Математика

УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph230101

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

***Б.Г. Гребенщиков*[1], *С.А. Загребина*[1], *А.Б. Ложников*[2,3]**

[1] *Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
[2] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация*
[3] *Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация*
e-mail: zagrebinasa@susu.ru

Аннотация. Рассматриваются возможности применения некоторых модифицированных численных методов для уравнений с запаздыванием, линейно зависящим от времени (аргумента). Поскольку запаздывание неограниченно возрастает, требуется применять также некоторые асимптотические методы при анализе поведения решения таких систем. В статье будут установлены асимптотические свойства исследуемых систем, существенно влияющих на точность численного подсчета. Именно, ввиду неограниченности запаздывания, в случае неустойчивости решения систем с запаздыванием для выяснения свойств решения подобных систем полезно знать асимптотические свойства производных, имеющих порядок больше единицы. Зачастую (при условиях, сформулированных в статье) данные производные стремятся к нулю при неограниченном увеличении времени. Это свойство позволяет достаточно эффективно применять некоторые численные методы конечного порядка (метод Рунге–Кутты, модифицированный метод Эйлера с пересчетом и т. д.). В качестве иллюстрации эффективности разработанных методов в статье будет показано применение некоторых модифицированных методов численного счета для изучения процесса вертикальных колебаний полоза токоприемника, движущегося с постоянной скоростью локомотива при взаимодействии с контактным проводом при наличии эластичного закрепления на опоре. Численные методы, изложенные в статье, позволяют исследовать асимптотическое поведение и более сложных систем, содержащих как постоянное, так и линейное запаздывание. Отметим, что применение численных методов для подсчета решения зачастую позволяет выявить не только неустойчивость решения исследуемых систем, но и может быть использовано при стабилизации некоторых систем, содержащих неограниченное (не обязательно линейное) запаздывание.

Ключевые слова: линейное запаздывание; численные методы; асимптотическая устойчивость.

Введение

Уравнения с запаздыванием встречаются во многих задачах физики, механики, радиоэлектроники, биологии. Если системы с постоянным запаздыванием изучены достаточно хорошо, то системы с переменным (но ограниченным) запаздыванием гораздо менее изучены. Еще менее изучены системы с линейным запаздыванием, т. е. в том случае, когда запаздывание $\gamma(t)$ является линейной функцией времени, следовательно, не является ограниченным. Между тем системы с линейным запаздыванием встречаются в теории радиоактивного распада, в задаче колебаний токоприемника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом при наличии эластичности в точке закрепления провода (простейшая модель будет рассмотрена в данной статье). Кроме того, уравнения с линейным (пропорциональным) запаздыванием встречаются в экономике, теории очередей и т. д.

Поиск решения таких систем в аналитическом виде возможен только в исключительных случаях. Между тем для решения, например, задач стабилизации систем такого класса необходимо знать поведение решения исследуемой (нестабилизированной) системы. Эту информацию можно получить, применяя численные методы решения исследуемых систем. Но в нашем случае наличие неограниченного запаздывания приводит к определенным трудностям (в частности, накапливаются ошибки при приближенных численных расчетах на бесконечном промежутке времени). Поэтому возникает задача модифицировать некоторые традиционные методы численного счета.

1. Применение численных методов для решения некоторой системы в случае постоянных коэффициентов в правой части

Изучим поведение решения системы m-го порядка с постоянными коэффициентами и с запаздыванием $\gamma(t)$, линейно зависящим от времени t:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(\mu t),\ \mu = \text{const},\ 0 < \mu < 1,\ t \geq t_0 > 0,\ \gamma(t) = (1-\mu)t. \tag{1}$$

Начальные условия, определяющие решение системы (1), заданы, например, на отрезке $[\mu\ t_0,\ t_0]$ начальной вектор-функцией $\varphi(\theta)$, т. е.

$$x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [\mu\ t_0,\ t_0] \tag{2}$$

(в частности, начальные значения могут быть заданы и в точке $t_0 = 0$). Асимптотическое поведение решения будем рассматривать в линейном пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{R})$.

Пусть Re $(\lambda_i) < -\beta$, β = const, $\beta > 0$, где λ_i – корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{3}$$

Тогда при $t > t_0$ для решения системы (1) $x(t,t_0,\varphi(\theta))$ при любой матрице B (отличной от нулевой) справедлива оценка [1]

$$x(t) = \boldsymbol{O}(t^{\,p}),\ p = \text{const},\ |p| > 1, \tag{4}$$

(под оценкой (4) понимается следующее: найдется постоянная вещественная p, что величина $x(t) = \boldsymbol{O}(t^{\,p})$ при $t \geq t_0$, т. е. эквивалентна $t^{\,p}$).

Дальнейшие свойства решения данной системы (1) при $|\rho| < 1$, где ρ – собственные значения матрицы $A^{-1}B$, а именно, асимптотическая устойчивость, также следуют из работы [1]. Иные же свойства системы (1), а именно неустойчивость решения, при наличии хотя бы одного собственного значения $\bar{\rho}$, $|\bar{\rho}| > 1$ (доказанного с помощью преобразования Лапласа) следуют из результатов работы [2]. Асимптотические свойства данной системы, например, при $|\rho| = 1$ (в случае неустойчивости) можно исследовать уже с помощью численных методов, учитывая особенности данной системы. Приведем эти свойства.

Продифференцируем обе части системы (1) по t. Получаем систему

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dx'(t)}{dt} = Ax'(t) + \mu Bx'(\mu t),\ \text{где}\ \frac{dx(t)}{dt} = x'(t),\ t > \mu^{-1}t_0. \tag{5}$$

При малом μ собственные значения матрицы $\mu A^{-1}B$, меньше единицы по модулю, тогда решение системы (5) асимптотически устойчиво, следовательно, тем более данное свойство справедливо и для соответствующей системы вида

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} = Ax^{(2)}(t) + \mu^{(2)}Bx^{(2)}(\mu t),\ \ t > \mu^{-2}t_0.$$

Тогда для иллюстрации поведения решения исходной системы (1) применим модифицированный метод Эйлера с пересчетом [3].

Если же параметр μ не является малым, но при выполнении неравенства $|\rho_j^k| < 1$, где ρ_j^k – собственные числа матрицы $\mu^k A^{-1}B$, имеем, что производные $x^{(k+j)}(t)$ $(j = 1, 2,\dots)$ также стремятся к нулю при $t \to \infty$, следовательно, можно эффективно использовать численный метод Нордсика [3, 4], который оперирует лишь с величинами $x^{(j)}(t)$ $(j = 0, 1, 2,\dots, k-1)$. Поскольку имеем асимптотическое равенство

$$x(t_{i+1}) \approx x(t_i) + \Delta x^{(1)}(t_i) + (1/2)\Delta^2 x^{(2)}(t_i) + \dots + \boldsymbol{O}((1/k!)\Delta^k x^{(k)}(t_i)),$$

где Δ – малая постоянная величина, вводим величину $\hat{z}_1$ (Нордсика), компонентами которой являются величины $x^{(j)}(t)$. Получили конечномерную систему, которая может дать достоверные результаты при достаточно малых Δ. Этот метод исследования (более подробно см. в [3, 4]) применим и для некоторых неоднородных уравнений. Приведем пример.

В статье [5] рассматривается проблема колебаний полоза токоприемника, движущегося с единичной скоростью локомотива, при взаимодействии с контактным проводом. Полагают, что выполнены следующие условия:

$$c^2 = \frac{T_0}{m_0} > 1,\ c = \text{const},$$

где T_0 – натяжение в тросе, m_0 – масса единицы длины троса. Пусть величина $Y(x, t)$ – малое вертикальное перемещение натянутого троса под действием движущегося токоприемника, обозначим ординату натянутого контактного провода $v(x)$. Схема участка электрофицированной дороги изображена на рис. 1, ось y направлена вниз, а уравнение (неоднородное) гиперболического типа имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial x^2} = -P\delta(x–t),\ \ t > 0.$$

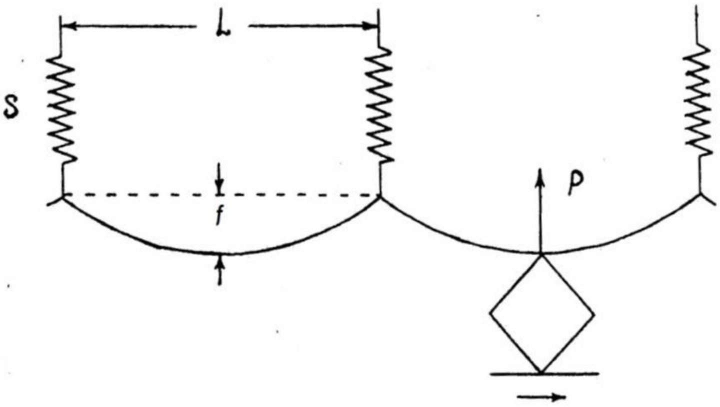

Рис. 1. Схема контактной сети и токоприемника

Считаем, что в результате действия вертикального смещения токоприемника справедливо соотношение

$$\left[\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x}\right] = \bar{k}\ \frac{dy(t)}{dt},$$

где $y(t) = Y(x,t) + v(t)$; $y(t)$ – координаты точки приложения обода токоприемника, $\bar{k}$ – коэффициент пропорциональности (имеется податливость опорного узла), $v(t)$ – уравнение контактного провода (подвески) с учетом единичной скорости. Более подробно в [5].

Таким образом, получаем уравнение с переменным запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1-c}{2\bar{k}}y(t) + \frac{(1-c)\alpha}{2\bar{k}(1-\alpha)}y(\mu t) + \frac{1-c}{2k}v(t) + \frac{d}{dt}v(t)\,. \tag{6}$$

Здесь $\mu = \dfrac{c-1}{c+1}$, $0 < \mu < 1$, α – коэффициент пропорциональности, возникающий ввиду решения волнового уравнения на линии действия токоприемника $x = t$, (более подробно см. [5, 6]).

При условии малости величины провеса контактного провода ордината v(t) в правой части данного уравнения с высокой степенью точности является параболой [6], тогда уравнение (6) будет иметь вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1-c}{2\bar{k}}y(t)\ +\ \frac{(1-c)\alpha}{2\bar{k}(1-\alpha)}y\,(\mu t) + \alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2,\ \alpha_j = \text{const},\ j = 0, 1, 2. \tag{7}$$

Начальные условия заданы в точке $t = 0$, т. е. $y(0) = y_0$. Отметим, что в случае неравенства $|(1-\alpha)\alpha^{-1}| < 1$ решение однородного уравнения, соответствующего (6) будет асимптотически устойчивым, тогда решение (7) будет ограниченным [7] и с помощью численных методов (исходя из графика) могут быть оптимизированы параметры подвески и опорного узла.

В заключение раздела отметим, что подобными численными методами можно исследовать и поведение систем, содержащих наряду с линейным также и постоянное запаздывание, имеющих вид

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\,\hat{x}\,(t) + B_1\,\hat{x}\,(t-\omega) + B_2\,\hat{x}\,(\mu t),\ \ \omega = \mathrm{const},\ \omega > 0. \tag{8}$$

Схожие уравнения встречаются, например, в задаче управления затратами на рекламу [8]. Достаточные условия асимптотической устойчивости получены автором в работе [1], при этом полагается, что λ корни характеристического уравнения

$$|A + B_1\exp(-\lambda\sigma) - \lambda E| = 0$$

имеют отрицательную вещественную часть. Тогда решение «укороченной» системы

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = A\,\hat{y}\,(t) + B_1\,\hat{y}\,(t-\omega).$$

экспоненциально устойчиво, следовательно, и для фундаментальной матрицы решений «укороченной» системы $\boldsymbol{Y}_{\sigma}\,(t,s) = \boldsymbol{Y}_{\sigma}\,(t-s)$ справедлива оценка [9]

$$\left\|\boldsymbol{Y}_{\sigma}\,(t-s)\right\| \le C\exp(-b(t-s)),\ b = \mathrm{const},\ b > 0,\ C = \mathrm{const},\ \mathrm{C} > 1. \tag{9}$$

Если теперь продифференцировать j раз обе части системы (8), то из полученного соотношения

$$\frac{d\hat{x}^{(j+1)}(t)}{dt^{j}} = A\,\hat{x}^{(j)}\,(t) + B_1\,\hat{x}^{(j)}\,(t-\omega) + \mu^{j}\,B_2\,\hat{x}^{(j)}\,(\mu t)$$

при $\dfrac{\mu^{k}\,\|B_2\|}{\beta} \le b$, b = const, $0 < b < 1$ следует свойство производных $\|\,\hat{x}^{(j)}\,(t)\,\| \to 0$ (при $t \to \infty$, $j \ge k$, k – натуральное число), более подробно в [1]. Как вытекает из результатов, полученных в [1], для вектор-функции $\hat{x}^{(k)}\,(t)$ справедлива оценка

$$\|\,\hat{x}^{(j)}\,(t)\| \le C_k\left(\frac{t}{h}\right)^{-\delta_k}\sup_{\eta}\left\|\varphi_k(\eta)\right\|,\ \hat{x}^{(k)}\,(\eta) = \varphi_k(\eta),\ \eta \le h. \tag{10}$$

Представим теперь при $j = k - 1$ решение соответствующей дифференциальной системы в интегральной форме [9]

$$\hat{x}^{(k-1)}(t) = \mathbf{Y}_{\sigma}\,(t-h)f_{k-1}(h) + \int_{-\sigma}^{0} Y_{\sigma}\,(t-h-\xi)B_1 f_{k-1}(h+\xi)\mathrm{d}\xi +$$

$$+\int_{h}^{t} Y_{\sigma}\,(t-s)\,\mu^{k}\,B_2\,\hat{x}^{(k-1)}(\mu s)\,ds,\ t > h,\ \hat{x}^{(k-1)}\,(\eta) = \varphi(\eta),\ \eta \le h. \tag{11}$$

Первые два члена в правой части этого равенства есть величина $\hat{y}\,(t)$. Рассмотрим интегральный член в правой части. Введем вектор-функцию $\mathbf{W_1}$(t), определенную равенством $\dfrac{d}{dt}\,\mathbf{W}_1(t) = \mathbf{Y}_{\sigma}\,(t)$, причем

$$\mathbf{W}(t,h) = -\int_{h}^{t}\frac{\partial}{\partial s}\,\mathbf{W}_1(t-s)\mathrm{d}s = R - \mathbf{W_1}(t-h),. \tag{12}$$

где $R = -\mathbf{W}_1(0)$.

Проинтегрировав по частям второй член в правой части равенства (10), получаем следующее соотношение:

$$\int_{h}^{t} Y_{\sigma}\,(t-s)\,\mu^{k-1}\,B_2\,\hat{x}^{(k-1)}(\mu s)\,ds = \mu^{k-1}\,\mathbf{R}B_2\,\hat{x}^{(k-1)}(\mu t)\ -$$

$$-\,\mu^{k-1}\,\mathbf{W}_1(t-h)\mathrm{B}_2\,\hat{x}^{(k-1)}(h) + \int_{h}^{t} W_1\,(t-s)\,\mu^{k}\,B_2\,\hat{x}^{(k)}(\mu s)\,ds. \tag{13}$$

Второй член в правой части (13) является исчезающей вектор-функцией [1], интеграл ввиду соотношений (9), (10) также есть исчезающая вектор-функция. Получили из (11) неоднородную разностную систему

$$\hat{x}^{(k-1)}(t) = \mu^{k-1}\,\mathbf{R}B_2\;\hat{x}^{(k-1)}(\mu t) + F_{k-1}(t). \qquad (14)$$

Здесь неоднородность $F_{k-1}(t)$ (при $t\to\infty$) является исчезающей вектор-функцией [1, 10]. Полагаем, что среди собственных значений ρ_{k-1} матрицы $\mu^{k-1}\,\mathbf{R}B_2$ найдется хотя бы одно ρ_{k-1} по модулю больше единицы. Тогда решение однородной разностной системы (соответствующей (14)) будет неустойчиво [10]. Следовательно, неустойчиво и решение системы (14) ввиду того, что общее решение этой системы состоит из суммы общего решения однородной системы и частного неоднородной системы.

Далее рассмотрим поведение величины $\hat{x}^{(k-2)}(t)$. Методами, аналогичными использованными выше, получаем для системы первого приближения неоднородное уравнение

$$\hat{x}^{(k-2)}(t) \approx \mu^{k-2}\,\mathbf{R}B_2\;\hat{x}^{(k-2)}(\mu t) + \mu^{k-1}\;\mu^{k-2}\,(\mathbf{R}B_2)^2\;\hat{x}^{(k-2)}(\mu t) + \hat{F}_{k-2}(t).$$

Здесь $\hat{F}_{k-2}(t)$ – исчезающая вектор-функция. Снова имеем неоднородное уравнение, при этом соответствующее однородное разностное уравнение неустойчиво.

Продолжая подобные рассуждения, получаем итоговую асимптотическую формулу для решения исходной системы (8)

$$\hat{x}(t) \approx \mathbf{R}B_2\;\hat{x}(\mu t) + \mu(\mathbf{R}B_2)^2\,\hat{x}'(\mu t) + \mu\,\mu^2\;(\mathbf{R}B_2)^3\,\hat{x}^{(2)}(\mu t) + \ldots +$$
$$+\,\mu\,\mu^2\,\ldots\,\mu^{k-1}\;(\mathbf{R}B_2)^k\,\hat{x}^{(k-1)}(\mu t) + \hat{F}_0(t). \qquad (15)$$

Данную разностную систему первого приближения легко реализовать в виде компьютерной программы, из нее же можно сделать выводы: если $k \le 4$, численное решение можно применять на конечном промежутке, применяя метод Рунге–Кутты–Фельберга, при этом получать численные решения для производных первого, второго, …, четвертого порядка, дальнейшее представление получим, используя представления типа (15). Если же $k > 4$, то численный подсчет производим методом Нордсика.

2. Анализ систем с линейным запаздыванием при $\mu = 1 - \varepsilon$, ε – достаточно малое положительное число

Отметим, что произведенные выше исследования весьма эффективны при малых величинах μ. Если же при соотношении $\mu = 1 - \varepsilon$ (ε – достаточно малое положительное число) ввиду того, что производная от величины $(1 - \varepsilon)t$ весьма близка к единице (и приходится весьма много дифференцировать исходное выражение (2), для получения достаточных условий асимптотической устойчивости производных) весьма эффективно использовать функционалы

$$\mathrm{V}(t, x(s)) = \mathrm{W}(t, x(t)) + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} \int_{t-\sigma}^{t} x_j^2(s)ds + \sum_{i,j=1}^{m} \beta_{ij} \int_{t-\varepsilon t}^{t} x_j^2(s)ds.$$

Здесь $\mathrm{W}(t, x(t))$ − ограниченная положительно определенная квадратичная форма переменных $x_j(t)$ ($x_j(t)$ − компоненты вектор-функции $x(t)$), функционал $\mathrm{V}(t, x(s))$ является знакоопределенным [11]. Рассматривая теперь производную от функционала $\mathrm{V}(t, x(s))$ вдоль интегральных кривых исследуемой системы, видим, что если производная от данного функционала вдоль интегральных кривых этой системы будет отрицательно определенной квадратичной формой переменных $x(t)$, $x(t–s)$, и при этом сам функционал $\mathrm{V}(t, x(s))$ является знакоопределенным, знака, противоположного его производной вдоль интегральных кривых этой системы, то система асимптотически устойчива [11].

Приведем простейший пример. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bx(t - \varepsilon t),\ a = \mathrm{const},\ a < 0,\ b = \mathrm{const},\ t \ge t_0 > 0. \qquad (16)$$

Для решения вопроса о достаточных условиях относительно b, при которых решение уравнения (16) асимптотически устойчиво, рассмотрим функционал

$$V_1(t, x((s)) = x^2(t) - a\int_{t-\varepsilon t}^{t} x^2(s)ds\,. \tag{17}$$

Вычислим его производную вдоль траекторий уравнения (16)

$$\frac{d}{dt}V_1(t, x((s))_1(\tau, z(s)) = 2x(t)(ax(t) + bx(t-\varepsilon t) - ax^2(t) + a(1-\varepsilon)x^2(t-\varepsilon t)) =$$

$$= a[x^2(t) + 2ba^{-1}x(t)x(t-\varepsilon t) + (1-\varepsilon)x^2(t-\varepsilon t)] = aW_1(x(t), x(t-\varepsilon t)). \tag{18}$$

Очевидно, квадратичная форма $W_1(x(t), x(t-\varepsilon t))$ является определенно положительной при $|b| < (1-\varepsilon)^{0,5}|a|$ [10].

С другой стороны достаточными условиями асимптотической устойчивости (более точными и более широкими) является совокупность неравенств [1]: $a < 0$, $|b| < |a|$. Видим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ эти условия асимптотической устойчивости близки к полученным. Этот метод функционалов Ляпунова–Красовского позволяет получать области асимптотической устойчивости и при переменной величине $b(t)$.

3. Пример

Учитывая применение численных методов, изложенных выше, рассмотрим систему второго порядка:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -4x(t) + 1{,}5y(t) - 4y(t-1) + 2{,}4x(0{,}2t) + 2y(0{,}2t)\,,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2x(t) - 2y(t-1) + y(0{,}2t). \tag{19}$$

Система имеет два запаздывания: $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 0{,}8t$. Корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 2\lambda\cdot\exp(-\lambda) + 3 = 0$, $\lambda_1 = -0{,}449$, $\lambda_{23} = -0{,}575 \pm 2{,}675i$, $\lambda_{45} = -1{,}412 \pm 8{,}16i$, …, обладают свойством $\mathrm{Re}(\lambda) \le -0{,}449$, корни не являются кратными. Последнее свойство позволяет получать элементы фундаментальной матрицы решений системы без членов с линейным запаздыванием в правой части в виде $\dfrac{d_{kr}^{j}}{\Delta'(\lambda_j)}\exp(\lambda_j t)$. Здесь d_{kr}^{j} – алгебраические дополнения матрицы

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda_j & 1{,}5-4\exp(-\lambda_j) \\ -2 & -2\exp(-\lambda_j)-\lambda_j \end{pmatrix}$$

в пересечении k-й строки и r-го столбца, $\Delta'(\lambda_j)$ – производная от функции $\Delta(\lambda)$ при значении аргумента λ_j. Если теперь представить решение системы в численном виде с предысторией (начальные данные): $x = 1$, $y = t$, то видим, что решение неустойчиво, это иллюстрирутся рис. 2 и подтверждается собственными значениями матрицы

$$\rho(RB_2) \approx \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 1{,}406 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему, которой удовлетворяет производная

$$\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = -4\dot{x}(t) + 1{,}5\dot{y}(t) - 4\dot{y}(t-1) + 0{,}48\dot{x}(0{,}2t) + 0{,}4\dot{y}(0{,}2t),$$

$$\frac{d\dot{y}(t)}{dt} = -2\dot{x}(t) - 2\dot{y}(t-1) + 0{,}2\dot{y}(0{,}2t). \tag{20}$$

Ее решение асимптотически устойчиво (что видно из графика производной на рис. 3). Подсчет велся с применением алгоритма Рунге−Кутты−Фельберга и является закономерным на конечном промежутке.

Поскольку решение медленно растет при $t\to\infty$, то удобно при больших t асимптотическое представление решения в виде $\hat{x}(t) \approx \mathbf{R}B_2\hat{x}(\mu t)$.

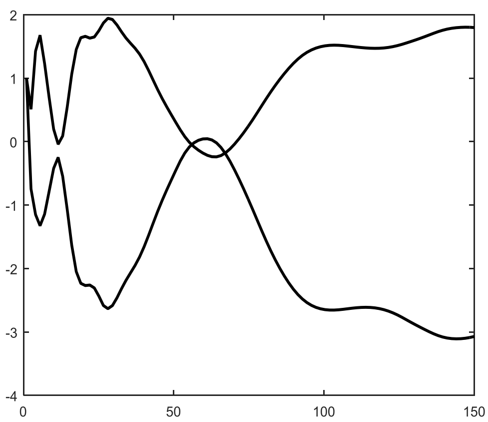

Рис. 2. Неустойчивость решения

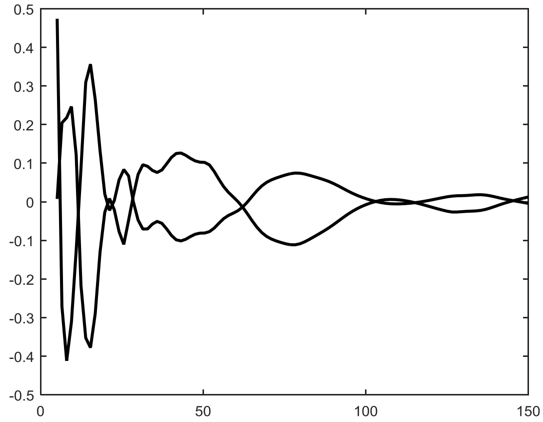

Рис. 3. Устойчивость производной решения

4. Применение численных методов для одной системы в случае переменных матриц *A*(*t*) и *B*(*t*)

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с переменными матрицами $A(t)$, $B(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(\mu t),\ \mu = \text{const},\ 0 < \mu < 1,\ t \geq t_0 > 0. \tag{21}$$

Сделаем замену аргумента $\tau = \ln\left(\dfrac{t}{t_0}\right)$. Получаем систему с постоянным запаздыванием

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = t_0 e^{\tau}[\hat{A}(\tau)z(\tau) + \hat{B}(\tau)\ z(\tau-\sigma)],\ \sigma = -\ln(\mu),\ \tau \geq 0. \tag{22}$$

Полагаем, что матрицы $\hat{A}(\tau)$, $\hat{B}(\tau)$ – периодические (периода σ), достаточное число раз дифференцируемые, при этом справедливы оценки

$$\|\hat{A}^{(j)}(\tau)\| \leq \vec{a},\ \|\hat{B}^{(j)}(\tau)\| \leq \bar{b},\ j = 1, 2, \ldots, k;\ \bar{a} = \text{const},\ \bar{b} = \text{const}. \tag{23}$$

Здесь и далее под нормой вектора x считаем равенство $\|x\| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$, x_i – координаты вектора x.

При этом норма матриц выбирается в соответствии с нормой вектора. Полагаем, что собственные числа $\lambda_i(\tau)$ матрицы $\hat{A}(\tau)$ удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(\tau)) < -\beta. \tag{24}$$

Для того, чтобы лучше понять асимптотические свойства системы (22), положим $z_{n+1}(\tau) = z(n\sigma+\tau)$, $\varepsilon_n = \dfrac{\mu^n}{t_0}$, и сведем систему (22) к счетной системе

$$\varepsilon_n \frac{dz(\tau)}{d\tau} = e^{\tau}[\hat{A}(\tau)z_{n+1}(\tau) + \hat{B}(\tau)z_n(\tau)],\ \tau \in [0,\sigma],\ z_{n+1}(0) = z_n(\sigma),\ n = 0, 1, \ldots . \tag{25}$$

Известно [12], что при выполнении условий (23), (24) фундаментальная матрица $\mathbf{Y}_n(\tau, s)$ решений линейной системы без запаздывающих членов

$$\varepsilon_n \frac{dy_{n+1}(\tau)}{d\tau} = e^{\tau}\hat{A}(\tau)y_{n+1}(\tau)$$

при достаточно малом ε_n ($n \geq N$) допускает оценку

$$\|\mathbf{Y}_n(\tau, s)\| \leq M \exp\left\{-\frac{\beta(e^{\tau} - e^{s})}{\varepsilon_n}\right\},\ 0 < s < \tau \leq \sigma. \tag{26}$$

(Отметим, что константа $M > 1$ одна и та же для любых $0 < \varepsilon_n \leq \varepsilon_0$). Данную величину N можно установить, сравнивая графики вектор-функции

$$\varepsilon_n \frac{dz^0_{n+1}(\tau)}{d\tau} = \exp(\tau)[A(\tau)\, z^0_{n+1}(\tau) + E],$$

(где E – единичная матрица, а вектор-функция $z^0_{n+1}(0)$ равна нулевому вектору) с матрицей $-A^{-1}(\tau)$ на интервале $[0{,}5\sigma, \sigma]$.

Ранее доказано [13], что при выполнении оценок (23), (26) для величин $\max_\tau \| z^{(j)}_{n+i}(\tau) \|$ (i = 1, 2,…; j = 1,…,k) справедливы (довольно грубые) оценки $\max_\tau \| z^{(j)}_{n+i}(\tau) \| \le C_j q^n \max_\tau \| z_n(\tau) \|$, $q = M[1+\beta^{-1}b]$, C_j = const, $C_j > 1$.

Запишем решение системы (25) в форме Коши

$$z_{n+i}(\tau) = Y_{n+i-1}(\tau,0)\, z_{n+i}(0) + \int_0^\tau Y_{n+i-1}(\tau,s)\, \frac{e^s}{\varepsilon_{n+i-1}} [\hat{B}(s)\, z_{n+i-1}(s)]ds$$

и проинтегрируем последний член в правой части по частям несколько раз. Имеем (учитывая оценки роста решения и производных)

$$\begin{aligned} z_{n+i}(\tau) &= Y_{n+i-1}(\tau,0)\, z_{n+i-1}(\tau_0+\sigma) + \int_0^\tau Y_n(\tau,s)\, \frac{e^s}{\varepsilon_n} [\hat{B}(s)\, z_{n+i-1}(s)]ds = \\ &= Y_{n+i-1}(\tau,0)\, z_{n+i-1}(\tau_0+\sigma) - \hat{A}^{-1}(\tau)\, \hat{B}(\tau)\, z_{n+i-1}(\tau) + \boldsymbol{O}(\varepsilon_{n+i-1}) z_{n+i-1}(\tau) + \\ &+ Y_{n+i-1}(\tau,0)\, (-\hat{A}^{-1}(0)\, \hat{B}(0) + \boldsymbol{O}(\varepsilon_{n+i-1})) z_{n+i-1}(0) + \boldsymbol{O}(\varepsilon_{n+i-1})\, z^{(1)}_{n+i-1}(\tau) + \\ &+ Y_{n+i-1}(\tau,0)\, z^{(1)}_{n+i-1}(0) + \ldots + (\varepsilon_{n+i-1})^{k-2} \boldsymbol{O}(\varepsilon_{n+i-1})\, z^{(k-1)}_{n+i-1}(\tau) + \\ &+ Y_{n+i-1}(\tau,0)\, (\varepsilon_{n+i-1})^{k-2} \boldsymbol{O}(\varepsilon_{n+i-1})\, z^{(k-1)}_{n+i-1}(0) + \boldsymbol{O}((\mu^k q)^i) \| z_n(\tau) \|, \end{aligned} \quad (27)$$

Полагаем, что $\mu^k q < 1$, что возможно при достаточно больших k (величину k можно получить из неравенства $M\mu^k b < \beta$). Следовательно, $\boldsymbol{O}((\mu^k q)^i) \| z_n(\tau) \|$ является исчезающей вектор-функцией при $i \to \infty$. Таким образом,

$$z(\tau) \approx f(\tau, z(\tau-\sigma), z^{(1)}(\tau-\sigma), \ldots, z^{(k-1)}(\tau-\sigma)).$$

Отсюда и в исходной системе (в переменной t) вектор-функция $x(t)$ приближенно зависит лишь от $x^{(j)}(\mu t)$, j = 0, 1,…, k–1. Нахождение численного решения системы (22) (например, методом Рунге–Кутты–Фельберга) может применяться только при малых τ и не является приемлемым из-за наличия экспоненты в правой части этой системы. Тем не менее в случае экспоненциальной устойчивости, соответствующей вырожденной (разностной системы), производная системы (21) также экспоненциально устойчива [13], и, разрешив равенство (25) относительно $z_{n+1}(\tau)$, имеем, что в правой части полученного равенства $\varepsilon_n e^{-\tau} \hat{A}^{-1}(\tau)\, z_{n+1}(\tau)$ является величиной более высокого порядка малости, т. е. $z_{n+1}(\tau) \approx -\hat{A}^{-1}(\tau)\, \hat{B}(\tau)\, z_n(\tau)$.

Теперь, учитывая тот факт, что в исходной системе (в переменной t) вектор-функция $x(t)$ приближенно зависит лишь от $x^{(j)}(\mu t)$, j = 0, 1,…, k–1 искомая вектор-функция $x(t)$ при $t > t_0\mu^{-N}$ может быть вычислена модифицированным методом Нордсика. Но данное свойство также может быть использовано при (модифицированном) методе Рунге–Кутты–Фельберга. Пусть k = 3. Имеем для численного решения системы (21) асимптотическое равенство [3]

$$x(t+\Delta) \approx x(t) + \Delta[A(t)x(t) + B(t)x(\mu t)] +$$
$$\frac{\Delta^2}{2}\left\{\left(\frac{dA(t)}{dt}x(t) + \frac{dB(t)}{dt}x(\mu t) + A(t)\big[A(t)x(t) + B(t)x(\mu t)\big]\right)\right\} + \hat{f}(t),$$

где $\hat{f}(t)$ – исчезающая вектор-функция.

Отсюда получаем численный алгоритм

$$u_{i+1} = u_i + \Delta\Big[A(t)u_i + B(t)u_{t_i}(\cdot)\Big] + \frac{\Delta^2}{2}\left\{\frac{dA(t)}{dt}u_i + \frac{dB(t)}{dt}u_{t_i}(\cdot) + A(t)\Big[A(t)u_i + B(t)u_{t_i}(\cdot)\Big]\right\}.$$

Здесь u_i – приближение точного решения $x(t)$ в точке $t_i, u_{t_i}(\cdot) = u(t_i + s)$, где $\mu t_i < s < t_i$ (более подробно см. в [3]).

Отметим так же, что предложенный численный метод применим и для систем вида

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = t_0 e^{\tau}\left[\hat{A}(\tau)z(\tau) + \sum_{i=1}^{r}\hat{B}_i(\tau)z(\tau - n_i\sigma)\right],$$

n_i – целые числа, $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_r$, матрицы $\hat{B}_i(\tau)$ периодические, периода σ.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поздравить профессора Алексея Валерьевича Богомолова с пятидесятилетним юбилеем и поблагодарить его за многолетнюю поддержку и интерес к нашим исследованиям, за доброжелательную и конструктивную критику.

Литература

1. Гребенщиков, Б.Г. Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием / Б.Г. Гребенщиков, В.И. Рожков // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 5. – С. 751–758.

2. Гребенщиков, Б.Г. О неустойчивости одной системы с линейным запаздыванием / Б.Г. Гребенщиков, С.И. Новиков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2010. – № 2. – С. 3–13.

3. Ким, А.В. *i*-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений / А.В. Ким, В.Г. Пименов. – Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 255 с.

4. Штеттер, Х.И. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений / Х.И. Штеттер. – Москва: Мир, 1978. – 461 с.

5. On a Functional Differential Equation / L. Fox, D.F. Mayers, J.R. Ockendon, A.B. Tayler // IMA Journal of Applied Mathematics. – 1971. – Vol. 8, Iss. 3. – P. 271–307.

6. Ockendon, J.R. The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive / J.R. Ockendon, A.B. Taylor // Proceedings of the Royal Society of London A – Mathematical and Physical Sciences. – 1971. – Vol. 322, no. 1551. – P. 447–468.

7. Гребенщиков, Б.Г. Об ограниченности решений неоднородных систем с запаздыванием, линейно зависящим от времени / Б.Г. Гребенщиков // Устойчивость и нелинейные колебания: сб. науч. тр. – Свердловск: УрГУ, 1986. – С. 7–12.

8. Сесекин, А.Н. Об одной математической модели управления инвестициями, приводящей к системе с постоянным и линейным запаздываниями / А.Н. Сесекин, А.С. Шляхов // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2021. – Т. 192. – С. 111–116.

9. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

10. Халанай, А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 309 с.

11. Красовский, Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н.Н. Красовский. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.

12. Гребенщиков, Б.Г. Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием / Б.Г. Гребенщиков // Устойчивость и нелинейные колебания: сб. науч. тр. – Свердловск: УрГУ, 1984. – С. 18–29.

13. Гребенщиков, Б.Г. Об устойчивости линейных систем с постоянным запаздыванием и экспоненциальными коэффициентами / Б.Г. Гребенщиков // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания: межвуз. сб. науч. тр. – Л. : [б. и.], 1990. – С. 138–148.

Поступила в редакцию 25 октября 2022 г.

Сведения об авторах

Гребенщиков Борис Георгиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: grebenshchikovbg@susu.ru

Загребина Софья Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zagrebinasa@susu.ru

Ложников Андрей Борисович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; доцент, кафедра прикладной математики, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: ABLozhnikov@yandex.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2023, vol. 15, no. 1, pp. 5–15

DOI: 10.14529/mmph230101

THE APPLICATION OF NUMERICAL METHODS TO SOLVE LINEAR SYSTEMS WITH A TIME DELAY

B.G. Grebenshchikov[1], S.A. Zagrebina[1], A.B. Lozhnikov[2,3]
[1] South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
[2] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation
[3] Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation
e-mail: zagrebinasa@susu.ru

Abstract. This paper considers the application of modified numerical methods for solving differential equations with a delay which linearly depends on time. Since the delay increases indefinitely, it is also necessary to apply asymptotic methods to analyze the behavior of the solutions of such systems. The paper establishes the asymptotic properties of the systems under study, which significantly affect the accuracy of the numerical calculation. Given the unbounded delay and the instability of the solutions and to clarify the properties of the solution of such systems, it is useful to know the asymptotic properties of the derivatives having an order greater than one. Under the conditions formulated in the article, these derivatives tend to zero as $t \to \infty$. This property makes it possible to apply finite-order numerical methods (such as the Runge–Kutta method and the modified Euler method). As an illustration of the effectiveness of the methods developed, the article calculates the vertical oscillations of a locomotive pantograph moving at a constant speed when interacting with the contact wire. The numerical methods allow the study of the asymptotic behavior of more complex systems containing both constant and linear delay. Note that the use of numerical methods for calculating the solution reveal the instability of the solution of the systems under study and can be used to stabilize some systems containing an unlimited (not necessarily linear) delay.

Keywords: linear delay; numerical methods; asymptotic stability.

Reference

1. Grebenshchikov B.G., Rozhkov V.I. Asymptotic Behavior of the Solution of a Stationary System with Delay. *Differ. Equ.*, 1993, Vol. 29, no. 5, pp. 640–647.

2. Grebenshchikov B.G., Novikov S.I. Instability of Systems with Linear Delay Reducible to Singularly Perturbed Ones. *Russian Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika), 2010, Vol. 54, Iss. 2, pp. 1–10. DOI: 10.3103/S1066369X10020015

3. Kim A.V., Pimenov V.G. *i-Gladkiy analiz i chislennye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* (i-Smooth Analysis and Numerical Methods of Solution Functional-Differential Equations). Moscow, Izhevsk, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2004, 255 p. (in Russ.).

4. Stetter H.J. *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York, 1973, 390 p. DOI:10.1007/978-3-642-65471-8

5. Fox L., Mayers D.F., Ockendon J.R., Tayler A.B. On a Functional Differential Equation Get access Arrow. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1971, Vol. 8, Iss. 3, pp. 271–307. DOI: 10.1093/imamat/8.3.271

6. Ockendon J.R., Taylor A.B. The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive. *Proc. Royal Society of London A – Mathematical and Physical Sciences,* 1971, Vol. 322, no. 1551, pp. 447–468. DOI: 10.1098/rspa.1971.0078

7. Grebenshchikov B.G. Ob ogranichennosti resheniy neodnorodnykh sistem s zapazdyvaniem, lineyno zavisyashchim ot vremeni (About Boundary Solutions of Nonhomogeneous Systems with Delay, which Linear Depends on Time). *Ustoychivost' i nelineynye kolebaniya: sb. nauch. tr.* (Proc. Stability and nonlinear oscillations), Sverdlovsk, UrGU Publ., 1986, pp. 7–12. (in Russ.).

8. Sesekin A.N., Shlyakhov A.S. On a Mathematical Model of Investment Management Leading to a System with Constant and Linear Delays. *Proc. Voronezh spring mathematical school “Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems. Pontryagin Readings – XXX”*, Voronezh, May 3–9, 2019. Part 3, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. (Results of science and technology. The series “Modern Mathematics and its applications”. Thematic reviews), 192, VINITI, Moscow, 2021, pp. 111–116. DOI: 10.36535/0233-6723-2021-192-111-116

9. Bellman R., Cooke K.L. *Differential-Difference Equations*. New York, London, Academic Press, 1963, 462 p.

10. Halanau A., Wexler D. *Teoria Calitativa a Sistemelor cu Impulsuri*. Editura Academiei Republiciti Socialiste Romania Bucarest, 1968, 315 p.

11. Krasovskiy N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* (Some Tasks of Theory Stability of Movement). Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 212 p. (in Russ.).

12. Grebenshchikov B.G. Ob ustoychivosti nestatsionarnykh sistem s bol'shim zapazdyvaniem (About Stability of Nonstationary Systems with Large Delay). *Ustoychivost' i nelineynye kolebaniya: sb. nauch. tr. (Proc. Stability and nonlinear oscillations),* Sverdlovsk, UrGU Publ., 1984, pp. 18–29. (in Russ.).

13. Grebenshchikov B.G. Ob ustoychivosti lineynykh sistem s postoyannym zapazdyvaniem i eksponentsial'nymi koeffitsientami (About Stability of Linear Systems with Constant Delay and with Exponential Coefficients). *Matematicheskiy analiz. Voprosy teorii, istorii i metodiki prepodavaniya: mezhvuz. sb. nauch. tr. (Mathematical analysis. Questions of theory, history and methodology of education: Interuniversity Collection of Scientific Papers*. Leningrad, 1990, pp. 138–148. (in Russ.).

Received October 25, 2022

Information about the authors

Grebenshchikov Boris Georgievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: grebenshchikovbg@susu.ru

Zagrebina Sophiya Alexandrovna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor Department of Mathematical and Computer Modeling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zagrebinasa@susu.ru

Lozhnikov Andrey Borisovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Department of Differential Equations, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: ABLozhnikov@yandex.ru