УДК 510.63 DOI: 10.14529/mmph220403

МИНИМИЗАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БАЗИСАХ ШЕФФЕРА И ПИРСА

В.В. Меньших, В.А. Никитенко
Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: menshikh@list.ru

Аннотация. Рассмотрено представление произвольных логических функций в базисах Шеффера и Пирса. Для этого первоначально найдены рекуррентные зависимости представления дизъюнктивных и конъюнктивных одночленов в указанных базисах и сделаны обобщения на произвольные логические формулы, представленные в виде дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. Получены оценки на количество операций в логических формулах при переходе к базисам Шеффера и Пирса.

Ключевые слова: дизъюнктивный одночлен; конъюнктивный одночлен; базис Шеффера; базис Пирса; булева переменная; булева функция.

Введение

Результаты, полученные в математической логике, нашли широкое применение в конструировании электронных микросхем [1–3]. В частности, важной является задача представления произвольных логических функций с помощью формул, содержащих логические операции из заданного набора. Такие наборы операций называются функционально полными. Для того чтобы набор логических операций был функционально полным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял критерию Поста [1, 3]. Также рассматривается задача сокращения количества используемых операций заданного набора в логических формулах, связанная с задачей сокращения количества логических элементов в устройствах цифровой техники.

Наиболее изученными функциональными наборами логических операций являются стандартный базис («$\wedge$», «$\vee$», «$\neg$»), в котором логические функции представляются в виде конъюнктивных и дизъюнктивных нормальных форм, и базис Жегалкина («$\oplus$», «$\wedge$», «1»), в котором логические функции единственным образом представляются полиномами Жегалкина [2].

Среди функционально полных наборов логических операций выделяются два набора, каждый из которых включает только одну операцию: базис Шеффера, включающий штрих Шеффера «$|$», и базис Пирса, включающий стрелку Пирса «$\downarrow$». В связи с тем, что указанные наборы включают только по одной операции, логические формулы с их использованием, как правило, являются очень громоздкими.

В данной работе рассматривается вопрос сокращения количества операций в логических формулах в базисах Шеффера и Пирса.

Представление дизъюнктивных и конъюнктивных одночленов в базисах Шеффера и Пирса

Операция «штрих Шеффера» является комбинацией конъюнкции и отрицания, а операция «стрелка Пирса» – комбинацией дизъюнкции и отрицания. Поэтому традиционный подход к переходу к базисам Шеффера и Пирса заключается в использовании законов де Моргана и двойного отрицания.

Рассмотрим логическую функцию, заданную дизъюнктивным одночленом

$$\overline{x_1} \vee \ldots \vee \overline{x_n}\,. \qquad (1)$$

и приведём примеры её представления в базисе Шеффера для случаев $n=3$ и $n=4$.

1) Пусть $n=3$. Тогда, используя законы де Моргана и двойного отрицания, получим:

$$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} = \overline{x_1 \wedge x_2} \vee \overline{x_3} = x_1 \,|\, x_2 \vee x_3 \,|\, x_3 = \overline{\overline{x_1 \,|\, x_2 \vee x_3 \,|\, x_3}} = \overline{\overline{x_1 \,|\, x_2} \wedge \overline{x_3 \,|\, x_3}} = \big((x_1 \,|\, x_2) \,|\, (x_1 \,|\, x_2)\big) \,|$$
$$|\, \big((x_3 \,|\, x_3) \,|\, (x_3 \,|\, x_3)\big).$$

Данная запись является громоздкой и содержит 7 логических операций.

Количество операций можно сократить, применив, например, закон Порецкого:

$$\overline{x_1 \wedge x_2} \vee \overline{x_3} = \left(\overline{x_1 \wedge x_2} \wedge x_3\right) \vee \overline{x_3} = \overline{\overline{\left(\overline{x_1 \wedge x_2} \wedge x_3\right) \vee \overline{x_3}}} = \overline{\overline{\left(\overline{x_1 \wedge x_2} \wedge x_3\right)} \wedge x_3} = \left(\left(x_1 \mid x_2\right) \mid x_3\right) \mid x_3 .$$

Данная запись является более компактной по сравнению с предыдущей записью и включает только 3 логические операции.

2) Пусть $n = 4$. Тогда, используя аналогичные рассуждения, получим:

$$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \vee \overline{x_4} = \overline{\overline{\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \vee \overline{x_4}}} ,$$

применив закон Порецкого

$$\overline{\overline{\left(\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \wedge x_4\right) \vee \overline{x_4}}} = \overline{\overline{\left(\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \wedge x_4\right)} \wedge x_4} = \left(\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \mid x_4\right) \mid x_4 ,$$

исходя из формулы для $n = 3$, получаем

$$\left(\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3} \mid x_4\right) \mid x_4 = \left(\left(\left(\left(x_1 \mid x_2\right) \mid x_3\right) \mid x_3\right) \mid x_4\right) \mid x_4 .$$

Полученные результаты позволяют заметить рекурсивную зависимость при представлении одночлена (1) в базисе Шеффера.

Теорема 1. $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \ldots \vee \overline{x_n} = \left(\ldots\left(\left(\left(\left(x_1 \mid x_2\right) \mid x_3\right) \mid x_3\right) \mid \ldots\right) \mid x_n\right) \mid x_n .$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции, учитывая явно прослеживающуюся в приведённых примерах рекурсивную зависимость.

Введем функцию γ_k такую, что

$$\gamma_1 = x_1 \mid x_1;\ \gamma_2 = x_1 \mid x_2;\ \gamma_k = \left(\gamma_{k-1} \mid x_k\right) \mid x_k,\ k > 2.$$

При $n = 1$ $\overline{x_1} = x_1 \mid x_1 = \gamma_1$; при $n = 2$ $\overline{x_1 \wedge x_2} = x_1 \mid x_2 = \gamma_2$; при $n = 3$

$$\overline{x_1 \wedge x_2} \vee \overline{x_3} = \left(\left(x_1 \mid x_2\right) \mid x_3\right) \mid x_3 = \gamma_3 .$$

Полученные зависимости используем как базу индукции. Далее предположим, что для $n = m$ выполняется равенство

$$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \ldots \vee \overline{x_m} = \left(\ldots\left(\left(\left(\left(x_1 \mid x_2\right) \mid x_3\right) \mid x_3\right) \mid \ldots\right) \mid x_m\right) \mid x_m = \gamma_m ,$$

докажем, что утверждение верно для $n = m + 1$:

$$\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \ldots \vee \overline{x_m} \vee \overline{x_{m+1}} = \overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \ldots \wedge x_m} \vee \overline{x_{m+1}} = \overline{\overline{\left(\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \ldots \wedge x_m} \wedge x_{m+1}\right) \vee \overline{x_{m+1}}}} =$$

$$= \overline{\overline{\left(\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \ldots \wedge x_m} \wedge x_{m+1}\right)} \wedge x_{m+1}} = \left(\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \ldots \wedge x_m} \mid x_{m+1}\right) \mid x_{m+1} = \left(\gamma_m \mid x_{m+1}\right) \mid x_{m+1} = \gamma_{m+1}. \blacksquare$$

Использование данной теоремы позволяет уменьшить количество логических операций при переходе к базису Шеффера. К примеру, при «традиционном» переходе от дизъюнктивного одночлена к базису Шеффера (с использованием только закона де Моргана и двойного отрицания) для $n = 3$ и $n = 4$ количество логических операций равно 7, для $n = 5$ – 16, а при применении теоремы 1 количество операций можно сократить до $3,\ 5,\ 7$ соответственно.

Следствие. $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \overline{f_i} = \left(\ldots\left(\left(\left(\left(f_1 \mid f_2\right) \mid f_3\right) \mid f_3\right) \mid \ldots\right) \mid f_n\right) \mid f_n$, где f_i – произвольная булева функция.

Доказательство следствия 1 осуществятся аналогично доказательству теоремы 1, если рассматривать булеву функцию как булеву переменную.■

Приведём аналогичные рассуждения для представления конъюнктивных одночленов

$$\overline{x_1} \wedge \ldots \wedge \overline{x_n}$$

в базисе Пирса.

Теорема 2. $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \wedge \ldots \wedge \overline{x_n} = \left(\ldots\left(\left(\left(\left(x_1 \downarrow x_2\right) \downarrow x_3\right) \downarrow x_3\right) \downarrow \ldots\right) \downarrow x_n\right) \downarrow x_n$

Доказательство теоремы 2 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1. ■

Аналогичное следствие выводится и для теоремы 2.

Следствие. $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \overline{f_i} = \left(\ldots\left(\left(\left(\left(f_1 \downarrow f_2\right) \downarrow f_3\right) \downarrow f_3\right) \downarrow \ldots\right) \downarrow f_n\right) \downarrow f_n$. ■

Следствия из теорем 1 и 2 используются при описании перехода от минимальной дизъюнктивной нормальной формы (МДНФ) и минимальной конъюнктивной нормальной формы (МКНФ) к базисам Шеффера и Пирса соответственно.

Алгоритм перехода от МДНФ и МКНФ к базисам Шеффера и Пирса

Вначале разработаем алгоритм перехода от МДНФ к базису Шеффера и по аналогии построим алгоритм для МКНФ. Основанием того, что переход осуществляется именно от МДНФ к базису Шеффера, является то, что запись, полученная в результате перехода, будет содержать меньшее количество логических операций.

Рассмотрим функцию n переменных

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=\bigvee_{i=1}^{k}\psi_i ,$$

где $\psi_i=\bigwedge_{t=1}^{n}\alpha_t g_t$, $\alpha_t=\begin{cases}0, \text{ если } g_t \text{ не содержится в } \psi_i,\\ 1, \text{ если } g_t \text{ содержится в } \psi_i,\end{cases}$ g_t – литерал (переменная или её отрицание).

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=\psi_1\vee...\vee\psi_k=\overline{\overline{\psi_1\vee...\vee\psi_k}}=\overline{\overline{\psi_1}\wedge...\wedge\overline{\psi_k}} .$$

Применяя следствие из теоремы 1, получаем

$$\overline{\overline{\psi_1}\wedge...\wedge\overline{\psi_k}}=\left(\left(...\left(\left(\left(\overline{\psi_1}\,|\,\overline{\psi_2}\right)|\,\overline{\psi_3}\right)|\,\overline{\psi_3}\right)|\,...\right)|\,\overline{\psi_k}\right)|\,\overline{\psi_k} .$$

Для перевода $\overline{\psi_i}$ в базис Шеффера также воспользуемся теоремой 1. Введем обозначение:

$$\overline{\psi_i}=\overline{\bigwedge_{t=1}^{n}\alpha_t g_t}=\gamma_{\psi_i} ,$$

тогда с учетом обозначения получаем

$$\left(\left(...\left(\left(\left(\overline{\psi_1}\,|\,\overline{\psi_2}\right)|\,\overline{\psi_3}\right)|\,\overline{\psi_3}\right)|\,...\right)|\,\overline{\psi_k}\right)|\,\overline{\psi_k}=\left(\left(...\left(\left(\left(\gamma_{\psi_1}\,|\,\gamma_{\psi_2}\right)|\,\gamma_{\psi_3}\right)|\,\gamma_{\psi_3}\right)|\,...\right)|\,\gamma_{\psi_k}\right)|\,\gamma_{\psi_k}$$

Полученные выкладки положены в основу алгоритма перехода от МДНФ в базис Шеффера, представленный ниже.

Шаг 1. Рассматриваем ψ_i как переменные и осуществляем переход в базис Шеффера, но при этом сохраняем инверсию ψ_i.

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=\left(\left(...\left(\left(\left(\overline{\psi_1}\,|\,\overline{\psi_2}\right)|\,\overline{\psi_3}\right)|\,\overline{\psi_3}\right)|\,...\right)|\,\overline{\psi_k}\right)|\,\overline{\psi_k} .$$

Шаг 2. Осуществляем преобразование $\overline{\psi_1},...,\overline{\psi_k}$ применяя теорему 1. Если есть инверсия x_i, то преобразование осуществляется по формуле $\overline{x_i}=x_i\,|\,x_i$.

Шаг 3. Записываем окончательный результат.

Замечание. Для уменьшения количества логических операций необходимо сдвинуть на первые места переменные $\overline{x_i}$ в конъюнктивном одночлене ($x_1\wedge x_2\wedge\overline{x_3}\wedge\overline{x_4}=\overline{x_3}\wedge\overline{x_4}\wedge x_1\wedge x_2$).

По аналогии получаем алгоритм для МКНФ с аналогичным замечанием.

Шаг 1. Рассматриваем ψ_i как переменные и осуществляем переход в базис Пирса, но при этом сохраняем инверсию ψ_i.

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=\left(\left(...\left(\left(\left(\overline{\psi_1}\downarrow\overline{\psi_2}\right)\downarrow\overline{\psi_3}\right)\downarrow\overline{\psi_3}\right)\downarrow...\right)\downarrow\overline{\psi_k}\right)\downarrow\overline{\psi_k}$$

Шаг 2. Осуществляем преобразование $\overline{\psi_1},...,\overline{\psi_k}$**,** при помощи теоремы 2. Если есть инверсия x_i,что преобразование осуществляется по формуле $\overline{x_i}=x_i\downarrow x_i$.

Шаг 3. Записываем окончательный результат.

Численный пример

Рассмотрим логическую функцию

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=(x_1\wedge x_2\wedge x_4)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)\vee\left(\bar{x}_1\wedge x_3\wedge\bar{x}_4\right)=(x_1\wedge x_2\wedge x_4)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)\vee\left(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_4\wedge x_3\right)$$

$$\psi_1=(x_1\wedge x_2\wedge x_4),\ \psi_2=(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3),\ \psi_3=\left(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_4\wedge x_3\right).$$

Опишем результаты реализации алгоритма.

Шаг 1.

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\psi_1\vee\psi_2\vee\psi_3=\overline{\overline{\psi_1\vee\psi_2\vee\ldots\vee\psi_k}}=\overline{\overline{\psi_1}\wedge\overline{\psi_2}\wedge\ldots\wedge\overline{\psi_k}}=((\overline{\psi_1}\,|\,\overline{\psi_2})\overline{\psi_3})\,|\,\overline{\psi_3}\,.$$

Шаг 2.

$$\overline{\psi_1}=\overline{x_1\wedge x_2\wedge x_4}=((x_1\,|\,x_2)\,|\,x_4)\,|\,x_4\,;$$

$$\overline{\psi_2}=\overline{x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3}=\Big(\Big(x_1\Big|(x_2\big|x_2\Big)\,|\,x_3\Big)\,|\,x_3;$$

$$\overline{\psi_3}=\overline{\bar{x}_1\wedge\bar{x}_4\wedge x_3}=(((x_1\,|\,x_1)\big|(x_4\big|x_4))\,|\,x_3)\,|\,x_3\,;$$

Шаг 3.

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\left[((x_1\,|\,x_2)\,|\,x_4)\,|\,x_4\right]|\left[((x_1\,|\,(x_2\,|\,x_2))\,|\,x_3)\,|\,x_3\right]|\left[(((x_1\,|\,x_1)\big|(x_4\big|x_4))\,|\,x_3)\,|\,x_3\right]|$$
$$|\left[(((x_1\,|\,x_1)\big|(x_4\big|x_4))\,|\,x_3)\,|\,x_3\right].$$

Полученная функция в базисе Шеффера имеет 20 логических операций. Стоит заметить, если бы мы не последовали замечанию алгоритма, то функция имела бы 22 логические операции.

Замечание

Одним из недостатков перехода в рассматриваемые базисы является то, что, как правило, увеличивается количество логических операций. Однако следует отметить, что при переходе в данные базисы количество операций может и уменьшится. Примером может быть функция

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=(x_1\,|\,x_2)\,|\,x_3\,. \tag{2}$$

При переходе в стандартный базис она будет иметь вид

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1\wedge x_2\right)\vee\overline{x_3}\,. \tag{3}$$

Расчет количества логических операций в базисах Шеффера и Пирса

На основе анализа приведённых выше алгоритмов была получена зависимость для количества логических операций. Обозначим:

$f_\wedge\left(x_1,...,x_n\right)=\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_3}\wedge...\wedge\overline{x_n}=f_\wedge^n$ – конъюнктивный одночлен;

$f_|\left(x_1,...,x_n\right)=f_|^n=\Big(...\Big(\Big(\Big((x_1\,|\,x_2)\,|\,x_3\Big)\,|\,x_3\Big)|...\Big)\,|\,x_n\Big)\,|\,x_n$ – запись $f_\wedge^n$ в базисе Шеффера (используя теорему 1);

λ_n – количество операций «$|$» в $f_|^n$;

k – количество конъюнктивных одночленов в формуле;

n_i – количество переменных в ψ_i;

$N_i=\begin{cases}1, \text{ если } n_i=1,\\ 2n_i-3, \text{ если } n_i\ge 2,\end{cases}$ – количество «$|$», возникающих при переходе от конъюнктивных одночленов к базису Шеффера;

$j_i\le n_i$ – количество инверсий переменных в ψ_i;

$I_i=\begin{cases}0, \text{ если } j_i=0,\\ 1, \text{ если } j_i=1,\\ 2j_i-2, \text{ если } j_i\ge 2,\end{cases}$ – количество «$|$», возникающих при переходе от инверсии к «$|$»;

$G_{n_1,...,n_k}^{j_1,...,j_k}$ – количество «$|$» при переходе в базис Шеффера.

Лемма 1. Пусть был осуществлен переход $f_\wedge^n$ в $f_|^n$, тогда λ_n имеет вид:

$$\lambda_n=\begin{cases}1, \text{ если } n=1,\\ 2n-3, \text{ если } n\ge 2.\end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. База индукции

При $n=1$

$$\overline{x_1}=x_1\,|\,x_1, \lambda_1=1.$$

При $n=2$

$$\overline{x_1}\vee\overline{x_2}=x_1\,|\,x_2,\ \lambda_2=1=2\cdot 2-3.$$

При $n=3$

$$\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}=\left(\left(x_1\,|\,x_2\right)|\,x_3\right)|\,x_3,\ \lambda_3=3=2\cdot 3-3.$$

Предположим, что для $n=m$ выполняется равенство

$$\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\vee\ldots\vee\overline{x_m}=\left(\ldots\left(\left(\left(\left(x_1\,|\,x_2\right)|\,x_3\right)|\,x_3\right)|\ldots\right)|\,x_m\right)|\,x_m,\ \lambda_m=2m-3,$$

докажем, что выполняется для $n=m+1$, имеем равенство

$$\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\vee\ldots\vee\overline{x_m}\vee\overline{x_{m+1}}=\left(\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\left(x_1\,|\,x_2\right)|\,x_3\right)|\,x_3\right)|\ldots\right)|\,x_m\right)|\,x_m\right)|\,x_{m+1}\right)|\,x_{m+1}. \quad (4)$$

Количество операций для функции $f_{|}^{m+1}$ получается путем прибавления к λ_m двух логических операций, как видно из равенства (4). Тогда имеем рекуррентное соотношение $\lambda_{m+1}=\lambda_m+2$. По предположению индукции, что $\lambda_m=2m-3$, получаем $\lambda_{m+1}=\lambda_m+2=2m-3+2$ $=2m+2-3=2(m+1)-3=\lambda_{m+1}$.■

Лемма 2. Поставим в соответствие каждому x_i из выражения $f_{\wedge}^{n}$ литерал g_i. Пусть количество литерал, которые являются инверсией x_i, равно n', тогда количество логических операций «|» при переходе от инверсии к «|» $\mu_{n'}$ имеет вид:

$$\mu_{n'}=\begin{cases}0,\ \text{если}\ n'=0,\\ 1,\ \text{если}\ n'=1,\\ 2n'-2,\ \text{если}\ n'\geq 2.\end{cases}$$

Доказательство. По аналогии с леммой 1 воспользуемся методом математической индукции для доказательства. Для случая $n'=0$ очевидно, что $\mu_0=0$. База индукции

$n'=1$. Рассмотрим $f_{\wedge}^{n}$ вида

$$\overline{g_1}\wedge\overline{g_2}\wedge\ldots\wedge x_i\wedge\ldots\wedge\overline{g_n}.$$

Так как количество литералов, которые являются инверсией x_i, равно 1, то согласно замечанию переместим его на первое место, в силу коммутативности операции «$\wedge$»

$$x_i\wedge\overline{g_2}\wedge\ldots\wedge\overline{g_1}\wedge\ldots\wedge\overline{g_n}.$$

При переходе к базису Шеффера получаем

$$\left(\left(\ldots\left(\overline{x_i}\,|\,g_2\right)|\ldots\right)|\,g_n\right)|\,g_n=\left(\left(\ldots\left(\left(x_i\,|\,x_i\right)|\,g_2\right)|\ldots\right)|\,g_n\right)|\,g_n\Rightarrow\mu_1=1.$$

$n'=2$. По аналогии с шагом для $n'=1$ рассмотрим $f_{\wedge}^{n}$ с двумя инверсиями x_{i_1} и x_{i_2} без ограничения общности $i_1<i_2$, получаем

$$x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge\ldots\wedge\overline{g_n}=\left(\left(\ldots\left(\overline{x_{i_1}}\,|\,\overline{x_{i_2}}\right)|\ldots\right)|\,g_n\right)|\,g_n=\left(\left(\ldots\left(\left(x_{i_1}\,|\,x_{i_1}\right)|\left(x_{i_2}\,|\,x_{i_2}\right)\right)|\ldots\right)|\,g_n\right)|\,g_n\Rightarrow\mu_2=2=2\cdot 2-2.$$

$n'=3$, x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, $i_1<i_2<i_3$

$$x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge x_{i_3}\wedge\ldots\wedge\overline{g_n}=\left(\left(\ldots\left(\left(\overline{x_{i_1}}\,|\,\overline{x_{i_2}}\right)|\,\overline{x_{i_3}}\right)|\,\overline{x_{i_3}}\ldots\right)|\,g_n\right)|\,g_n=$$

$$=\left(\left(\ldots\left(\left(\left(x_{i_1}\,|\,x_{i_1}\right)|\left(x_{i_2}\,|\,x_{i_2}\right)\right)|\left(x_{i_3}\,|\,x_{i_3}\right)\right)|\left(x_{i_3}\,|\,x_{i_3}\right)\ldots\right)|\,g_n\right)|\,g_n$$

$$\Rightarrow\mu_3=4=2\cdot 3-2.$$

Предположим, что для $n=m$ выполняется равенство

$$x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge x_{i_3}\wedge\ldots\wedge x_{i_m}\wedge\ldots\wedge\overline{g_n}=\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\overline{x_{i_1}}\mid\overline{x_{i_2}}\right)\mid\overline{x_{i_3}}\right)\mid\overline{x_{i_3}}\right)\mid\ldots\right)\mid\overline{x_{i_m}}\right)\mid\overline{x_{i_m}}\right)\mid\ldots\right)\mid g_n\right)\mid g_n=$$

$$\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\left(x_{i_1}\mid x_{i_1}\right)\mid\left(x_{i_2}\mid x_{i_2}\right)\right)\mid\left(x_{i_3}\mid x_{i_3}\right)\right)\mid\left(x_{i_3}\mid x_{i_3}\right)\right)\mid\ldots\right)\mid\left(x_{i_m}\mid x_{i_m}\right)\right)\mid\left(x_{i_m}\mid x_{i_m}\right)\right)\mid\ldots\right)\mid g_n\right)\mid g_n=$$

$\Rightarrow\mu_m=2\cdot m-2.$

Докажем, что выполняется для $n=m+1$. Имеем равенство

$$x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge x_{i_3}\wedge\ldots\wedge x_{i_{m+1}}\wedge\ldots\wedge\overline{g_n}=$$

$$=\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\left(\ldots\left(\left(\left(\left(x_{i_1}\mid x_{i_1}\right)\mid\left(x_{i_2}\mid x_{i_2}\right)\right)\mid\left(x_{i_3}\mid x_{i_3}\right)\right)\mid\left(x_{i_3}\mid x_{i_3}\right)\right)\mid\ldots\right)\mid\right.\right.\right.\right.\right.\right. \tag{5}$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\left.\mid\left(x_{i_m}\mid x_{i_m}\right)\right)\mid\left(x_{i_m}\mid x_{i_m}\right)\right)\mid\left(x_{i_{m+1}}\mid x_{i_{m+1}}\right)\right)\mid\ldots\right)\mid g_n\right)\mid g_n.$$

Количество операций для функции $f_{|}^{m+1}$ получается путем прибавления к μ_m двух логических операций, как видно из равенства (5). Тогда имеем рекуррентное соотношение $\mu_{m+1}=\mu_m+2$. По предположению индукции, что $\mu_m=2m-2$, получаем $\mu_{m+1}=\mu_m+2=2m-2+2=$ $=2m+2-2=2\left(m+1\right)-2=\mu_{m+1}$.■

Теорема 3.

1. Если $k=2$, то

$$G_{n_1,n_2}^{j_1,j_2}=\sum_{i=1}^{2}\left(I_i+N_i\right)+1. \tag{6}$$

2. Если $k\geq 3$, то

$$G_{n_1,\ldots,n_k}^{j_1,\ldots,j_k}=\sum_{i=1}^{2}\left(I_i+N_i\right)+2\sum_{i=3}^{k}\left(I_i+N_i\right)+2k-3. \tag{7}$$

Доказательство.

1. Рассмотрим конъюнктивный одночлен вида

$$\left(g_{l_1^1}\wedge\ldots\wedge g_{l_{n_1}^1}\right)\vee\left(g_{l_1^2}\wedge\ldots\wedge g_{l_{n_2}^2}\right),$$

при переходе к базису Шеффера получаем

$$\left(\left(\ldots\left(\left(g_{l_1^1}\mid g_{l_1^1}\right)\mid\ldots\right)\mid g_{l_{n_1}^1}\right)\mid g_{l_{n_1}^1}\right)\mid\left(\left(\ldots\left(\left(g_{l_1^2}\mid g_{l_1^2}\right)\mid\ldots\right)\mid g_{l_{n_2}^2}\right)\mid g_{l_{n_2}^2}\right). \tag{8}$$

Согласно лемме 1 в каждой скобке выражения (8) логических операций будет $2n_1-3$ и $2n_2-3$ (если $n_1,n_2\geq 2$, иначе одна логическая операция), что соответствует обозначению N_{n_1},N_{n_2}. Если количество литералов в каждой скобке выражения (8), являющихся инверсией переменных, равно n_1',n_2', то согласно лемме 2 их численное значение имеет вид $I_{n_1'},I_{n_2'}$ соответственно. Также добавляется еще одна логическая операция «|», стоящая между скобами, выражения (8).

3. Рассмотрим конъюнктивный одночлен вида

$$\left(g_{l_1^1}\wedge\ldots\wedge g_{l_{n_1}^1}\right)\vee\left(g_{l_1^2}\wedge\ldots\wedge g_{l_{n_2}^2}\right)\vee\ldots\vee\left(g_{l_1^k}\wedge\ldots\wedge g_{l_{n_k}^k}\right) \tag{9}$$

при переходе к базису Шеффера получаем

$$\left[\left[\left[\left(\left(\ldots\left(g_{l_1^1}\mid g_{l_1^1}\right)\mid\ldots\right)\mid g_{l_{n_1}^1}\right)\mid\left(\left(\ldots\left(g_{l_1^2}\mid g_{l_1^2}\right)\mid\ldots\right)\mid g_{l_{n_2}^2}\right)\right]\mid\left(\left(\ldots\left(g_{l_1^3}\mid g_{l_1^3}\right)\mid\ldots\right)\mid g_{l_{n_3}^3}\right)\right]\mid\ldots\right]\mid\left(\left(\ldots\left(g_{l_1^k}\mid g_{l_1^k}\right)\mid\ldots\right)\mid g_{l_{n_k}^k}\right). \tag{10}$$

Разобьем пункт 2 теоремы 3 на 3 части. Докажем, что:

1') $\sum_{i=1}^{2}\left(I_i+N_i\right)$ выполнятся для 1-й и 2-й скобки;

2') $2\sum_{i=3}^{k}\left(I_i+N_i\right)$ выполнятся для скобок $3,...,k$;

3') $2k-3$ дополнительное слагаемое.

1') Смотрите доказательство пункта 1 теоремы 3.

2') Скобки $3,...,k$ порождают $\left(I_{n_3}+...+I_{n_k}\right)+\left(N_{n_3}+...+N_{n_k}\right)$, как было показано в пункте 1 доказательства теоремы 3. Когда количество конъюнктивных одночленов $k\geq 3$, то каждая скобка, начиная с 3-й повторяется 2 раза, следовательно, количество логических операций«|» удваивается $2\cdot\left[\left(I_{n_3}+...+I_{n_k}\right)+\left(N_{n_3}+...+N_{n_k}\right)\right]$.

3') Обозначим $\left(g_{l_1^v}\wedge...\wedge g_{l_{n_v}^v}\right)=\sigma_v$, тогда выражение (9) будет иметь вид

$$\sigma_1\vee\sigma_2\vee...\vee\sigma_3,$$

переходя к базису Шеффера получаем

$$\left(...\left(\left(\left(\left(\sigma_1\,|\,\sigma_2\right)|\,\sigma_3\right)|\,\sigma_3\right)|\,...\right)|\,\sigma_k\right)|\,\sigma_k,$$

где количество символов согласно лемме 1 равно $2k-3$.■

Полученные формулы (6) и (7) справедливы при выполнении замечания алгоритма. Однако предложенная формула не срабатывает при малом количестве переменных в дизъюнктивных одночленах. Примером может служить случай, который рассматривался в начале раздела (2), (3). Применяя формулу, получаем $G_{2,1}^{0,1}=4$, хотя логических операций всего 2. Аналогичная формула и для перехода к базису Пирса.

Заключение

При осуществлении перехода от стандартного базиса к базисам Шеффера и Пирса «традиционным» образом количество операций возрастает нелинейно. Анализ полученных формул для количества логических операций G_k показывает, что в случае использования предложенных алгоритмов количество логических операций, а в свою очередь и количество логических элементов в устройствах цифровой техники, будет увеличиваться линейно в зависимости от количества переменных подаваемых на вход микросхемы, что определяет практическую ценность полученных результатов.

Литература

1. Горбатов, В.А. Фундаментальные основы дискретной математики / В.А. Горбатов. – М.: Наука, 2000. – 540 с.

2. Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 394 с.

3. Меньших, В.В. Дискретная математика: учебник / В.В. Меньших, А.Н. Копылов, В.А. Кучер, С.А. Телкова. – Воронеж: Воронежский институт МВД России, 2016. – 228 с.

Поступила в редакцию 18 июля 2022 г.

Сведения об авторах

Меньших Валерий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: menshikh@list.ru

Никитенко Виталий Алексеевич – адъюнкт, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 4, pp. 20–27

DOI: 10.14529/mmph220403

MINIMIZATION OF REPRESENTATIONS OF THE LOGICAL FUNCTION IN SCHAEFFER AND PIERCE BASES

V.V. Menshikh, V.A. Nikitenko
Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation
E-mail: menshikh@list.ru

Abstract. The paper studies the representation of arbitrary logical functions in Schaeffer and Pierce bases. For this purpose, recurrent dependencies of the representation of disjunctive and conjunctive monomials in these bases were initially established. Then generalizations were made to the arbitrary logical formulas presented in the form of disjunctive and conjunctive normal forms. Estimates were obtained for the number of operations in logical formulas during the transition to the Schaeffer and Pierce bases.

Keywords: disjunctive monomial; conjunctive monomial; Schaeffer's basis; Pierce's basis; Boolean variable; Boolean function.

References

1. Gorbatov V.A. *Fundamental'nye osnovy diskretnoy matematiki* (Fundamental foundations of discrete mathematics). Moscow, Nauka Publ., 2000, 540 p. (in Russ.).
2. Kuznetsov O.P. *Diskretnaya matematika dlya inzhenera* (Discrete mathematics for an engineer). Saint-Petersburg, Lan' Publ, 2009, 394 p. (in Russ.).
3. Men'shikh V.V., Kopylov A.N., Kucher V.A., Telkova S.A. *Diskretnaya matematika* (Discrete mathematics). Voronezh, Voronezhskiy institut MVD Rossii Publ., 2016, 228 p.

Received July 18, 2022

Information about the authors

Menshikh Valery Vladimirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Mathematical and Modeling System Department, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation, e-mail: menshikh@list.ru

Nikitenko Vitaly Alekseevich is Post-graduate Student, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com