta\right)$, *то интеграл Бернацкого* $\Phi\left(z\right)$ *является почти выпуклой функцией порядка* γ, *где* γ *определяется из соотношения*:

$$\gamma=\begin{cases}-2\alpha\left(1-\beta\right),\alpha<0,\\ 0, 0\le\alpha\le 1/\left(1-\beta\right),\\ 2\left[\alpha\left(1-\beta\right)-1\right],\alpha>1/\left(1-\beta\right).\end{cases}\tag{7}$$

Результат точный. Экстремальная функция имеет вид $f\left(z\right)=z/\left(1-z\right)^{2(1-\beta)}$.

Отметим, что следствие 1 совпадает с теоремой 2 из [4], доказанной другим методом. Точность результата обоснована в [4].

Пусть $\gamma=1$, тогда $K\left(1\right)=K$ – класс почти выпуклых функций. Найдем область значений параметр α, при которых оператор (1) переводит класс функций $S^*\left(a,b\right)$ в класс почти выпуклых функций.

а) Пусть $\alpha<1/\left(1-b\right)$. Тогда в силу (3) из условия $-2\left(1-a\right)\left(1-\alpha+\alpha b\right)/\left(b-a\right)\le 1$ получаем, что

$$\alpha\ge\frac{b-3a-2}{2\left(b-1\right)\left(1-a\right)}.$$

б) Если же $\alpha>1/\left(1-a\right)$, то из условия $2\left(1-\alpha+\alpha a\right)\left(1-b\right)/\left(b-a\right)\le 1$ получаем, что

$$\alpha\le\frac{3b-a-2}{2\left(1-a\right)\left(b-1\right)}.$$

Объединив результаты а) и б), получаем

Следствие 2. *Пусть*

$$\frac{3a-b-2}{2(1-a)(b-1)} \le \alpha \le \frac{3b-a-2}{2(1-a)(b-1)}. \qquad (8)$$

Тогда оператор (1) *отображает класс* $S^*(a,b)$ *в класс* K *почти выпуклых функций*.

Рассмотрим еще один граничный случай $\gamma = 0$.

Известно, что класс $K(0)$ совпадает с классом S^o выпуклых функций. Поскольку при $\alpha < \frac{1}{1-b}$ и $\alpha > \frac{1}{1-a}$ показатель почти выпуклости $\gamma > 0$ в силу условия $a < 1 < b$, то из (3) получаем, что $\gamma = 0$ только при условии, что $\frac{1}{1-b} \le \alpha \le \frac{1}{1-a}$.

Следствие 3. *Если* $\frac{1}{1-b} \le \alpha \le \frac{1}{1-a}$, *то оператор* (1) *преобразует функции* $f(z) \in S^*(a,b)$ *в выпуклые функции.*

Заметим, что следствие 3 распространяет условие выпуклости интеграла Бернацкого из [9] на более широкий класс функций $f(z)$. В случае, когда $\alpha \notin \left[\frac{1}{1-b}; \frac{1}{1-a}\right]$, точные радиусы выпуклости интеграла Бернацкого при условии, что $f(z) \in S^*(a,b)$, найдены в [14].

Пусть в (8) $a = 0$, $b \to +\infty$. Тогда $S^*(0,+\infty) = S^*$. Поэтому из следствия 2 получаем

Следствие 4 [13]. *Пусть* $f(z) \in S^*$ *и* $-1/2 \le \alpha \le 3/2$. *Тогда интеграл Бернацкого* $\Phi(z) = \int_0^z \left[f(t)/(t) \right]^\alpha dt \in K$.

Литература

1. Авхадиев, Ф.Г. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций / Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев // УМН. – 1975. – Т. 30, Вып. 4(184). – С. 3–60.
2. Biernacki, M. Sur L’Integrale des Fonctions Univalentes / M. Biernacki // Bulletin Polish Acad. Sci. Math., Astron. et Phys. – 1960. – Vol. 8, no. 1. – P. 29–34.
3. Похилевич, В.А. Об одной теореме М. Бернацкого в теории однолистных функций // Укр. матем. журн. – 1965. – Т. 17, № 4. – С. 63–71.
4. Прохоров, Д.В. Интегральные преобразования в некоторых классах однолистных функций // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 12. – С. 45–49.
5. Pascu, N.N. On a Univalence Criterion II / N.N. Pascu // Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica. 6. – 1985. – P. 153–154.
6. Прохоров, Д.В. Об областях значений систем функционалов и интегрировании однолистных функций / Д.В. Прохоров // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 10. – С. 33–39.
7. Сижук, Т.П. Порядок звездообразности оператора Бернарди в классе звездообразных функций / Т.П. Сижук // Вестник Ставропольского государственного университета. – 2009. – № 4. – С. 76–78.
8. Казанцев, А.В. Об уравнении Гахова для оператора Бернацкого / А.В. Казанцев // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, книга 2. – С. 79–92.
9. Кадиева, М.Р. Условие выпуклости обобщенного интеграла Бернацкого для одного подкласса звездообразных функций / М.Р. Кадиева, Ф.Ф. Майер // Вестник КазНПУ им.Абая. Серия: физико-математические науки. – 2020. – Т. 69, № 1. – С. 111–118.
10. Reade, M.O. The Coefficients of Close-to-Convex Functions / M.O. Reade // Duke Math. J. – Vol. 23, no. 3. – 1956. – P. 459–462.
11. Renyi, A. Some Remarks on Univalent Functions / A. Renyi // Bulgar. Akad. Nauk., Izv. Mat. Inst. 3. – 1959. – P. 111–119.
12. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
13. Merkes, E.P. On the Univalence of a Certain Integral / E.P. Merkes, D.J. Wright // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 27, no. 1. – P. 97–100.

14. Майер, Ф.Ф. Радиусы выпуклости интеграла Бернацкого для одного подкласса звездообразных функций / Ф.Ф. Майер, А.А. Утемисова, Д.М. Масакбаева // Материалы международной научно-практической конференции «Байтурсыновские чтения – 2022». – Костанай: Костанайский региональный университет, 2022. – С. 317–322.

Поступила в редакцию 18 января 2022 г.

Сведения об авторах

Майер Федор Федорович – профессор, кандидат физико-математических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, e-mail: maiyer@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Тастанов Мейрамбек Габдулиевич – профессор, кандидат физико-математических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1926-8958

Утемисова Анар Алтаевна – доцент, кандидат педагогических наук, кафедра математики и физики, Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Республика Казахстан, e-mail: anar_utemisova@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5143-0260

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 4, pp. 12–19

DOI: 10.14529/mmph220402

GEOMETRIC PROPERTIES OF THE BERNATSKY INTEGRAL OPERATOR

F.F. Mayer, M.G. Tastanov, A.A. Utemisova
Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan
e-mail: maiyer@mail.ru

Abstract. In the geometric theory of complex variable functions, the study of mapping of classes of regular functions using various operators has now become an independent trend. The connection $f(z)\in S^o \Leftrightarrow g(z) = zf'(z) \in S^*$ of the classes S^o and S^* of convex and star-shaped functions can be considered as mapping using the differential operator $G[f](x) = zf'(z)$ of class S^o to class S^*, that is, G: $S^o \to S^*$ or $G(S^o) = S^*$. The impetus for studying this range of issues was M. Bernatsky's assumption that the inverse operator $G^{-1}[f](x)$, which translates $S^* \to S^o$ and thereby "improves" the properties of functions, maps the entire class S of single-leaf functions into itself.

At present, a number of articles have been published which study the various integral operators. In particular, they establish sets of values of indicators included in these operators where operators map class S or its subclasses to themselves or to other subclasses.

This paper determines the values of the Bernatsky parameter included in the generalized integral operator, at which this operator transforms a subclass of star-shaped functions allocated by the condition $a < \mathrm{Re}\, zf'(z)/ f(z) < b$ $(0 < a < 1 < b)$, in the class $K(\gamma)$ of functions, almost convex in order γ. The results of the article summarize or reinforce previously known effects.

Keywords: geometric theory of functions of a complex variable; single-leaf functions; Bernatsky integral operator; convex; star-shaped and almost convex functions.

References

1. Avkhadiev F.G., Aksent'ev L.A. The Main Results on Sufficient Conditions for an Analytic Function to be Schlicht. *Russian Mathematical Surveys*, 1975, Vol. 30, no. 4, pp. 1–63. DOI: 10.1070/RM1975v030n04ABEH001511

2. Biernacki, M.: Sur L'Intégrale des Fonctions Univalentes. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, 1960, Vol. 8, no. 1, pp. 29–34.

3. Pokhilevich V.A. Ob odnoy teoreme M. Bernatskogo v teorii odnolistnykh funktsiy (On a Theorem of M. Bernatsky in the Theory of Single-Leaf Functions). *Ukr. matem. Zhurn.*, 1965, Vol. 17, no. 4, pp. 63–71. (in Russ.).

4. Prokhorov D.V. Integral Transformations in Some Classes of Univalent Functions. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1980, Vol. 24, no. 12, pp. 53–58.

5. Pascu N.N. On a Univalence Criterion II. Stud. Univ. *Babes-Bolyai Math.* 6, 1985, pp. 153–154.

6. Prokhorov D.V. Ranges of Values of Systems of Functionals and Integration of Univalent Functions. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1986, Vol. 30, no. 10, pp. 44–53.

7. Sizhuk T.P. Poryadok zvezdoobraznosti operatora Bernardi v klasse zvezdoobraznykh funktsiy (The Order of the Stellarity of the Bernardi Operator in the Class of Stellate Functions). *Vestnik Stavropol'skogo gosudarstvennogo universiteta*, 2009, no. 4, pp. 76–78. (in Russ.).

8. Kazantsev A.V. Ob uravnenii Gakhova dlya operatora Bernatskogo (On the Gakhov Equation for the Biernacki Operator). *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, Vol. 157, Book 2, pp. 79–92.

9. Kadiyeva M.R., Mayer F.F. Convexity Condition of the Generalized Bernatsky Integral for One Subclass of Star-Like Functions. *Bulletin Abai KazNPU. Series of Physics & Mathematical Sciences*, 2020, Vol. 69, no. 1, pp. 111–118.

10. Reade M.O. The Coefficients of Close-to-Convex Functions. DUKE MATH. J., 1956, Vol. 23, no. 3, pp. 459–462. DOI: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0

11. Renyi A. Some Remarks on Univalent Functions. *Bulgar. Akad. Nauk., Izv. Mat. Inst.* 3, 1959, pp. 111–119.

12. Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* (Geometric Theory of Functions of a Complex Variable), Moscow, Nauka Publ., 1966, 628 p. (in Russ.).

13. Merkes E.P., Wright D.J. On the Univalence of a Certain Integral. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, Vol. 27, no. 1, pp. 97–100. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0269825-1

14. Maiyer F.F., Utemisova A.A., Masakbaeva D.M. Radiusy vypuklosti integrala Bernackogo dlja odnogo podklassa zvezdoobraznyh funkcij (Radii of convexity of the Bernatsky integral for one subclass of star-shaped functions). *Materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Bajtursynovskie chtenija – 2022" (Proc. International Scientific and Practical Conf. "Baitursinov readings – 2022"),* Kostanaj, *Kostanayckiy regional'nyy universitet Publ.*, 2022, pp. 317–322.

Received January 18, 2022

Information about the authors

Maiyer Fedor Fedorovich is Professor, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, e-mail: maiyer@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Tastanov Meyrambek Gabdulievich is Professor, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1926-8958

Utemissova Anar Altayevna is Associate Professor, Cand. Sc. (Pedagogical), Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Republic of Kazakhstan, e-mail: anar_utemisova@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5143-0260