УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph220404

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

К.В. Перевозчикова, Н.А. Манакова
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: perevozchikovakv@susu.ru, manakovana@susu.ru

Аннотация. Статья посвящена исследованию задачи граничного управления и финального наблюдения для одной вырожденной математической модели нелинейной фильтрации, основанной на уравнении Осколкова, с начальным условием Шоуолтера–Сидорова. Данная модель относится к классу полулинейных моделей соболевского типа, в которых нелинейный оператор является *p*-коэрцитивным и *s*-монотонным. Впервые рассмотрена задача граничного управления и финального наблюдения для полулинейной модели соболевского типа и найдены условия существования пары управление–состояние изучаемой задачи.

Ключевые слова: задача граничного управления и финального наблюдения; математическая модель нелинейной фильтрации; уравнения соболевского типа.

Введение

Целью работы является исследование задачи граничного управления и финального наблюдения

$$J(x(T),u)\to\inf \tag{1}$$

для математической модели нелинейной фильтрации, которая базируется на уравнении Осколкова

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda-\Delta)x-\alpha\Delta x+|x|^{p-2}x=y,\ (s,t)\in\Omega\times R_+,\ \Omega\subset R^n, \tag{2}$$

с начальным условием Шоуолтера–Сидорова

$$(\lambda-\Delta)(x(s,0)-x_0(s))=0,\ s\in\Omega, \tag{3}$$

и неоднородным условием Неймана

$$\frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}}=u,\ (s,t)\in\partial\Omega\times R_+. \tag{4}$$

Уравнение (2) впервые описано в работе [1]. Под физическим смыслом уравнения (1) понимается зависимость давления вязкоупругой несжимаемой жидкости от внешней нагрузки. Предпологается, что жидкость фильтруется в пористом пласте. Искомая функция $x = x(s,t)$ в уравнении (2) описывает изменение давления фильтрующейся жидкости под внешним воздействием $y = y(s,t)$. Параметры модели $\alpha\in R_+$, $\lambda\in R$ описывают вязкие и упругие свойства жидкости. Основываясь на экспериментальных данных показано, что λ может принимать и отрицательные значения [1]. Исследование невырожденного и вырожденного уравнения нелиненой фильтрации (2) было проведено ранее [2, 3], в качестве начально-краевых условий рассматривались начальные условия Коши или Шоуолтера–Сидорова и однородное условие Дирихле, были найдены условия однозначной разрешимости изучаемых задач в классическом и слабом обобщенном случае. При моделировании различных процессов на основе неклассических вырожденных уравнений в частных производных рассматриваются различные краевые условия: Дирихле [3] или Неймана [4] и начальные условия: Коши [3], Шоуолтера–Сидорова или многоточечное начально-конечное условие [4]. В данной работе будет рассмотрено неоднородное условие Неймана, что соответствует случаю, когда каждая точка границы пористого пласта постоянно поддерживается при определенном градиенте давления фильтрующейся жидкости (может быть разным в разных концах границы), с течением времени в каждой точке пласта установится свое давление, которое и является решением задачи Неймана при заданных граничных значениях. Модель нелинейной фильтрации (2), (4) принадлежит классу моделей, основанных на полулинейных уравнениях соболевского типа с *p*-коэрцитивным и *s*-

монотонным оператором [3]. Результаты исследования данного класса моделей и задач управления для них с однородным условием Дирихле, начальным условием Коши или Шоуолтера–Сидорова представлены в обзорной статье [5].

При математическом моделировании различных физических процессов возникает необходимость в управлении компонентами системы, в которой и протекает данный процесс. Предполагается, что динамические системы (системы, которые подвергаются постоянной эволюции во времени) могут находиться в одном из определенного (конечного или бесконечного) числа возможных состояний в каждый момент времени. Управление в данном случае относится к воздействию на изменение текущего состояния и последующее развитие системы. Воздействие, способное изменить состояние и последующее развитие системы, в данной ситуации называется управлением. Что приводит к задаче нахождении «наилучшего» управления процессом.

Целью данной статьи является исследование задачи граничного управления и финального наблюдения для вырожденной математической модели нелинейной фильтрации с условием Шоуолтера–Сидорова. Под граничным управлением понимается поиск функции, заданной на границе, которая переводит систему из заданного начального состояния в требуемое состояние, заданное в конечный момент времени T. Граничное управление чаще всего применяется для задач колебания стержня и тепломассопереноса. Результаты исследования граничного управления для параболических и гиперболических систем представлены в [6].

1. Математическая модель нелинейной фильтрации

Пусть $\mathsf{N}=W_2^1(\Omega)$, $\mathsf{B}=L_p(\Omega)$, $H=L_2(\Omega)$, где Ω – ограниченная область с границей класса C^∞, определим операторы:

$$\langle Ax,y\rangle=\int_\Omega(\lambda xy+\nabla x\cdot\nabla y)ds\ \ \forall x,y\in\mathsf{N};$$

$$\langle Cx,y\rangle=\int_\Omega\alpha\nabla x\cdot\nabla y\,ds\ \ \forall x,y\in\mathsf{N};$$

$$\langle D(x),y\rangle=\int_\Omega|x|^{p-2}xy\,ds\ \ \forall x,y\in\mathsf{B}.$$

Пусть N^* и B^* являются сопряженными пространствами к N и B относительно скалярного произведения $<\cdot,\cdot>$ в H. Отметим, что в случае $n\geq 3$ и $2\leq p\leq 2+\dfrac{4}{n-2}$ вложения

$$\mathsf{N}\subset\mathsf{B}\subset H\subset\mathsf{B}^*\subset\mathsf{N}^* \tag{5}$$

плотны и непрерывны, а вложение $\mathsf{N}\subset\mathsf{H}$ компактно.

Рассмотрим однородную задачу Неймана для оператора $(-\Delta)$ в области Ω. Через $\{\varphi_i\}$ и $\{\lambda_i\}$ обозначим последовательности собственных функций и значений оператора $(-\Delta)$. При этом будем считать, что последовательность собственных значений занумерована по неубыванию с учетом кратности. Операторы, введенные выше, обладают следующими свойствами: оператор $A:\mathsf{N}\to\mathsf{N}^*$ линейный и непрерывный, причем при $\lambda>-\lambda_1$ оператор A является неотрицательно определеннным; оператор $C:\mathsf{N}\to\mathsf{N}^*$ также линеен и непрерывен, а оператор $D:\mathsf{B}\to\mathsf{B}^*$ обладает свойством гладкости. Рассмотрим проектор

$$Q=\begin{cases} I, & \lambda>-\lambda_1;\\ I-<\cdot,\varphi_1>, & \lambda=-\lambda_1,\end{cases}$$

построим множество

$$\operatorname{coim}A=\begin{cases}\mathsf{N}, & \lambda>-\lambda_1;\\ \{x\in\mathsf{N}:\ <x,\varphi_1>=0\}, & \lambda=-\lambda_1,\end{cases}$$

пространство $\mathsf{X}=\{x\,|\,x\in L_\infty(0,T;\operatorname{coim}A)\cap L_p(0,T;L_p(\Omega)),\ \dot{x}^1\in L_2(0,T;\operatorname{coim}A)\}$, здесь $x^1=Qx$, множество

$$M=\begin{cases}\mathsf{N},\ при\ \lambda>-\lambda_1;\\ \{x\in\mathsf{N}:\displaystyle\int_\Omega(\alpha\lambda_1+|x|^{p-2}x-y)\varphi_1 ds-\alpha\int_{\partial\Omega}u\varphi_1 dS=0\}\},\ при\ \lambda=-\lambda_1.\end{cases}$$

Опираясь на абстрактную схему, представленую в [7], получим, что множество M является банаховым C^1-многообразием, которое диффеоморфно подпространству $\{x \in \mathrm{N}: \int\limits_\Omega x\varphi_1 ds = 0\}$.

В качестве слабого обобщенного решения уравнения (2) будем рассматривать такую вектор-функцию $x \in \mathrm{X}$, которая удовлетворяет следующему равенству:

$$\int\limits_0^T \left[\int\limits_\Omega (-\lambda x\omega_t - \nabla x \cdot \nabla\omega_t + \alpha\nabla x \cdot \nabla\omega + |x|^{p-2} x\omega - y\omega) ds - \alpha \int\limits_{\partial\Omega} u\omega dS \right] dt =$$
$$= \int\limits_\Omega (\lambda x(s,0)\omega(s,0) + \nabla x(s,0) \cdot \nabla\omega(s,0)) ds - \int\limits_{\partial\Omega} u(s,0)\omega(s,0) dS,$$
$$\omega \in W_2^{1,1}(\Omega \times (0,T)),\ \omega(s,T) = 0, s \in \Omega;\ \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}(s,t) = 0, (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T).$$

В дальнейшем будем рассматривать приближенное решение задачи (2)–(4) и, согласно проекционному методу, данное решение представим в виде

$$x_m(s,t) = \sum_{i=1}^m a_i(t)\varphi_i(s), \quad m > \dim\ker A, \tag{6}$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t),\ i = 1,\ldots,m,$ определяются как решения системы уравнений

$$\int\limits_\Omega (\lambda x_{mt}\varphi_i + \lambda_i x_{mt}\varphi_i + \alpha\lambda_i x_m\varphi_i + |x|^{p-2} x_m\varphi_i) ds = \int\limits_\Omega y\varphi_i ds + \alpha \int\limits_{\partial\Omega} u\varphi_i dS, \quad i = 1,\ldots,m$$

с начальными условиями

$$\int\limits_\Omega (\lambda + \lambda_i)(x_m(s,0) - x_0(s))\varphi_i(s)\, ds = 0, \quad i = 1,..,m.$$

Теорема 1.1. Пусть значения параметров уравнения (2) удовлетворяют условиям $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in R_+$, $n \geq 3$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$, тогда для любых $x_0 \in \mathrm{N}$, $u \in L_2(0,T; L_2(\partial\Omega))$, $y \in L_q(0,T; \mathrm{B}^*)$, таких что выражение $\int\limits_\Omega y\varphi_1 ds + \alpha \int\limits_{\partial\Omega} u\varphi_1 dS$ не зависит от t в случае $\lambda = -\lambda_1$, $T \in \mathrm{R}_+$ существует единственное слабое обобщенное решение $x \in \mathrm{X}$ задачи (2)–(4), причем

$$|x|^2 + \|x\|^2_{L_2(0,T;\mathrm{N})} + \|x\|^p_{L_p(0,T;\mathrm{B})} \leq C(\|y\|^q_{L_q(0,T;\mathrm{B}^*)} + |x_0|^2 + ||u||^2_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))}), \tag{7}$$

здесь $|\cdot|$– норма, определенная в coim A.

Заметим, что доказательство теоремы 1.1 основано на построении априорных оценок, методе фазового пространства, методе монотонности, теореме Банаха–Алаоглу, переходу к слабому пределу и существенно не отличается от схемы доказательства в случае однородной задачи Дирихле [5].

2. Задача граничного управления и финального наблюдения

Далее перейдем к исследованию задачи граничного управления и финального наблюдения (1) решениями математической модели нелинейной фильтрации (2), (4) с начальным условием (3). Для рассмотрения вопроса существования решения задачи (1)–(4) необходимо построить пространство управления

$$U = \{u \in L_2(0,T; L_2(\partial\Omega)): \quad \int\limits_\Omega y\varphi_1 ds + \alpha \int\limits_{\partial\Omega} u\varphi_1 dS \text{ не зависит от } t \text{ в случае } \lambda = -\lambda_1\},$$

а также выбрать в нем замкнутое и выпуклое подмножество $U_{ad} \subset U$. Для рассматриваемой модели задача граничного управления и финального наблюдения (1) примет вид:

$$J(x(T),u) = \vartheta\, ||x(T) - x_d||^p_{L_p(\Omega)} + (1-\vartheta)\, ||u - u_\partial||^2_{L_2(0,T;L_2(\partial\Omega))} \to \inf, \quad \vartheta \in (0,1), \tag{8}$$

где $x_d = x_d(s)$ – заданное состояние системы в конечный момент времени $t = T$, $u_\partial = u_\partial(s,t)$ – заданное значение производной по направлению вектора нормали, заданное на $\partial\Omega$. Также заметим, что решение задачи (2)–(4), (8) заключается в поиске пары функций $(\tilde{x}(T), \tilde{u})$, которая удовлетворяет следующему условию:

$$J(\tilde{x}(T),\tilde{u}) = \inf_{(x(T),u)} J(x(T),u),$$

где пара $(\tilde{x},\tilde{u}) \in \mathrm{X}\times U_{ad}$ удовлетворяет задаче (2)–(4) в слабом обобщенном смысле.

Замечание 2.1. Под множеством допустимых пар W задачи (2)–(4), (8) будем понимать совокупность таких пар $(x(T),u)$, которые удовлетворяют задаче (2)–(4) и $J(x(T),u) < +\infty$. Если $U_{ad} = \varnothing$, то для всех $u \in U_{ad} \subset U$ множество допустимых пар $(x(T),u)$ не пусто.

После введения всех необходимых определений и пространств сформулируем и докажем теорему существования решения задачи граничного управления и финального наблюдения распределения давления фильтрующейся жидкости.

Теорема 2.1. Пусть значения параметров уравнения (2) удовлетворяют условиям $\lambda \ge -\lambda_1$, $\alpha \in R_+$, $n \ge 3$, $2 \le p \le 2+\dfrac{4}{n-2}$, тогда для любых $x_0 \in \mathrm{N}$, $y \in L_q(0,T;\mathrm{B}^*)$, $T \in \mathrm{R}_+$ существует решение $(\tilde{x}(T),\tilde{u})$ задачи (2)–(4), (8).

Доказательство. Доказательство теоремы основано на методе монотонности, методе компактности, теореме Мазура, переходу к слабому пределу и существенно не отличается от схемы доказательства в случае задачи оптимального управления [5]. Приведем краткое изложение докозательства.

1. Поскольку множество допустимых пар W не пусто, то существует такая последовательность $\{(x_m(T),u_m)\} \in \mathrm{N}\times U_{ad}$, что

$$\lim_{m\to\infty} J(x_m(T),u_m) = \inf_{(x(T),u)} J(x(T),u),$$

тогда из (8) следует ограниченность $\{u_m\}$ в U:

$$\|u_m\|_U \le \text{const}, \quad \forall m. \tag{9}$$

В силу оценки (9) выберем слабо сходящуюся подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$: $u_m \to \tilde{u}$. Согласно теореме Мазура точка $\tilde{u} \in U_{ad}$. Пусть $x_m = x(u_m)$ слабое обобщенное решение задачи

$$A\frac{d}{dt}x_m + Cx_m + D(x_m) = y, \quad A(x_m(0)-x_0) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial \mathbf{n}} = u_m, \ (s,t) \in \partial\Omega\times(0,T). \tag{11}$$

В силу выполнения априорной оценки (7) и свойства p-коэрцитивности оператора D получим $\|x_m\|_{L_p(0,T;\mathrm{B})} \le \text{const} \ \ \forall$ m.

2. Переходя к пределу в уравнении состояния и используя методы компактности и монотонности, получим, что слабый предел последовательности $\{(x_m,u_m)\}$ удовлетворяет уравнению состояния, начальному и граничному условиям:

$$A\frac{d\tilde{x}}{dt} + C\tilde{x} + D(\tilde{x}) = y, \quad A(\tilde{x}(0)-\tilde{x}_0) = 0, \quad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\mathbf{n}} = \tilde{u} \text{ на } \partial\Omega.$$

3. Доказательство равенства $D(\tilde{x}) = \mu$ основано на методе монотонности вследствие s-монотонности оператора D [5, 7].

4. Тогда $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u})$ и $\liminf J(u_m) \ge J(\tilde{u})$. Следовательно, граничное управление решениями задачи (2)–(4) существует.

Работа проводилась при поддержке гранта Минобрнауки РФ № FENU-2020-0022 (2020072GZ).

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения нелинейных вязкоупругих жидкостей / А.П. Осколков // «Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 17», Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1985. – Т. 147. – С. 110–119.

2. Амфилохиев, В.Б. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева // Труды Ленинградского кораблестроительного института. – 1975. – Т. 96. – С. 3–9.

3. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство одной обобщенной модели Осколкова / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44, № 5. – С. 1124–1131.

4. Kovaleva, L.A. Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Model with Neumann Condition and Multipoint Initial-Final Value Condition / L.A. Kovaleva, A.S. Konkina, S.A. Zagrebina // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2022. – Vol. 9, no. 1. – С. 24–34.

5. Манакова, Н.А. Математические модели и оптимальное управление процессами фильтрации и деформации / Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 5–24.

6. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987. – 367 с.

7. Свиридюк, Г.А. Разрешимость неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк, И.Н. Семенова // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 9. – С. 1607–1611.

Поступила в редакцию 11 октября 2022 г.

Сведения об авторах

Перевозчикова Ксения Владимировна – старший преподаватель, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: perevozchikovakv@susu.ru

Манакова Наталья Александровна – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: manakovana@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 4, pp. 28–33

DOI: 10.14529/mmph220404

STUDY OF THE OBJECTIVES OF BOUNDARY CONTROL AND FINAL OBSERVATION FOR THE MATHEMATICAL MODEL OF NON-LINEAR FILTRATION

K.V. Perevozchikova, N.A. Manakova
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: perevozchikovakv@susu.ru, manakovana@susu.ru

Abstract. The article is devoted to studying the problem of boundary control and final observation for a degenerate mathematical model of non-linear filtration, based on the Oskolkov equation, with the initial condition of Showalter–Sidorov. This model belongs to the class of semilinear models of the Sobolian type, in which the nonlinear operator is p-coercive and s-monotonic. The paper for the first time considers the problem of boundary control and final observation for the semilinear model of the Sobolian type and establishes the conditions of the existence of the control-state pair of the matter being studied.

Keywords: problem of boundary control and final observation; mathematical model of non-linear filtration; Sobolean-type equations.

References

1. Oskolkov A.P. Initial-Boundary Value Problems for the Equations of Motion of Nonlinear Viscoelastic Fluids. *Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova*, 1985, Vol. 147, pp. 110–119. (in Russ.).

2. Amfilokhiev V.B., Voytkunskiy Ya.I., Mazaeva N.P. Techeniya polimernykh rastvorov pri nalichii konvektivnykh uskoreniy (The Flow of Polymer Solutions in the Presence of Convective Accelerations). *Trudy Leninigradskogo korablestroitel'nogo instituta*, 1975, vol. 96, pp. 3–9. (In Russ.).

3. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of One Generalized Model by Oskolkov. *Siberian Mathematical Journal*, 2003, Vol. 44, no.5, pp. 877–882. DOI: 10.1023/A:1026080506657

4. Kovaleva L.A. , Konkina A.S. , Zagrebina S.A. Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Model with Neumann Condition and Multipoint Initial-Final Value Condition. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2022, Vol. 9, no. 1, pp. 24–34. DOI: 10.14529/jcem220103

5. Manakova N.A. Mathematical Models and Optimal Control of the Filtration and Deformation Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2015, Vol. 8, no. 3, pp. 5–24. DOI: 10.14529/mmp150301

6. Lions J.-L. *Contrôle Optimal de Systémes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*. Paris, Dunod, 1968, 426 p. (in French).

7. Sviridyuk G.A., Semenova I.N. Solvability of an Inhomogeneous Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equations. *Differential Equations*, 1988, Vol. 24, no. 9, pp. 1065–1069.

Received October 11, 2022

Information about the authors

Perevozchikova Ksenia Vladimirovna is Senior Lecturer, Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: perevozchikovakv@susu.ru

Manakova Natalia Aleksandrovna is Doctor Physics and Mathematics, head of the department, Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: manakovana@susu.ru