УДК 517.984 DOI: 10.14529/mmph220405

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЧЕБЫШЁВА ПЕРВОГО РОДА

А.И. Седов
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: sedovai@susu.ru

Аннотация. Рассматривается возмущенный сингулярный обыкновенный дифференциальный оператор Чебышёва первого рода с непрерывным запаздыванием. Для произвольной числовой последовательности мало отличающейся от последовательности собственных чисел невозмущенного оператора, ставится задача нахождения оператора возмущения, содержащего непрерывное запаздывание. Доказывается теорема существования такого оператора. Построен и обоснован алгоритм нахождения функции запаздывания в виде ряда Фурье. Обоснование алгоритма опирается на теорию регуляризованных следов.

Ключевые слова: регуляризованный след; сингулярный обыкновенный дифференциальный оператор; собственные числа.

Введение

Рассматривается обратная спектральная задача для сингулярного дифференциального оператора Чебышёва первого рода с запаздыванием специального вида. Обратные спектральные задачи часто возникают в естественных науках и инженерии (см., например, монографию [1] и ссылки в ней). Обратные спектральные задачи заключаются в построении операторов с заданными спектральными характеристиками. Для классических операторов Штурма–Лиувилля обратные задачи изучены достаточно полно, основные результаты можно найти в [2, 3]. Однако дифференциальные операторы с задержкой по существу труднее для исследования, так как основные методы в обратной проблемной теории (метод оператора преобразования и метод спектральных отображений [2, 3]) не работают для операторов с задержкой. В настоящей работе метод регуляризованных следов применяется при решении обратной задачи для сингулярного обыкновенного дифференциального оператора с непрерывным запаздыванием успешно применённый в [4] для оператора Штурма–Лиувилля.

Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальный оператор T :

$$Ty(x) = -\left(1-x^2\right)y''(x) + 2xy'(x),$$

действующий в пространстве $L_2 = L_2^{\omega}[-1,1]$, $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Известно [5], что его собственным числам $\lambda_n = n^2$ соответствуют ортонормированные в L_2 собственные функции $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)$, T_n – многочлены Чебышёва первого рода степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1},

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \theta \in [0,\pi], n = 1,2,\ldots$$

Пусть P – оператор, действующий в L_2 :

$$Py(x) = \left(2 + p'(x)\sqrt{1-x^2}\right)y\left(\cos\left(\arccos x - p(x)\right)\right) - y(1).$$

Поставим следующую обратную задачу спектрального анализа: для заданной возрастающей последовательности чисел $\{\xi_n\}$ найти функцию p, такую, что спектр оператора $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}$ совпадал бы с заданной последовательностью $\{\xi_n\}$.

Дополнительно будем предполагать, что строго убывающая функция p с непрерывной производной удовлетворяет условиям:

$$p(1)=0,\, p(-1)=\pi, \left\| \frac{p'}{\omega} \right\|_{L_2} \le \|p\|_{L_2} .$$

Будем решать эту задачу, используя метод обратной спектральной задачи рассмотренный в [4].

Основные результаты

Поскольку оператор T – самосопряженный, а P – ограниченный, то имеет место равенство (см. напр. [6])

$$\mu_n = \lambda_n + \left(Pv_n, v_n\right) + \alpha_n(p),$$

где $\alpha_n(p)$ поправка теории возмущений

$$\alpha_n(p) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \lambda Sp\left[R(\lambda)\left(PR_0(\lambda)\right)\right]^2 d\lambda,$$

$\lambda \in \gamma_n = \left\{ \lambda : \left(\lambda - \lambda_n\left(= \frac{1}{2}\left(\lambda_{n+1} + \lambda_n\right)\right.\right.\right\}$, Sp – след оператора, R и R_0 – резольвенты операторов T и $T+P$ соответственно. Можно показать (см. напр.[4, 7]), что для поправок справедлива

Теорема 1. Если $\left\|P_j\right\| < r$, то выполнено неравенство

$$\left|\alpha_n(p_1) - \alpha_n(p_2)\right| \le \frac{rr_n}{1 - \dfrac{r}{r_n}} \max_{\lambda \in \gamma_n} \left\|R_0(\lambda)\right\|_2^2 \left\|P_1 - P_2\right\|.$$

Здесь $\|\cdot\|_2$ – норма Гильберта–Шмидта, $r_n = \frac{1}{2}\left(\lambda_{n+1} - \lambda_n\right)$.

Преобразуем выражение $\left(Pv_n, v_n\right)$.

$$\left(Pv_n, v_n\right) = \int_{-1}^{1} \left[\left(2 + p'(x)\sqrt{1-x^2}\right) v_n\left(\cos\left(\arccos x - p(x)\right)\right) - v_n(1) \right] v_n(x)\omega(x)dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\left(2 + p'(x)\sqrt{1-x^2}\right) \cos\left(n\left(\arccos x - p(x)\right)\right) - v_n(1) \right] v_n(x)\omega(x)dx.$$

Сделаем замену переменной $x = \cos\theta$.

$$\left(Pv_n, v_n\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\left(2 + \left(p'(x)\right._{x=\cos\theta} \sin\theta\right) \cos\left(n\left(\theta - p(\cos\theta)\right)\right) - v_n(1) \right] \cos(n\theta) d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(2 + \left(p'(x)\right._{x=\cos\theta} \sin\theta\right) \left[\cos\left(n\left(2\theta - p(\cos\theta)\right)\right) + \cos\left(np(\cos x)\right) \right] d\theta - \frac{2v_n(1)}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(2 + \left(p'(x)\right._{x=\cos\theta} \sin\theta\right) \cos\left(n\left(2\theta - p(\cos\theta)\right)\right) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(np(\cos x)\right) d\theta +$$

$$\frac{+1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(p'(x)\right._{x=\cos\theta} \sin\theta \cos\left(np(\cos x)\right) d\theta =$$

Сделаем замены: в первом интеграле $z = 2\theta - p(\cos\theta)$, в третьем $u = p(\cos\theta)$ и, учитывая, что $p(1) = 0, p(-1) = \pi$, получим

$$\left(Pv_n, v_n\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(np(x)\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(p - 1(t)\right)' \cos(nt) dt.$$

Или $\left(Pv_n, v_n\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} p_n$, где p_n коэффициент разложения производной функции $\left(p^{-1}\right)'$ обратной к функции p в ряд Фурье по косинусам $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$.

Таким образом

$$\mu_n = \lambda_n + \sqrt{\frac{2}{\pi}} p_n + \alpha_n\left(p\right). \qquad (1)$$

Умножим это тождество на $\cos nx$ и просуммируем по n, добавив слагаемое c для образования базиса пространства $L_2^{\omega}\left[-1,1\right]$, получим

$$\left(p^{-1}\left(x\right)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n - \lambda_n - \alpha_n\left(p\right)\right)\cos nx + c.$$

Наконец, проинтегрируем от 0 до x, учитывая $p\left(1\right) = 0$:

$$p^{-1}\left(x\right) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\mu_n - \lambda_n - \alpha_n\left(p\right)\right)}{n}\sin nx + cx.$$

Воспользуемся вторым условием $p\left(-1\right) = \pi$ и найдем $c = \frac{-2}{\pi}$

Теорема 2. Если для последовательности ξ_n выполняются неравенства*:*

$$\gamma^2 := \frac{\sqrt{\pi} r^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{n\left(1 - \frac{r}{r_n}\right)}\max_{\lambda\in\gamma_n}\left\|R_0\left(\lambda\right)\right\|_2^2\right)^2 < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_n - \lambda_n\right|^2}{n^2} < \left(1 - \gamma\right)^2 r^2,$$

то существует функция $p \in U\left(0, r\right) \subset L_2\left(0, \pi\right)$ такая, что для спектра оператора $\sigma\left(T + P\right) = \left\{\mu_n\right\}$ имеют место равенства $\mu_n = \xi_n$.

Доказательство. В пространстве $L_2\left(0, \pi\right)$ рассмотрим уравнение относительно p :

$$p^{-1} = \alpha_0 - \alpha\left(p\right), \qquad (2)$$

где

$$\alpha_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\xi_n - \lambda_n\right)}{n}\sin nx - \frac{2}{\pi}x + 1,\ \ \alpha\left(p\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\left(p\right)}{n}\sin nx.$$

Введем операторы $A: U\left(0, r\right) \subset L_2\left(0, \pi\right) \to L_2\left(0, \pi\right)$

$$Ap = \alpha_0 - \alpha\left(p\right)$$

и $B: L_2\left(0, \pi\right) \to L_2\left(0, \pi\right)$

$$Bp = p^{-1}.$$

Так как $B^2 p = p,$ то уравнение $Bp = Ap$ эквивалентно уравнению $p = A^2 p$. Покажем, что A сжимающий оператор. Имеем

$$\left\|Ap_1 - Ap_2\right\|^2 = \left\|\alpha\left(p_1\right) - \alpha\left(p_2\right)\right\|^2 =$$

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\alpha_n\left(p_1\right)-\alpha_n\left(p_2\right)\right|^2}{n^2}\leq\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{rr_n}{n\left(1-\frac{r}{r_n}\right)}\max_{\lambda\in\gamma_n}\left\|R_0\left(\lambda\right)\right\|_2^2\right)^2\left\|P_1-P_2\right\|^2\leq$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{rr_n}{n\left(1-\frac{r}{r_n}\right)}\max_{\lambda\in\gamma_n}\left\|R_0\left(\lambda\right)\right\|_2^2\right)^2\left\|p_1-p_2\right\|^2=\gamma^2\left\|p_1-p_2\right\|^2.$$

Таким образом, A является сжимающим оператором. Уравнение имеет единственное решение по комбинированному принципу сжимающих отображений.

Для доказательства того, что решение этого уравнения является решением поставленной задачи, очевидно, достаточно продифференцировать уравнение (2), затем умножить полученное тождество на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ и проинтегрировать в пределах от 0 до π. Получим тождество

$$\xi_n=\lambda_n+\sqrt{\frac{2}{\pi}}p_n+\alpha_n\left(p\right).$$

Сравнивая его с (1) получим равенства $\mu_n=\xi_n$. Теорема доказана.

Алгоритм

Используем известную [8] вторую поправку теории возмущений для конструирования алгоритма.

$$\alpha_n^2\left(p\right)=\frac{1}{2}\sum_{k\neq n}\frac{\left(Pv_k,v_n\right)\left(Pv_n,v_k\right)}{\lambda_n-\lambda_k}.$$

Приведем алгоритм поиска приближённого решения, вытекающего из доказательства теоремы.

Зададим точность δ.

1. Выберем число слагаемых ряда m чем больше оно, тем более точным будет приблизительное решение. Если числа ξ_n конечное множество, то m определяется естественным образом.

2. Положим $p_0\equiv 0$.

3. Далее

$$\hat{p}_1=\sum_{n=1}^{m}\frac{\left(\xi_n-\lambda_n\right)}{n}\sin nx-\frac{2}{\pi}x+1.$$

$$p_1=\sum_{n=1}^{m}\frac{\left(\xi_n-\lambda_n\right)}{n}\sin nx-\frac{2}{\pi}x+1+\sum_{n=1}^{m}\sum_{i\neq n}^{m}\frac{\left(\hat{P}_1v_n,v_i\right)\left(v_n,\hat{P}_1v_i\right)}{2n\left(\lambda_n-\lambda_i\right)}\sin nx.$$

4. Начнем итерации

$$\hat{p}_{j+1}=\sum_{n=1}^{m}\frac{\left(\xi_n-\lambda_n\right)}{n}\sin nx-\frac{2}{\pi}x+1+\sum_{n=1}^{m}\sum_{i\neq n}^{m}\frac{\left(P_jv_n,v_i\right)\left(v_n,P_jv_i\right)}{2n\left(\lambda_n-\lambda_i\right)}\sin nx,$$

$$p_{j+1}=\sum_{n=1}^{m}\frac{\left(\xi_n-\lambda_n\right)}{n}\sin nx-\frac{2}{\pi}x+1+\sum_{n=1}^{m}\sum_{i\neq n}^{m}\frac{\left(\hat{P}_{j+1}v_n,v_i\right)\left(v_n,\hat{P}_{j+1}v_i\right)}{2n\left(\lambda_n-\lambda_i\right)}\sin nx.$$

5. Вычислим

$$\mu_n=\lambda_n+\left(P_{j+1}v_n,v_n\right)+\sum_{i\neq n}^{m}\frac{\left(P_{j+1}v_n,v_i\right)\left(v_n,P_{j+1}v_i\right)}{2\left(\lambda_n-\lambda_i\right)}.$$

6. Сравним числа ξ_n и μ_n по какому-либо критерию, например $\sum_{n=1}^{m}\left|\xi_n - \mu_n\right|^2 < \delta$. Если значение критерия уменьшилось по сравнению с предыдущим, то переходим к следующей итерации, т. е. к шагу 4. Если значение увеличилось и требуемая точность была достигнута при предыдущей итерации, то найдено приблизительное решение $p \approx p_{j+1}$. Если значение увеличилось, но необходимая точность не была достигнута на предыдущей итерации, то увеличим m и перейдем к шагу 1.

Литература

1. Hale, J. Theory of functional-differential equations / J. Hale. – New York, Springer-Verlag, 1977. – 366 p.

2. Freiling, G. Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications / G. Freiling, V. Yurko. – Huntington, NY: Nova Science Publishers, 2001. – 305 p.

3. Yurko, V. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series / V. Yurko. – Utrecht, VSP, 2002. – 303 p.

4. Sedov, A.I. About one problem of identification of delay by spectral data / A.I. Sedov, G.A. Kameneva, T.A. Bondarenko // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 306–315.

5. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 2 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.

6. Садовничий, В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. – М.: Высшая школа, 1999. – 367 с.

7. Седов, А.И. Об обратной задаче спектрального анализа / А.И. Седов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – № 4(221), Вып. 7. – С. 91–99.

8. Рид, М. Методы современной математической физики: Т.4. Анализ операторов / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1982. – 430 с.

Поступила в редакцию 18 мая 2022 г.

Сведения об авторе

Седов Андрей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sedovai@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2022, vol. 14, no. 4, pp. 34–39

DOI: 10.14529/mmph220405

DETERMINING OF CONTINUOUS DELAY IN A SPECTRAL PROBLEM FOR CHEBYSHEV OPERATOR OF THE FIRST KIND

A.I. Sedov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: sedovai@susu.ru

Abstract. A perturbed singular ordinary differential Chebyshev operator of the first kind with continuous delay is considered in this paper. For an arbitrary numerical sequence that does not differ much from eigenvalues sequence of an unperturbed operator, a problem is set to find the perturbation operator containing a continuous delay. A theorem of the existence of such an operator is being proved. An algorithm of finding the delay function in the form of a Fourier series is built and substantiated. The algorithm substantiation is based on the regularized traces theory.

Keywords: regularized trace; singular ordinary differential operator; eigenvalues.

References

1. Hale J. *Theory of functional-differential equations*. New York, Springer-Verlag, 1977, 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2

2. Freiling G., Yurko V. I*nverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*. Huntington, NY: Nova Science Publishers, 2001, 305 p.

3. Yurko V. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002, 303 p.

4. Sedov A.I., Kameneva G.A., Bondarenko T.A. About One Problem of Identification of Delay by Spectral Data. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2021, Vol. 729 LNEE, pp. 306–315.

5. Bateman H., Erdelyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. 2* (Higher transcendental functions. Vol. 2.), Moscow, Nauka Publ., 1974, 295 p.

6. Sadovnichiy V.A. *Teoriya operatorov* (Operator Theory). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1999, 367 p. (in Russ.).

7. Sedov A.I. About the inverse problem of the spectral analysis. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2011, no. 4(221), Iss. 7, pp. 91–99. (in Russ.).

8. Rid M., Saymon B. *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki: T.4. Analiz operatorov* (Methods of Modern Mathematical Physics: Vol. 4. Operator Analysis). Moscow, Mir Publ., 1982, 430 p. (in Russ.).

Received May 18, 2022

Information about the author

Sedov Andrey Ivanovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Information and Measuring Equipment Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sedovai@susu.ru